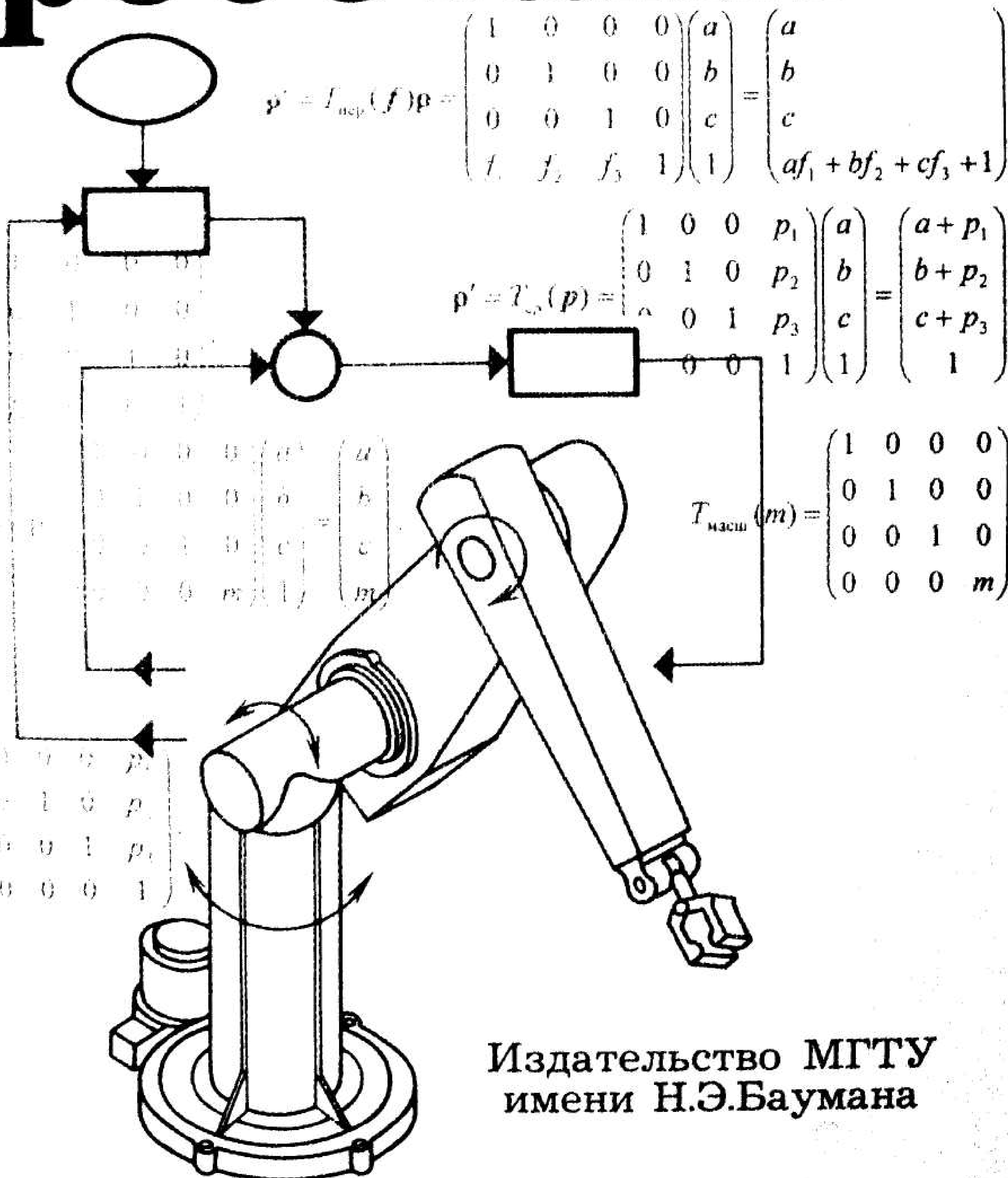


С.Л. Зенкевич, А.С. Ющенко

Управление роботами



Издательство МГТУ
имени Н.Э.Баумана

УДК 621.865(075.8)
ББК 32.816
3-56

Федеральная целевая программа книгоиздания России

Рецензенты: акад. И. М. Макаров, проф. В. М. Лохин, проф. В. С. Кулешов

3-56 **Зенкевич С. Л., Ющенко А. С.** Управление роботами. Основы управления манипуляционными роботами: Учеб. для вузов — М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2000. — 400 с., ил.

ISBN 5-7038-1339-5

Систематически изложены вопросы теории манипуляционных роботов и методы управления ими. Рассмотрены основные кинематические соотношения, позволяющие определять положение манипуляционного механизма робота в рабочем пространстве, а также решать задачи о скоростях и ускорениях движения его звеньев. Подробно описаны способы и алгоритмы кинематического управления манипуляторами. Приведены основные сведения о динамике манипуляционных механизмов, математические модели движения и методика их анализа. Рассмотрены методы динамического управления, позволяющие организовать движение манипулятора с учетом сил и моментов, реально действующих на него в процессе работы, практические методы исследования и расчета исполнительной системы манипуляционного робота, а также логическое управление сложными робототехническими системами с использованием теории сетей и конечных автоматов. Даны примеры применения рассматриваемых методов, в конце каждой главы приведен список контрольных вопросов и заданий. Книга содержит основные математические сведения, необходимые для понимания материала учебника и выходящие за рамки обычной программы технического университета по математике и теоретической механике.

Содержание учебника соответствует курсу лекций, который авторы читают в МГТУ им. Н. Э. Баумана.

Для студентов технических университетов, обучающихся по специальности «Роботы и робототехнические системы» и другим специальностям, связанным с управлением сложными механизмами. Представляет интерес для аспирантов, преподавателей и специалистов.

УДК 621.865(075.8)
ББК 32.816

© С. Л. Зенкевич, А. С. Ющенко, 2000
© Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана, 2000
© Издательство МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2000

ISBN 5-7038-1339-5

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	7
Список основных обозначений	10
Введение	12
В.1. Задачи управления манипуляционными роботами.....	12
В.2. Функциональное описание робототехнической системы.....	16
В.2.1. Манипулятор.....	16
В.2.2. Привод степени подвижности	23
В.2.3. Исполнительная система.....	25
В.2.4. Система управления манипулятором.....	25
В.3. Задачи управления робототехническими комплексами.....	30
В.4. Взаимодействие робота с человеком-оператором.....	32
1. Основные кинематические соотношения.....	35
1.1. Манипулятор как механическая система	35
1.2. Преобразование координат.....	38
1.2.1. Преобразования вращения и переноса	39
1.2.2. Элементарные и сложные вращения	43
1.2.3. Типовые вращения. Углы Эйлера.....	45
1.2.4. Сложные преобразования.....	47
1.3. Однородные координаты и преобразования.....	48
1.3.1. Однородные координаты и векторы.....	48
1.3.2. Однородные преобразования	51
1.4. Определение положения и ориентации звеньев манипулятора.....	57
1.5. Специальные системы координат.....	60
Контрольные вопросы и задания.....	64
2. Положение манипулятора в рабочем пространстве.....	67
2.1. Прямая позиционная задача	67
2.2. Геометрия рабочего пространства манипулятора.....	73
2.2.1. Конфигурация рабочего пространства и его объем.....	73
2.2.2. Анализ ориентации схвата в рабочем пространстве. Коэффициент сервиса.....	83
2.3. Обратная позиционная задача	91
2.3.1. Метод обратных преобразований	92

2.3.2. Тригонометрический подход к решению обратной позиционной задачи	94
2.3.3. Численные методы решения обратной задачи	98
<i>Контрольные вопросы и задания</i>	101
3. Скорости и ускорения звеньев манипулятора	103
3.1. Соотношения для скоростей и ускорений	103
3.1.1. Скорости и ускорения в относительном движении	104
3.1.2. Определение скоростей и ускорений звеньев манипулятора методом прямой рекурсии	105
3.1.3. Запись основных кинематических соотношений с помощью блочных матриц	110
3.1.4. Уравнения для скоростей и ускорений в однородных координатах	117
3.2. Дифференциальные преобразования	121
3.2.1. Вращение твердого тела	121
3.2.2. Дифференциальное перемещение	124
3.2.3. Матрица дифференциальных преобразований	128
3.3. Прямая и обратная задачи о скорости	130
3.3.1. Прямая задача о скорости	131
3.3.2. Обратная задача о скорости	140
3.3.3. Манипуляторы с тремя пересекающимися осями сочленений	144
3.3.4. Обратная задача о скорости как задача минимизации	151
3.4. Кинематические свойства манипулятора	157
3.4.1. Распределение допустимых скоростей в рабочем пространстве	157
3.4.2. Оценка мобильности манипулятора	163
3.4.3. Оценка приемистости	165
<i>Контрольные вопросы и задания</i>	167
4. Кинематическое управление манипулятором	169
4.1. Планирование траекторий в пространстве обобщенных координат	170
4.1.1. Перевод из точки в точку. Режим разгона — торможения	170
4.1.2. Обход совокупности точек	175
4.2. Управление манипулятором в пространстве координат схвата	183
4.2.1. Управление по положению	183
4.2.2. Формирование программной траектории	184
4.2.3. Линеаризованный позиционный алгоритм управления	186
4.2.4. Управление по вектору скорости и по вектору ускорения	188
4.2.5. Управление по вектору силы	190
<i>Контрольные вопросы и задания</i>	193
5. Уравнения кинестатики манипулятора	194
5.1. Статика манипуляционных механизмов	195
5.1.1. Уравнение равновесия относительно основания манипулятора	195
5.1.2. Обобщенные условия равновесия (обратная рекурсия)	198
5.2. Анализ рабочих сил и моментов	201
5.2.1. Силы и моменты, развиваемые двигателями манипулятора	201

5.2.2. Эллипсоиды допустимых сил	202
5.3. Уравнения движения манипулятора в форме Даламбера	209
5.3.1. Силы и моменты инерции	209
5.3.2. Уравнения движения	213
5.3.3. Составление дифференциальных уравнений движения манипулятора относительно обобщенных координат	215
5.4. Показатели динамических свойств манипулятора	219
5.4.1. Эллипсоид допустимых ускорений	219
5.4.2. Динамическая манипулятивность. Приемистость	221
5.4.3. Вычисление показателей динамических свойств манипулятора	223
<i>Контрольные вопросы и задания</i>	228
6. Уравнения движения манипулятора в форме Лагранжа. Принцип Гаусса	230
6.1. Уравнения Лагранжа второго рода	230
6.1.1. Структура уравнения	230
6.1.2. Связь между уравнением Лагранжа и уравнением кинестатики	233
6.1.3. Численное решение уравнений движения	234
6.2. Движение при наличии внешних связей. Уравнения Лагранжа первого рода	235
6.2.1. Определение реакции связей при использовании уравнений кинестатики	235
6.2.2. Уравнение Лагранжа при наличии связей	238
6.2.3. Применение уравнений Лагранжа для анализа движения манипуляционных механизмов с замкнутыми контурами	240
6.3. Принцип Гаусса	248
6.3.1. Общая формулировка принципа Гаусса	248
6.3.2. Применение принципа Гаусса для исследования движения манипуляционных механизмов	249
6.3.3. Определение ускорений вынужденного движения	251
<i>Контрольные вопросы и задания</i>	255
7. Система управления исполнительного уровня	256
7.1. Математическая модель исполнительной системы	256
7.1.1. Уравнения исполнительной системы	256
7.1.2. Линеаризация модели исполнительной системы	261
7.2. Исследование линеаризованной модели исполнительной системы	266
7.2.1. Частотные характеристики и обобщенные показатели качества	266
7.2.2. Устойчивость исполнительной системы	274
7.3. Автоматизированный синтез исполнительной системы	280
7.3.1. Вычисление показателей качества исполнительной системы и отдельных приводов	280
7.3.2. Расчет приводов исполнительной системы. Синтез корректирующих устройств и регуляторов	281

7.3.3. Анализ синтезированной системы. Введение корректирующих связей.....	287
7.4. Анализ исполнительской системы при кинематическом управлении.....	289
7.4.1. Управление по вектору скорости.....	290
7.4.2. Управление положением и устойчивость системы управления.....	296
<i>Контрольные вопросы и задания</i>	302
8. Методы динамического управления манипуляторами	304
8.1. Методы, основанные на решении обратных задач динамики.....	305
8.1.1. Компенсация динамики манипулятора в реальном времени.....	307
8.1.2. Компенсация динамики программного движения.....	309
8.1.3. Проблема реализуемости.....	311
8.1.4. Обобщенный моментный регулятор.....	313
8.2. Декомпозиция управления.....	313
8.2.1. Декомпозиция уравнений динамики манипуляционного механизма.....	313
8.2.2. Декомпозиция управляющих сигналов.....	315
8.3. Силовая обратная связь.....	318
8.3.1. Силовая обратная связь в соединениях манипулятора.....	320
8.3.2. Силовая обратная связь на схвате.....	324
8.3.3. Проблема устойчивости при силовой обратной связи.....	328
8.4. Динамическое планирование.....	334
8.4.1. Планирование движения вдоль заданной траектории с учетом динамических ограничений.....	335
8.4.2. Выбор мощности силовых агрегатов.....	338
8.4.3. Планирование движения манипулятора по собственной траектории.....	341
<i>Контрольные вопросы и задания</i>	346
9. Логическое управление сложной робототехнической системой	348
9.1. Понятие сложной системы.....	348
9.2. Конечный автомат как модель объекта управления.....	353
9.3. Построение моделей подсистем.....	355
9.3.1. Робот как элемент сложной системы.....	356
9.3.2. Модели подсистем.....	359
9.4. Сетевой автомат.....	361
9.5. Сеть автоматов.....	365
9.5.1. Последовательное соединение сетевых автоматов.....	365
9.5.2. Соединение с обратной связью.....	370
9.5.3. Сеть автоматов и эквивалентный автомат.....	371
9.6. Метод управления сложной робототехнической системой.....	373
<i>Контрольные вопросы и задания</i>	380
Послесловие	382
Список литературы	384
Комментарий к списку литературы	389
Предметный указатель	397

ПРЕДИСЛОВИЕ

Робототехника становится неотъемлемой частью производственной и исследовательской деятельности человека в самых различных областях. В связи с этим постоянно возрастает интерес к ней как к инженерной специальности. Подготовка студентов к специальности под названием «Роботы и робототехнические системы» была начата около десяти лет тому назад, и, следовательно, она является относительно молодой среди традиционных инженерных специальностей. Это проявляется, в частности, и в том, что по робототехнике нет стабильных, хорошо отработанных в методическом отношении учебников. Имеющаяся отечественная и переводная учебная литература либо устарела, либо отражает отдельные стороны дисциплины и не соответствует учебной программе. Для того чтобы восполнить этот пробел, авторами и предлагается настоящая книга, написанная как учебник по курсу «Управление роботами и робототехническими системами» на основе одноименного курса лекций, читаемого авторами в МГТУ им. Н. Э. Баумана в последние годы.

Этот учебник, как и любой другой, имеет ограниченную область приложения. Робототехника является весьма обширной сферой инженерной практики, причем в последнее время она все более расширяется. Само понятие «робот» приобретает более широкий смысл, по сравнению с тем, который вкладывался в него ранее. Любое техническое устройство, способное самостоятельно функционировать в неизвестных заранее, изменяющихся условиях внешнего мира, может рассматриваться как робот. При этом предполагается, что оно располагает собственной сенсорной системой, позволяющей ориентироваться во внешнем мире, обладает знаниями, дающими возможность принятия решений в сложной ситуации, способно взаимодействовать с человеком-оператором, определяющим цели функционирования робота.

В такой широкой постановке проблема составления учебника по робототехнике представляется неразрешимой. Поэтому авторами был выбран за основу традиционный подход, при котором будущие специалисты по робототехнике прежде всего должны изучить манипуляционный робот, т.е. техническое устройство, снабженное манипуляторами и способное самостоятельно выполнять различные механические операции в своем рабочем пространстве. Это наиболее широкий класс робототехнических устройств. К нему относятся все промышленные роботы, а также манипуляционные роботы, предназначенные для замены человека в тех случаях, когда он не может присутствовать на месте выполнения операции или выполнять ее самостоятельно — под водой, в космическом пространстве, в условиях повышенной радиации и т.п. Знания, полученные в области кинематики и динамики сложных механизмов и способов управления ими, необходимы и при решении проблем проектирования робототехнических систем в любой другой области.

Авторами не оставлен в стороне еще один важный вопрос, который, по их мнению, также относится к основам робототехники. Это совместная работа нескольких роботов, а также другого автоматизированного технологического оборудования при решении определенной задачи, т.е. проблема управления сложной робототехнической системой. Элементы теории подобных систем также вошли в настоящий учебник.

Учебник условно подразделяется на три части, различающиеся уровнем математической модели робототехнической системы. В главах 1–4 рассмотрены основные кинематические соотношения, описывающие манипуляционный механизм без учета действующих на него сил. Они позволяют определить положение механизма в пространстве, скорости и ускорения всех его звеньев. Кроме того, в главе 4 изложены задачи управления манипуляторами с использованием кинематических соотношений.

В главах 5–8 рассмотрены проблемы, связанные с динамикой манипуляционных роботов. При этом исследуются не только описанные в предыдущих главах алгоритмы кинематического управления при действии сил и моментов, но также рассматриваются и специальные алгоритмы — динамического управления, — учитывающие динамику манипуляционного механизма при определении управляющих сигналов (см. гл. 8). Традиционные методы исследования и расчета следящих систем отражены в главе 7, основное внимание в которой уделено анализу исполнительной системы манипуляционного робота.

Глава 9 посвящена проблемам логического управления сложными робототехническими системами. Читатель найдет здесь, также как и в остальных главах книги, необходимый математический аппарат, позволяющий понять материал учебника, не прибегая к другим источникам.

Авторы предполагали, что читатель владеет материалом курсов высшей математики и теоретической механики в объеме программ технического университета. Желательными являются также знания основ курсов прикладной механики и теории управления техническими системами.

При работе над книгой авторы столкнулись с тем, что в рамках одного учебника невозможно отразить даже основные вопросы, связанные с подготовкой инженера-робототехника. Вне рамок книги остались такие важные вопросы, как организация программного обеспечения робототехнических систем, взаимодействие робота и человека-оператора, автоматизированное моделирование и проектирование робототехнических систем, системы с искусственным интеллектом и распределенные системы. Учитывая, что в современной программе подготовки инженеров-робототехников имеются все перечисленные разделы и по ним также в течение ряда лет читаются лекции в МГТУ им. Н. Э. Баумана, авторский коллектив преподавателей кафедры предполагает издать в ближайшие годы серию учебников, содержащих эти разделы.

Авторы выражают глубокую признательность основателю кафедры «Робототехнические системы» академику РАН Е. П. Попову, создавшему отечественную школу робототехники, к которой принадлежат и авторы настоящей книги.

Список основных обозначений

- q_i — обобщенная координата i -го звена
 q — вектор обобщенных координат манипулятора
 s — 6×1 — вектор, определяющий положение схвата манипулятора как свободного твердого тела
 R, O — 3×3 — ортогональные матрицы (матрицы поворота)
 $p_{k,l}$ — вектор, связывающий начало k -й и l -й систем координат, в проекции на абсолютную систему координат
 A_i — 4×4 матрица перехода от системы координат $O_i X_i Y_i Z_i$ i -го звена к системе координат $O_{i-1} X_{i-1} Y_{i-1} Z_{i-1}$ $i-1$ -го звена
 X, OX — ось системы координат $OXYZ$
 $O_i X_i Y_i Z_i$ — система координат, связанная с i -м звеном
 x_i, y_i, z_i — орты системы координат $O_i X_i Y_i Z_i$, связанной с i -м звеном в проекции на абсолютную систему координат $O_0 X_0 Y_0 Z_0$
 d_i, a_i, α_i, q_i — параметры, определяющие положение i -го звена манипулятора относительно $(i-1)$ -го звена (параметры Денавита — Хартенберга)
 Ω_a — тензор вращения (3×3 — кососимметрическая матрица) с компонентами, определяемыми вектором a
 T_i — 4×4 — матрица перехода от системы координат $O_i X_i Y_i Z_i$ i -го звена к абсолютной системе координат
 p — вектор однородных координат точки твердого тела в связанной с ним системе координат
 r — вектор однородных координат той же точки в неподвижной системе координат

- $\lambda(a)b$ — векторное произведение вектора a на вектор b
 $[a, b, c]$ — смешанное произведение векторов
 $J(q)$ — якобиева матрица
 v_i — линейная скорость i -го звена в абсолютной системе координат
 \tilde{v}_i — то же в системе координат, связанной со звеном
 ω_i — угловая скорость i -го звена в абсолютной системе координат
 $\tilde{\omega}_i$ — то же, но в системе координат, связанной со звеном
 \dot{q}_i — обобщенная скорость i -го звена
 \dot{q} — вектор обобщенных скоростей
 ϵ_i — абсолютное ускорение i -го звена в абсолютной системе координат
 $\tilde{\epsilon}_i$ — то же в системе координат, связанной со звеном
 w_i — абсолютное ускорение центра масс i -го звена в неподвижной системе координат
 \tilde{w}_i — то же в системе координат, связанной со звеном
 m_i — масса i -го звена
 F_{Ii} — главный вектор сил инерции, приложенный в центре масс i -го звена
 $C'_i X'_i Y'_i Z'_i$ — система координат, связанная с i -м звеном, имеющая начало координат в центре его масс и коллинеарная неподвижной системе $OXYZ$
 G'_i — кинетический момент i -го звена в системе координат $C'_i X'_i Y'_i Z'_i$
 G_i — то же в неподвижной системе координат
 I'_i — тензор инерции i -го звена в системе координат $C'_i X'_i Y'_i Z'_i$
 M_{Ii} — главный момент сил инерции i -го звена
 μ_i — управляющие силы и моменты, действующие на i -е звено
 μ — вектор управляющих сил и моментов
 K — кинетическая энергия
 V — потенциальная энергия
 L — кинетический потенциал (функция Лагранжа)
 Z — мера принуждения по Гауссу

ВВЕДЕНИЕ

В. I. Задачи управления манипуляционными роботами

Несмотря на универсальность понятия «робот» и ассоциации, вызываемые этим термином у неспециалистов, подавляющее большинство роботов, используемых в промышленности, представляют собой манипуляторы, управляемые посредством микропроцессорных контроллеров. Многозвенная конструкция манипулятора заканчивается схватом или сменным инструментом, с помощью которого можно перемещать объекты в рабочем пространстве, либо выполнять несложные технологические операции. Чаще всего роботы используют при загрузке механообрабатывающих станков, выполнении операций сварки и покраски, сверления отверстий и нарезания резьб.

На первый взгляд проблема управления такими роботами решается достаточно просто. Наиболее распространенные пневматические роботы-перегрузчики оснащены специальными программаторами, позволяющими легко задавать последовательность позиций, в которых должен находиться робот. Для задания движения электромеханических и электрогидравлических роботов, управляемых с помощью микроконтроллеров, применяют специальные языки программирования, максимально облегчающие работу оператора. При использовании микроконтроллеров в системе управления роботом можно непосредственно программировать движение схвата или инструмента в рабочем пространстве, а не движение каждого отдельного сустава, как в случае простейших роботов. Наконец, с помощью микропроцессорной системы управления можно отлаживать программу движения манипулятора, используя его графический образ на экране дисплея. Оператору для обучения робота не обязательно знать его устройство и особенности, а необходимо лишь владеть языком программирования.

Тем не менее проблемы управления роботами существуют и главным источником их возникновения является основное преимущество

роботов — универсальность. Роботы, как правило, не создают для выполнения конкретной технологической операции. Даже в тех случаях, когда вид операций заранее известен, например операции точечной сварки, необходимо выбирать траекторию движения, возможные ориентации рабочего инструмента, законы движения во времени, включая законы изменения скоростей и ускорений. В ряде случаев предъявляют требования к закону изменения сил. Например, при механической обработке сложных поверхностей необходимо управлять силой резания.

Следует иметь в виду, что возможности робота ограничены. Он функционирует только в определенном объеме рабочего пространства. Его скорости и ускорения обусловлены соответствующими характеристиками приводов сочленений. Силы и моменты, развиваемые рабочим инструментом, зависят от мощности приводов. Кроме того, все характеристики, о которых идет речь (ограничения по положению, ориентации, скоростям, силам и т.д.), неравномерно распределены в рабочем пространстве робота. Так, существуют области рабочего пространства, в которых существенно ограничены возможности ориентации рабочего инструмента. В силу нелинейности кинематической схемы, свойственной большинству роботов, максимальные значения скоростей и ускорений различны в разных точках рабочего пространства. Не менее очевидно, что полностью вытянутая «рука» робота удержит меньшую нагрузку, чем согнутая.

В связи с этим возникает ряд задач, в том числе следующие.

1. Планирование положений. Необходимо совместить зоны обслуживания робота с рабочим пространством, в котором выполняется технологическая операция, таким образом, чтобы рабочий инструмент либо иной объект мог быть доставлен в любое требуемое положение с необходимой ориентацией.

2. Планирование движений. Необходимо выбрать траекторию движения объекта или рабочего инструмента. При этом не только траектория движения, но также законы изменения скоростей и ускорений должны, с одной стороны, соответствовать требованиям технологического процесса, а с другой — возможностям робота.

3. Планирование усилий. Требования технологического процесса должны быть согласованы с возможностями робота развивать необходимые силы и моменты в различных точках рабочего пространства и его энергетикой.

4. Анализ динамической точности. Решение перечисленных задач может потребовать учета динамики робота, так как точность движения по траекториям зависит от развиваемых скоростей и ускорений; при достаточно больших значениях скоростей и ускорений точность отработки траекторий может быть неудовлетворительной. Кроме того, программирование робота без учета его динамики может приводить к появлению эффекта перекрестных связей, когда движение не соответствует заданному закону вследствие взаимного динамического влияния на движение звеньев манипулятора. Анализ степени этого влияния особенно важен для роботов, способных развивать значительные скорости и ускорения, а также для роботов с большой грузоподъемностью, когда динамические эффекты обусловлены значительными массами элементов конструкции.

Перечисленные задачи могут быть решены в ходе предварительного анализа, цель которого состоит в определении требований к промышленному роботу, выполняющему данный цикл рабочих операций. В результате такого анализа могут быть даны рекомендации по выбору одного из имеющихся роботов или по составлению технического задания для разработки специализированного образца.

При использовании выбранного робота решение перечисленных задач сводится к выбору положения и ориентации робота в рабочем пространстве, возможно и к оснащению его дополнительными степенями подвижности. Далее с учетом реальных возможностей и ограничений робота составляются конкретные программы его функционирования. При решении этих задач может потребоваться расширить и усовершенствовать готовое программное обеспечение робота, например с целью учета и компенсации динамических эффектов. В последнем случае возможно использование дополнительных датчиков, для обработки сигналов которых также потребуется расширить математическое и программное обеспечение. Нередко требования технологического процесса удается реализовать, только расширив вычислительные возможности системы управления, например, используя для управления персональную ЭВМ*, соединенную с базовой системой управления робота. Это становится реальным для промышленных роботов, поскольку эволюция их систем управления происходит в направлении все боль-

* В настоящее время для этого широко используют ПЭВМ промышленного исполнения, учитывающие условия эксплуатации.

шей «открытости» системы, доступа к ее программному обеспечению и его расширения, обеспечения возможности подключения дополнительных устройств, в том числе датчиков и вычислительных средств. Такие возможности позволяют значительно усовершенствовать базовую систему управления с целью обеспечения ее адаптации к требуемому технологическому процессу.

Перечисленные задачи могут быть решены с помощью пакета специализированных программ, имеющегося в распоряжении пользователя, который осуществляет адаптацию робота и его системы управления к технологическому процессу. Такой пакет должен включать в себя, в соответствии с поставленными задачами, программу анализа положений, решения прямой и обратной задач кинематики, а в общем случае — и программу решения прямой и обратной задач динамики. Напомним, что прямая задача динамики определяет движение механической системы, в данном случае — манипулятора, по заданным силам и моментам, включая силы и моменты, развиваемые приводами манипулятора, а обратная задача динамики заключается в определении сил и моментов, вызывающих заданное движение.

Понятия «прямая» и «обратная» задачи кинематики, возникли в робототехнике в связи с решением задач планирования движений. Решая прямую задачу кинематики, можно определить положение и ориентацию рабочего инструмента, закрепленного на конце манипулятора, в рабочем пространстве по заданным углам поворота (перемещениям) в степенях подвижности манипуляционного механизма, а при решении обратной — найти эти углы и перемещения, если требуемые положение и ориентация схвата заданы.

5. Идентификация кинематических и динамических характеристик робота. Проблема, с которой часто сталкиваются пользователи, состоит в том, что характеристики робота с необходимой для расчетов точностью, как правило, не определены, а ряд характеристик, используемых для решения задач динамики, вообще неизвестен. В связи с этим для каждого промышленного робота, устанавливаемого на производстве, необходимо решать задачу идентификации, так как «индивидуальные отклонения» характеристик роботов могут оказаться значимыми при их адаптации к технологическому процессу, требующему большой точности. В процессе эксплуатации эти параметры могут изменяться, поэтому требуется их повторная идентификация через определенные промежутки времени.

Таким образом, под управлением роботом понимают комплекс задач, связанных с выбором робота, его адаптацией к технологическому процессу, непосредственным программированием движений, а также синтезом и модификацией системы управления и ее программного обеспечения.

Для решения этих задач необходимо хорошо владеть математическим аппаратом, используемым для анализа кинематики и динамики манипуляторов. В связи с этим первые четыре главы книги посвящены анализу математических моделей манипуляционных механизмов. Эти модели используют для решения основных задач управления, сформулированных выше.

Для того чтобы изучать вопросы управления роботами, необходимо вначале ознакомиться с функциональным описанием робототехнической системы, ее основных элементов, принятой терминологией. Основные сведения, необходимые для чтения книги, приведены ниже. Для более подробного знакомства с робототехникой можно воспользоваться библиографическим списком, приведенным в конце книги. Предполагается, что читатель знаком с общим курсом теории автоматического управления.

В.2. Функциональное описание робототехнической системы

Рассмотрим основные элементы функциональной схемы системы управления промышленным роботом (рис. В.1).

В.2.1. Манипулятор

Базовым элементом робота является *манипулятор* — механизм, обладающий несколькими степенями подвижности, который предназначен для перемещения и ориентации объектов в рабочем пространстве. Многозвенная конструкция манипулятора заканчивается сменным *схватом** — инструментом, предназначенным для захвата объектов определенной формы. Вместо схвата на конце этой конструкции может быть закреплен сменный инструмент (гайковерт, фреза, сверло,

* Этот инструмент также называют захватом. В данной книге используется терминология, сложившаяся в литературе по робототехнике и позволяющая избежать тавтологии.

метчик и т.п.). В этом случае с помощью манипулятора могут быть выполнены различные технологические операции, например зачистка заготовок, нарезание резьбы, сверление отверстий.

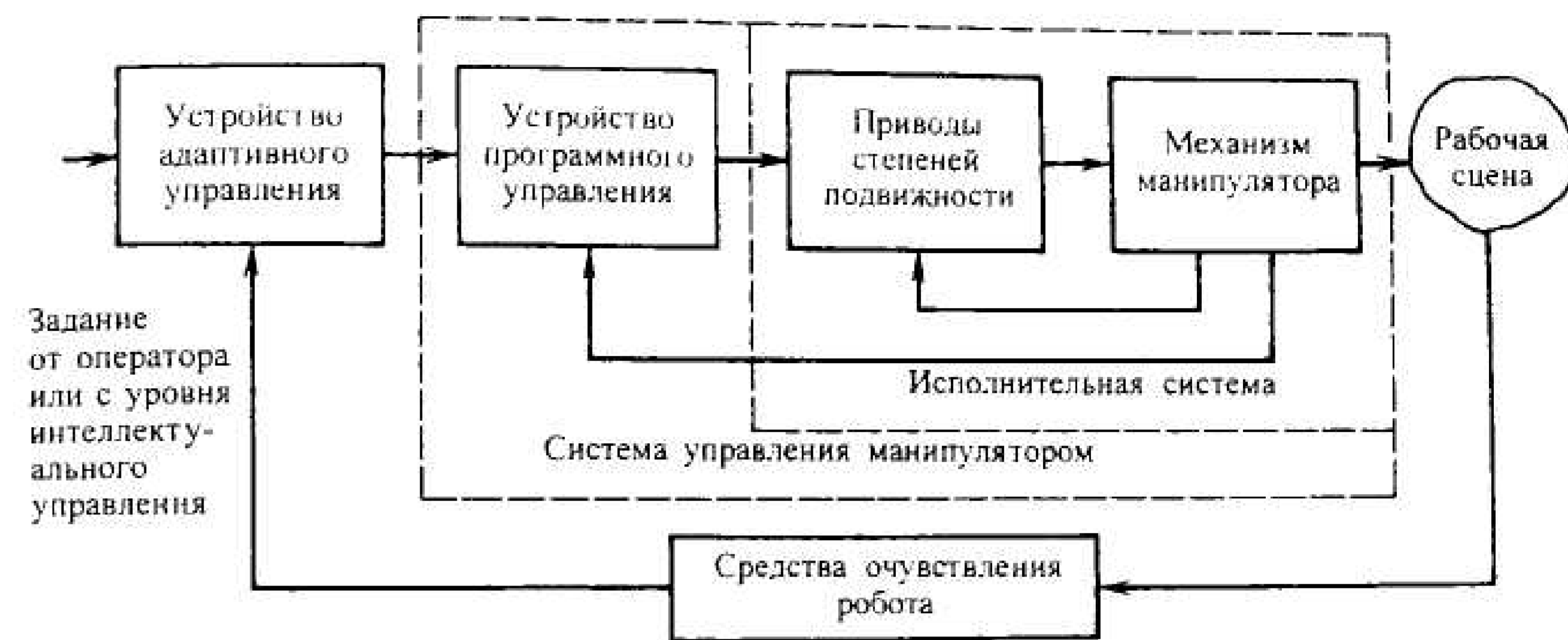


Рис. В.1. Функциональная схема системы управления роботом

Две характерные конструкции манипуляторов показаны на рис. В.2. Один из них имеет только шарнирные соединения (рис. В.2, а). Его звенья могут поворачиваться относительно трех основных осей O_1 , O_2 и O_3 , обеспечивающих перемещение схвата в рабочей зоне: еще две оси O_4 и O_5 определяют ориентирующие движения схвата. Второй манипулятор (рис. В.2, б), кроме вращений относительно осей O_1 , O_2 и O_3 , допускает поступательное перемещение звеньев вдоль оси O_4 .

Напомним, что *механизмом* называют систему тел, предназначенную для преобразования движения одних тел в требуемое движение других. Манипуляционный механизм (*манипулятор*) представляет собой систему тел, которые предназначены для перемещения тела, удерживаемого в схвате манипулятора (инструмента, детали). Тела, образующие манипулятор, называют его *звеньями*.

Звенья, образующие попарные соединения и допускающие относительные перемещения, называют *кинематическими парами*. Каждое звено, рассматриваемое как твердое тело, имеет шесть степеней свободы. Если в кинематической паре на относительное движение звеньев наложено S условий связи (число S определяет класс кинематической пары), то *число степеней кинематической пары равно*

$$h = 6 - S.$$

При $S = 0$ звенья взаимно свободны, а при $S = 6$ — взаимно неподвижны, т.е. $1 \leq S \leq 6$. Так, для шарового шарнира $S = 3$, $h = 3$; для цилиндрической пары $S = 4$, $h = 2$; для простого цилиндрического шарнира и призматической пары поступательного движения $S = 5$, $h = 1$.

Систему звеньев, образующих кинематические пары, называют *кинематической цепью*. Если в цепи имеются звенья, входящие только в одну кинематическую пару, то цепь называют *незамкнутой* (разомкнутой). В противном случае, т.е. если каждое звено входит, как минимум, в две кинематические пары, цепь считают *замкнутой*. Кинематические цепи манипуляторов, показанные на рис. В.2, являются незамкнутыми; если же один из них обрабатывает поверхность, расположенную на неподвижном основании, то его кинематическая схема совместно с инструментом и объектом работы образует замкнутую кинематическую цепь. При этом следует учитывать условное неподвижное звено, которое замыкает цепь.

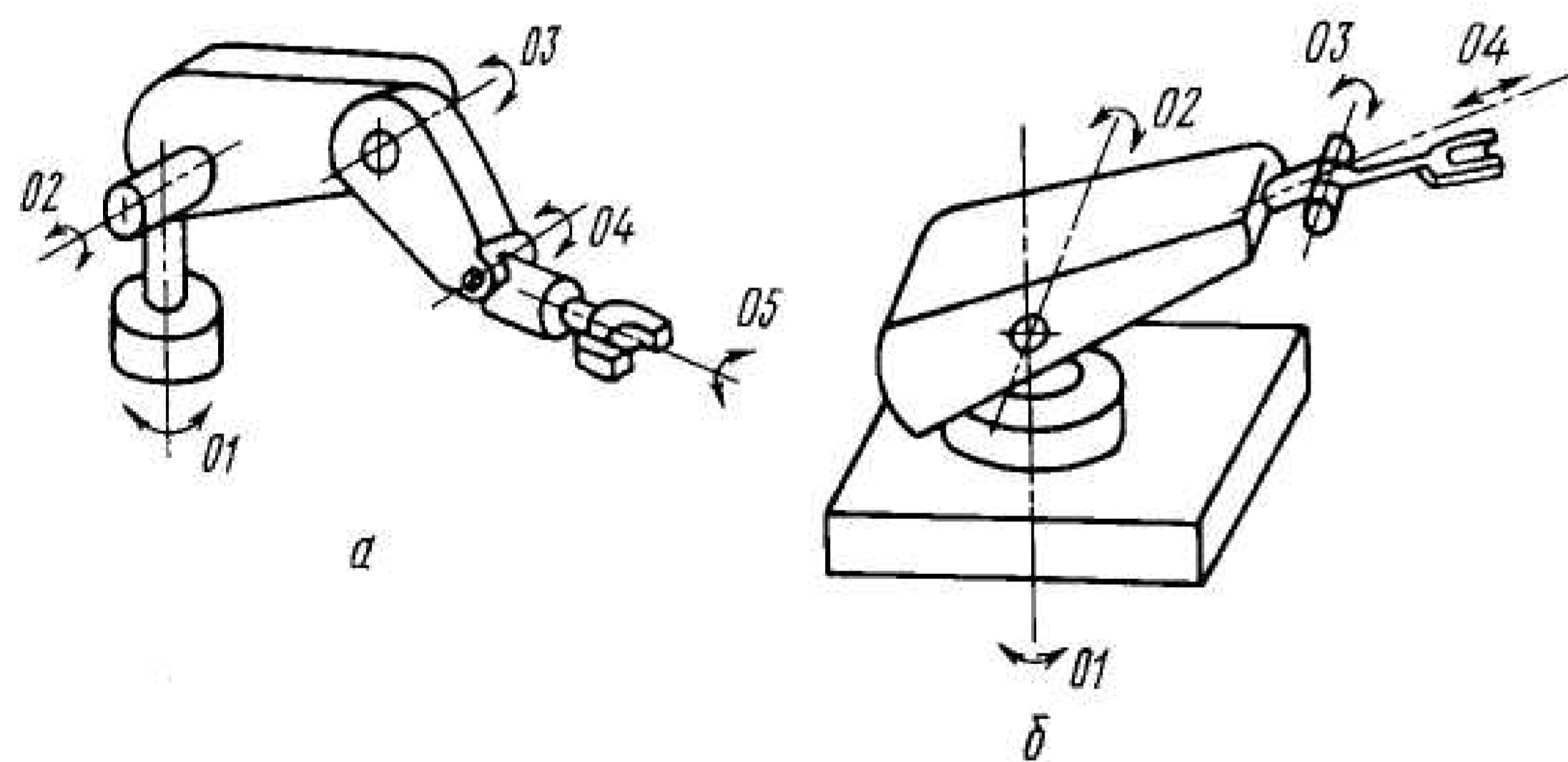


Рис. В.2. Конструкции промышленных манипуляторов: а — PUMA-560; б — UNIMATE

Число степеней подвижности кинематической цепи, называемое также ее *числом степеней подвижности*, равно

$$v = 6n + \sum_{i=1}^5 ip_i,$$

где n — число подвижных звеньев, p_i — число кинематических пар i -го класса.

Например, для манипулятора, изображенного на рис. В.3, а, кинематическая цепь имеет $v = 6 \cdot 5 - 5 \cdot 5 = 5$ степеней подвижности.

Заметим, что число степеней подвижности кинематической цепи совпадает с числом кинематических пар только в том случае, если все пары относятся к пятому классу. В последнем случае $v = 6n - 5p_5$.

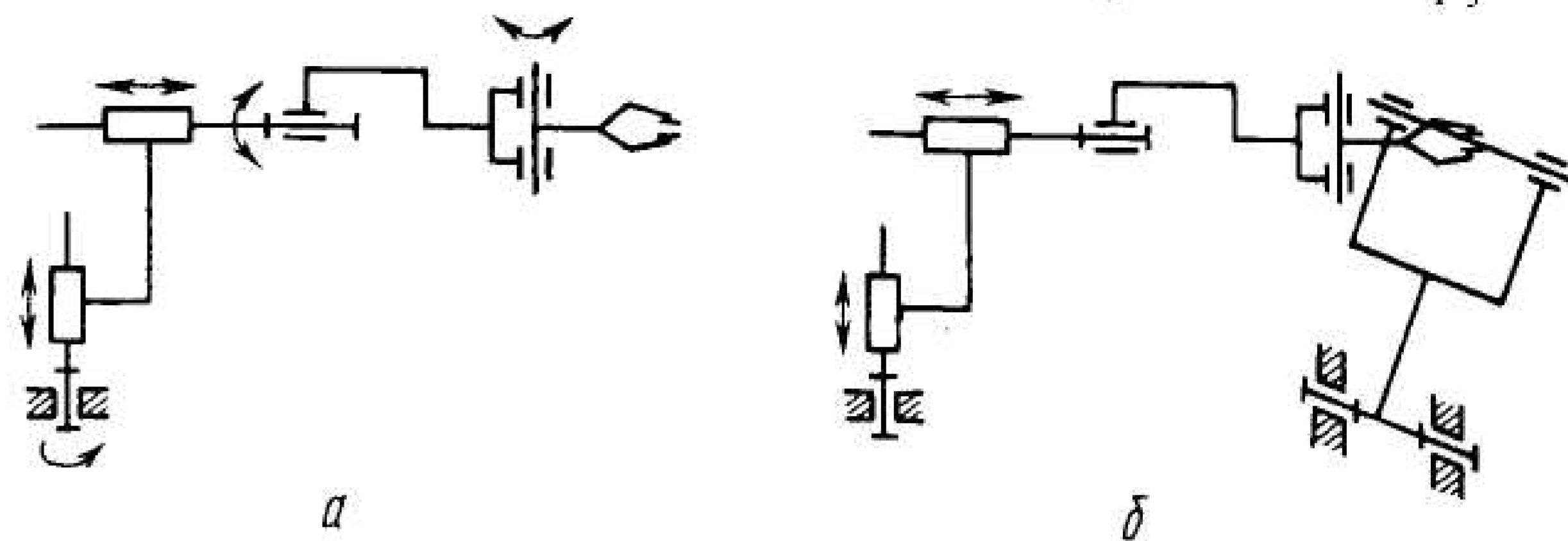


Рис. В.3. Разомкнутая (а) и замкнутая (б) кинематические цепи

Число степеней подвижности кинематической цепи — важная характеристика манипулятора, поскольку она определяет число степеней свободы схвата манипулятора. Чтобы манипулятор мог свободно перемещать и ориентировать в пространстве твердое тело, удерживаемое в схвате, он должен иметь не менее шести степеней подвижности. Причем, если $v > 6$, то говорят о *кинематической схеме с избыточностью*. Кинематические схемы с избыточностью необходимы в тех случаях, когда на перемещение предмета наложены дополнительные условия, например при перемещении тела внутри цилиндрической трубы.

При замыкании кинематической цепи число ее степеней подвижности понижается. Например, предполагая, что манипулятор удерживает рычаг без проскальзывания (рис. В.3, б), получаем $n = 6$, $p_5 = 7$, следовательно, $v = 1$.

Типовые кинематические схемы манипуляторов приведены на рис. В.4. На рис. В.4, а все звенья взаимно перпендикулярны и образуют пары поступательного движения пятого класса. В декартовой системе координат $OXYZ$, связанной с основанием робота, координаты схвата определяются перемещениями по каждой из степеней подвижности кинематической цепи. Поэтому можно сказать, что робот функционирует в *прямоугольной декартовой системе координат*. Основным достоинством такого робота является удобство управления, поскольку исключается необходимость пересчета требуемых координат объекта работы в значения перемещений в отдельных степенях подвижности. Однако конструкция такого робота имеет большие габаритные размеры, что является недостатком.

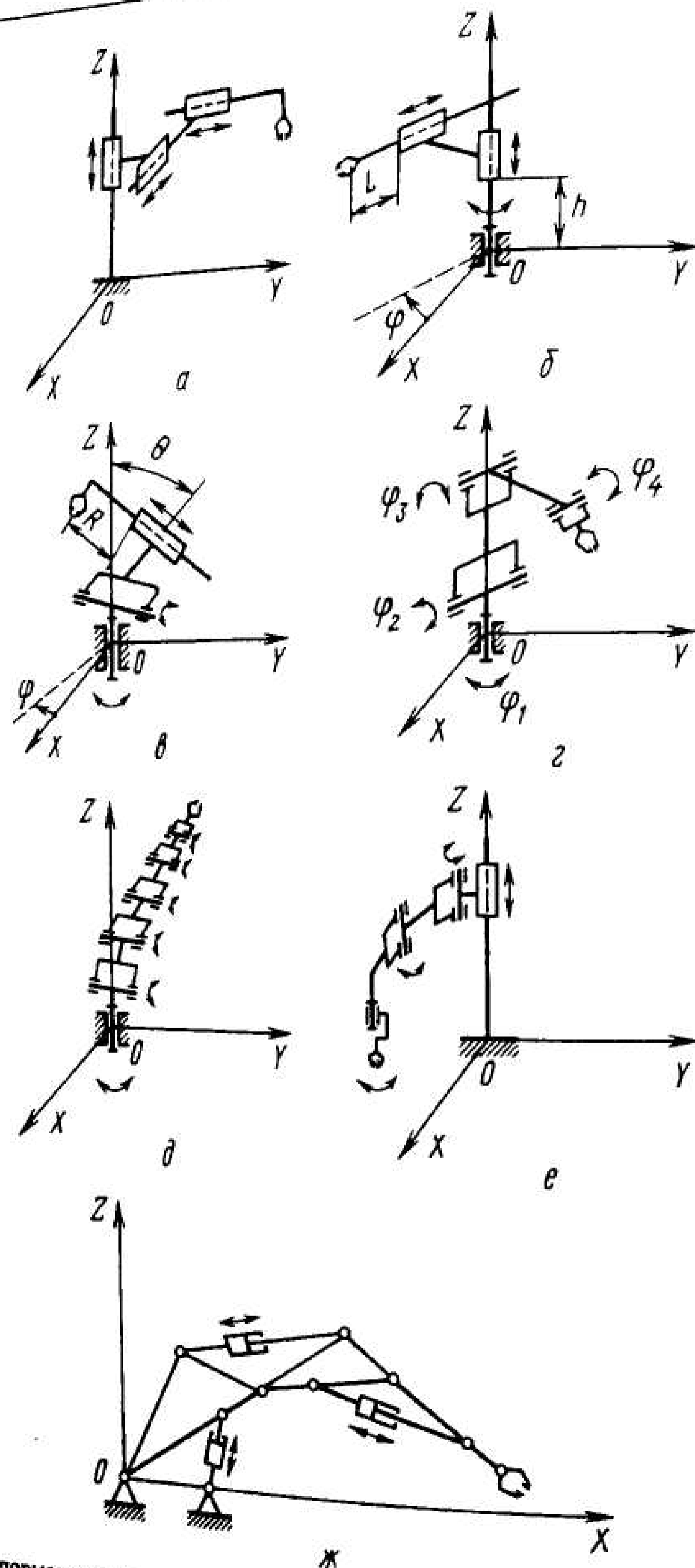


Рис. В.4. Типовые кинематические схемы манипуляторов: а — прямоугольная; б — цилиндрическая; в — сферическая; г — антропоморфная; д — с избыточностью; е — SCARA; ж — схема гидравлического манипулятора с ветвлением кинематической цепи

Один из наиболее известных промышленных роботов VERSATRAN имеет кинематическую схему, представленную на рис. В.4, б. В этой схеме две пары поступательного перемещения и одна — вращательного (все — пятого класса). Координаты схвата в данном случае можно задать тремя переменными — высотой h , длиной выдвижения L и углом поворота φ , что соответствует *цилиндрической системе координат*, в которой и работает робот рассматриваемого типа.

Не менее известная конструкция промышленного робота типа UNIMATE (см. рис. В.4, в) имеет две вращательные пары и одну поступательную (телескопическую) пару. Таким образом, координаты схвата определяются в *сферической системе координат* двумя углами φ , θ и радиусом R .

Из этих трех конструкций наименее сложной является вторая. Наибольшую гибкость в достижении различных точек рабочего пространства имеет третья схема. Недостатком второй и третьей схем по сравнению с первой является меньшая точность и необходимость применения специальных конструктивных решений для обеспечения сбалансированности конструкции.

Многозвенный манипулятор, имеющий четыре шарнирных пары, показан на рис. В.4, г. В соответствии с такой схемой построены манипуляторы промышленного робота Cincinatti Milacron, отечественных роботов типа УЭМ-5, РМ-01, ТУР. Они относятся к *манипуляторам антропоморфного типа*. Гибкость «руки» обеспечивается за счет усложнения конструкции. Задача управления при этом значительно усложняется, поскольку требуется расчет движений в каждом шарнире, обеспечивающем необходимое движение схвата.

Эта задача усложняется и для многозвенных манипуляторов с избыточностью, предназначенных для работы в пространстве с препятствиями (рис. В.4, д).

Кинематическая схема манипулятора типа SCARA приведена на рис. В.4, е. Две вращательные степени подвижности обеспечивают произвольное перемещение объекта в плоскости, а перемещение плоскости позиционирования осуществляется поступательной степенью подвижности. Такая схема, сочетающая значительную гибкость при движениях в плоскости с жесткостью конструкции в вертикальном направлении, оказалась эффективной при выполнении задач сборки и обработки плоских поверхностей.

В рассмотренных кинематических схемах все звенья манипулятора связаны между собой с помощью соединений, обеспечивающих взаимное перемещение. Двигатели, приводящие в движение звенья, можно размещать в этих соединениях или передавать соответствующие силы и моменты через механизмы передачи движений, не меняющие кинематическую схему. Однако это не всегда возможно. Схема гидравлического манипулятора, силовыми элементами которого являются гидроцилиндры, приведена на рис. В.4, ж. Эти гидроцилиндры вместе с соответствующими штоками составляют дополнительные связи в кинематической схеме, причем количество звеньев, соответствующих одной степени подвижности, становится больше двух. Такие кинематические схемы называют *схемами с ветвлением кинематической цепи*. Простота конструктивного решения схемы приводит к трудностям, связанным с расчетом управляющих сигналов для каждой степени подвижности. Далее будут рассмотрены проблемы, возникающие при математическом описании движения подобных механизмов.

Мы рассмотрели только те движения, которые обеспечивают перенос объекта в рабочем пространстве, но его необходимо еще и ориентировать. Например, при дуговой сварке электрод, удерживаемый роботом, должен быть перпендикулярен рабочей поверхности. В большинстве известных конструкций перемещение и ориентацию объекта обеспечивают различные степени подвижности манипулятора, которые подразделяют на *переносные и ориентирующие* соответственно. Наиболее характерная компоновка ориентирующих степеней подвижности показана на рис. В.5. Они обеспечивают три вращательных движения схвата — наклон, вращение и качание. Чем ближе оси этих степеней подвижности расположены одна к другой и к схвату, тем меньше возникает дополнительных поступательных движений, сопутствующих ориентирующим, тем самым задача управления сложным движением объекта упрощается. Однако очевидно, что при такой компоновке ориентирующих степеней поворот объекта относительно неподвижной оси, связанной, например, с его центром масс, обеспечивается как ориентирующими, так и переносными степенями подвижности манипулятора.

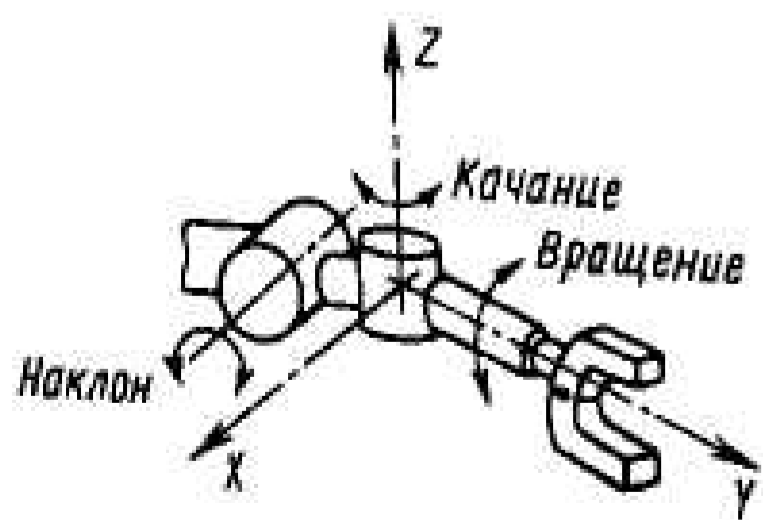


Рис. В.5. Компоновка ориентирующих степеней подвижности схвата

В ряде случаев степени подвижности не подразделяют на переносные и ориентирующие. Примером может служить схема манипулятора с избыточностью (см. рис. В.4, а), обеспечивающая как ориентацию, так и перемещение объекта. Другой характерный пример — манипуляционная конструкция, построенная по принципу платформы Стюарта (рис. В.6.)

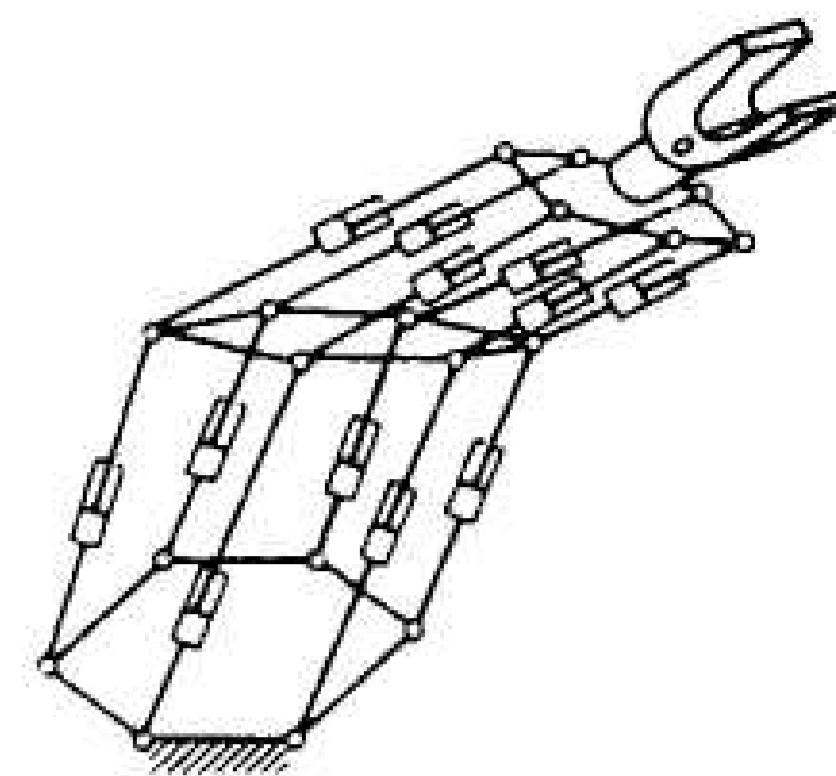


Рис. В.6. Платформа Стюарта

Еще одна степень подвижности кинематической цепи манипулятора, пока не принятая нами во внимание, — это сам схват. За исключением случаев, когда захват предмета происходит немеханическим путем (электромагнит, вакуумные «присоски» и т.п.), схват представляет собой механизм, имеющий в наиболее простом случае две губки для зажима предмета. При необходимости схват может быть трехпалым или иметь большее количество пальцев.

Схват в качестве степени подвижности манипулятора также необходимо учитывать при подсчете суммарного числа степеней подвижности. Так, для манипулятора, обеспечивающего произвольную ориентацию и перемещение объекта в рабочей зоне с учетом схвата, минимальное число степеней подвижности равно семи.

В.2.2. Привод степени подвижности

Движение в каждом сочленении манипулятора обеспечивается с помощью двигателей различного типа — электрических, гидравлических (электрогидравлических) или пневматических.

Двигатель обычно выполняют в виде модуля, включающего также механизм передачи движений (редуктор), датчики обратной связи (потенциометры, тахомашины, вращающиеся трансформаторы, цифровые датчики), сигналы с которых обрабатываются с помощью микропроцессоров или аналоговых устройств, вырабатывающих управляющие воздействия на двигатель. Система управления, образованная этими устройствами, представляет собой *привод степени подвижности манипулятора*.

Управление приводом может быть реализовано как с обратной связью, так и без нее. Характерным примером второго случая является

шаговый электродвигатель, или пневмоцилиндр. Для высокоточных манипуляторов используют электрические или гидравлические приводы с обратной связью. Привод может быть замкнут по положению (например, с помощью потенциометров), по скорости (посредством тахомашии, вращающихся трансформаторов, цифровых датчиков), а также по моменту (по силе для двигателей поступательного перемещения). Обратная связь по моменту для двигателей постоянного тока обычно осуществляется путем измерения тока якоря, а для гидродвигателей — перепада давлений. Чаще всего используют только некоторые из этих обратных связей. Существует подход, основанный на последовательном синтезе всех трех контуров обратной связи, известный как принцип подчиненного регулирования.

Наряду с приводами, используемыми в других областях техники, в робототехнике широко применяют и новые, специальные типы приводов. К ним относится, в частности, так называемый электропривод прямого управления, позволяющий непосредственно управлять силами и моментами, приложенными к нагрузке. Существуют также двигатели, построенные по принципу искусственной мышцы, длина которой изменяется в зависимости от приложенного сигнала управления.

Нередко в одной манипуляционной конструкции совмещается несколько типов приводов. Например, степени подвижности, предназначенные для перемещений, могут быть снабжены гидроприводом, а степени для малых ориентирующих перемещений — электроприводом. Схват манипулятора независимо от схемы привода основной конструкции часто оснащают пневмоприводом.

В зависимости от типа привода, используемого в степенях подвижности манипулятора, можно отнести к этому типу и весь манипулятор, т.е. говорить об электромеханическом, электрогидравлическом и других манипуляторах.

К приводам манипуляторов предъявляют высокие требования по точности, надежности, диапазону регулирования. При этом учитывают, что они работают в условиях, когда нагрузка, приведенная к валу двигателя, меняется в широком диапазоне за счет движения других звеньев манипулятора и изменения его нагрузки. В связи с этим применяют специальные конструктивные решения и способы управления роботами. Вопросы, связанные с управлением приводами роботов, будут подробно изложены в последующих главах.

В.2.3. Исполнительная система

Манипулятор можно рассматривать как систему управления, образованную приводами, работающими на общую механическую нагрузку. — манипуляционный механизм. Входом этой системы является многокомпонентный сигнал, поступающий с устройства управления роботом, а выходом — требуемое перемещение манипулятора и, соответственно, схвата с нагрузкой или рабочим инструментом. Такую систему называют *исполнительной системой манипуляционного робота*.

Способ задания управляющих сигналов на исполнительную систему определяет *тип системы управления роботом*. В наиболее простом случае программа движения для каждого привода формируется в процессе его обучения и затем повторяется нужное число раз. В этом случае говорят о *жесткопрограммируемых роботах*. Для простых роботов обычно используют приводы без обратной связи, выполненные с помощью пневмо- (или гидро-) цилиндров, а также шаговых электродвигателей. Здесь перемещение в каждом соединении манипулятора может быть задано с помощью программатора. Комбинируя команды программатора, можно приближенно задать сложную траекторию движения как совокупность точек, через которые должен пройти схват манипулятора. Такое управление называют *позиционным управлением*. Возможен более простой путь, когда движение манипулятора по каждой степени подвижности регулируется электрическими или механическими ограничителями, — *цикловое управление*. Для высокоточных манипуляторов, в которых используются приводы с обратной связью, применяют более совершенные методы управления, предполагающие аппроксимацию траектории движения схвата — инструмента в виде непрерывной пространственной кривой с последующим ее отслеживанием, — *контурное управление*. Такие способы основаны на использовании микропроцессорных управляющих устройств. В последнем случае устройство управления должно включать в себя блок выпрямителей и силовых усилителей, обеспечивающих работу привода, а также микропроцессорные контроллеры приводов манипулятора.

В.2.4. Система управления манипулятором

Система управления манипулятором, как правило, имеет несколько уровней, каждый из которых обслуживается собственной микро-

процессорной системой. Так, на уровне привода обеспечивается управление двигателем, осуществляющим движение одной или нескольких степеней подвижности.

На следующем уровне системы управления манипулятором с помощью центрального процессора организуется координированная работа приводов манипулятора. При этом входной информацией является траектория, т.е. последовательность положений схвата манипулятора или связанного с ним объекта (инструмента, нагрузки). Если эта информация преобразуется в управляющие сигналы приводов предварительно и затем записывается в память управляющего устройства в виде программы работы приводов, то говорят о *системе программного управления*.

Траекторию схвата можно задать двумя способами: путем непосредственного ее задания человеком-оператором в процессе обучения или с помощью планирования движения на более высоком уровне управления, в том числе с использованием методов искусственного интеллекта. Существуют методы обучения в процессе функционирования робота (on-line по англоязычной классификации) и вне его (off-line). Примером первого случая является окрасочный робот, обучаемый с помощью «пилота» — второго манипулятора, имеющего такую же кинематическую схему, но облегченного и лишено двигателя, которые заменены системой статической разгрузки. Во втором случае движение робота моделируется на экране дисплея в трехмерном пространстве с учетом имеющихся ограничений в рабочей зоне. Оператор задает требуемое движение на экране, после чего оно записывается в память управляющего устройства и используется для расчета программы для каждого из приводов.

На уровне планирования движений предполагаются известными цель движения и описание рабочей сцены. Устройство управления, решающее задачи этого уровня, должно спланировать движение таким образом, чтобы из заданного начального положения обеспечить достижение цели манипулятором и выполнить дополнительные условия, налагаемые на его перемещение. Например, чтобы манипулятор не вошел в соприкосновение ни с одним из препятствий, имеющихся на рабочей сцене. Эта задача является довольно сложной, если таких препятствий много, или сложен сам объект работы, в частности, если он имеет внутренние полости, до которых должен добраться удерживаемый схватом инструмент.

В *системах управления в реальном времени* траекторию (в общем случае — перемещение и текущую ориентацию схвата) задают в процессе выполнения операции. Если это делает человек-оператор, то такую систему называют *полуавтоматической*; человек задает только движение схвата, не заботясь о движении каждого из приводов манипулятора, закон управления для которого рассчитывает управляющее устройство. Полуавтоматические системы широко применяют при управлении роботами в экстремальных условиях, когда человек находится на расстоянии и задает сигналы управления либо наблюдая процесс непосредственно, либо с помощью телевизионного монитора. Полуавтоматические системы можно использовать и для обучения промышленных роботов в режиме on-line. Например, перед дуговой сваркой электрод проводят (без включения дуги) вдоль сварного шва. Полученную информацию используют в системе программного управления сварочным роботом.

Во многих случаях движение робота нельзя полностью запрограммировать заранее. Примером может служить операция сборки. При неточной подаче деталей операция, осуществляемая по жесткой программе, не будет выполнена. Кроме того, детали могут быть бракованными или неточно установленными на сборочном столе. Определить, в каком месте фактически находится деталь и выполнены ли необходимые для сборки условия, можно с помощью *системы технического зрения*. Под этим понятием подразумевают совокупность датчиков визуальной информации (телекамеры, фотоматрицы и средства обработки сигналов этих датчиков). В свою очередь средства обработки сигналов подразделяют на аппаратные (схемы обработки сигналов с помощью электронной аппаратуры) и программные (алгоритмы обработки). К задачам обработки сигналов относятся, например, выделение контура предмета, анализ связности последнего, вычисление центра масс, распознавание предмета по характерным признакам. Сигналы системы технического зрения используют для коррекции траектории движения робота либо для ее вычисления. Таким образом, возникает еще один контур управления, внешний по отношению к манипулятору. Этот контур системы управления роботом обеспечивает приспособление робота к изменяющимся условиям работы. Такую систему управления можно отнести к *уровню адаптивного управления*.

Использование системы технического зрения не всегда достаточно для решения манипуляционных задач, в том числе задач сборки. Так,

при сопряжении деталей возникают силы, которые могут превысить заданные значения и деформировать эти детали, или при определенных условиях привести к их заклиниванию. Чтобы избежать этого, необходимо в процессе сборки измерять силы и моменты, действующие со стороны объектов сборки на манипулятор, и соответственно формировать управляющие сигналы, поступающие на манипулятор, который обеспечивает выполнение сборочной операции. Эту задачу можно решить с помощью *системы силомоментного оцувствления*, включающей в себя многомерные датчики сил и моментов (обычно с использованием тензометрических элементов) и аппаратно-программный комплекс для обработки сигналов с этих датчиков. Система силомоментного оцувствления также придает адаптивные свойства системе управления роботом, поскольку и в этом случае возникает внешний контур управления манипулятором в процессе сборки. Силомоментное оцувствление необходимо и во многих других случаях при использовании роботов для выполнения технологических операций. Например, при фрезеровании поверхности необходимо с большой точностью обеспечивать силу прижима инструмента к поверхности и силу резания в касательной плоскости.

Среди других типов адаптивных систем управления роботами назовем *системы, оснащенные ультразвуковым локатором*, который используется для сканирования сцены и получения ее рельефа, а также для организации самонаведения схвата манипулятора на выбранный предмет. Важную роль при выполнении сварки по контуру играют *лазерные дальномеры*, позволяющие точно контролировать взаимное положение электрода и свариваемого шва.

Каждая из систем адаптивного управления роботом может работать автономно, например, могут быть роботы, оснащенные только системой технического зрения, или роботы с силомоментным оцувствлением. Однако усложнение робототехнических задач и повышение требований к качеству их выполнения и надежности робототехнической системы приводит к необходимости одновременного использования различных сенсорных систем. Так, в схвате манипуляторов применяют *датчики оптического типа* для определения взаимного положения объекта и губок схвата, а также датчики проскальзывания захваченного объекта. При сборке, монтажных работах одновременно используют *датчики силомоментного оцувствления* и технического зрения. При дуговой сварке — щупы, оснащенные тензометрическими

датчиками, или лазерные дальномеры. Поэтому проблема создания адаптивных систем состоит не только в том, чтобы построить и реализовать алгоритмы адаптивного управления, но и в том, чтобы сопоставить сигналы датчиков различного типа, получить интегральное «представление» об изменениях на рабочей сцене, которое и служит основой для коррекции движения.

Решение задач анализа сцены и формирования модели внешнего мира выводит нас на еще более высокий уровень систем управления манипуляционными роботами: уровень *интеллектуальных систем реального времени*, на котором предполагается решение в реальном масштабе времени задач, относящихся к задачам искусственного интеллекта. Кроме задачи формирования модели внешнего мира к ним относятся задачи обработки изображения и распознавания образов, планирования действий с учетом поставленной задачи, особенностей рабочей сцены и собственных возможностей робота. В частности, планирование сложных технологических операций, выполняемых роботом, например таких, как процесс сборки объекта, состоящего из нескольких деталей. Уровень, при котором задача считается относящейся к области искусственного интеллекта, постоянно повышается в процессе развития техники. Поэтому трудно провести четкую грань между адаптивными и интеллектуальными робототехническими системами.

В системе управления манипулятором могут быть реализованы специальные алгоритмы управления, целесообразность которых определяется назначением системы. Так, получили развитие *самонастраивающиеся системы управления* позволяющие обеспечить заданное качество процессов управления независимо от переменной нагрузки манипулятора, что особенно важно для большей грузоподъемности манипуляторов, при движении которых сказывается взаимное динамическое влияние звеньев. Для организации самонастройки можно использовать сигналы датчиков внутренней информации, однако можно применять и датчики внешней информации. Например, для организации самонастройки манипулятора при переменной массе полезной нагрузки в запястье манипулятора устанавливаются датчик сил.

Динамику движения манипулятора учитывают и в ряде других подходов к управлению манипуляторами, в том числе основанных на решении обратной задачи динамики, т.е. на вычислении сил и моментов, необходимых для выполнения заданного движения с нужными характеристиками. Иногда все подобные подходы объединяют понятием «*динамическое управление*» (см. далее гл. 8).

В.3. Задачи управления робототехническими комплексами

В условиях современного производства роботы, как правило, включены в единую робототехнологическую систему, содержащую помимо роботов автоматизированное технологическое оборудование. Например, роботы, показанные на рис. В.7, составляют *робототехнологический комплекс* (РТК) сборки, включающий также поворотный стол и конвейер. В состав РТК могут входить станки, робокары, автоматизированный инструмент, другое технологическое оборудование. Эти устройства, имея свои средства управления, включают информационные датчики. Все они должны быть увязаны в единую систему управления РТК вместе с системой управления роботов. Технически это осуществляется с помощью специального управляющего устройства, преобразующего сигналы информации о состоянии системы в сигналы управления. В качестве такого устройства (контроллера) может быть использована и универсальная ПЭВМ, позволяющая оперативно осуществлять переналадку комплекса под заданный технологический процесс.

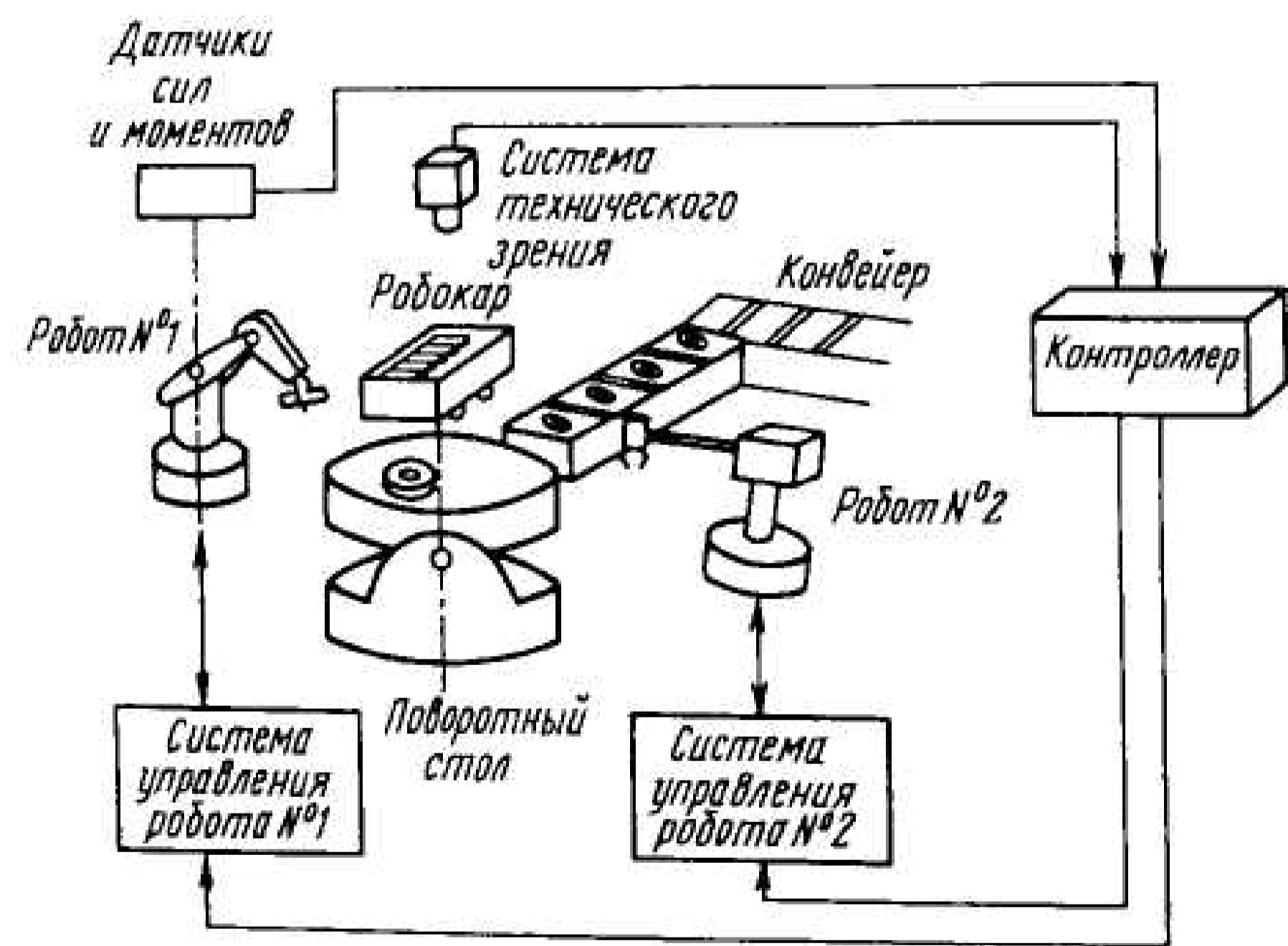


Рис. В.7. РТК сборки

Задача управления РТК несомненно более специфична по сравнению с задачей управления роботом. Прежде всего, для ее решения используют другие математические модели, относящиеся к области дискретной математики. При этом описывают дискретное множество возможных состояний, в которых могут находиться элементы системы, а

также условия перехода между этими состояниями. Таким образом, элементы РТК моделируют как конечные автоматы. Не являются исключением и роботы. Их состояния — это положения, определяемые технологией операции на различных стадиях ее выполнения, например в моменты захвата детали, начала сборки и окончания сборки. Дискретный характер могут иметь и сигналы информационных датчиков: наличие или отсутствие детали в схвате, правильность ее положения и ориентации. Совокупность дискретных состояний системы и переходов между ними можно представить как сеть конечных автоматов, которая соответствует математическому описанию роботизированной технологической операции в РТК. Поскольку эта сеть обычно имеет большое количество элементов, решение задачи о планировании или о коррекции операции «вручную» практически невозможно. Задача заключается в применении методов автоматического планирования операций на таких сетях.

Систему РТК можно рассматривать как подсистему *гибкой производственной системы* (ГПС), представляющей собой технологический участок или технологическую линию, включающую в себя РТК. В такую линию может входить и другое технологическое оборудование — обрабатывающие центры, станки, устройства технологического контроля. В свою очередь ГПС могут составить базу для автоматизированного производства, включающего также автоматизированные склады заготовок, инструмента и готовой продукции, средства доставки, обслуживания, ремонта и т.д. Задачи управления производством, однако, имеют свою специфику и методологию. Поэтому здесь они не рассматриваются.

Поскольку вопросы дискретной математики не всегда включают в общепромышленные программы, далее в гл. 9 будут даны основные сведения из теории конечных автоматов и сетей Петри, которые используются для построения системы управления гибким роботизированным модулем.

Итак, мы определили ряд задач управления в робототехнических системах. Связь между ними осуществляют по иерархическому принципу построения робототехнических систем, заключающемуся в том, что каждая из систем является подсистемой для системы более высокого уровня. Каждый уровень управления соответствует определенному типу системы: 1 — автоматизированное производство; 2 — гибкая производственная система; 3 — робототехнологический комплекс; 4 — адаптивная робототехническая система; 5 — система управления промышлен-

ным роботом (ПР); 6 — исполнительная система ПР; 7 — приводы ПР. Из этих уровней три — четвертый, пятый и шестой — и будут основным предметом рассмотрения в этой книге.

В.4. Взаимодействие робота с человеком-оператором

На всех без исключения уровнях управления происходит взаимодействие робота с человеком-оператором. Однако цели и формы этого взаимодействия различны. Манипуляционные системы можно разбить на две большие группы. К первой относятся системы, которые после обучения определенное время работают автономно, т.е. без участия оператора. Таковы практически все промышленные робототехнические системы, задача которых состоит в повышении качества производства и его производительности за счет автоматизации труда рабочего. Их называют *автономными робототехническими системами*.

На исполнительном уровне оператор выполняет функции предварительного обучения робота движению либо функции управления схватом в реальном времени (в полуавтоматических системах).

На уровне адаптивной системы управления работа оператора заканчивается до начала функционирования системы. Оператор должен предусмотреть возможные варианты изменения условий работы, установить соответствующие датчики и составить алгоритмы адаптации, которые позволяют работать системе автоматически в рамках принятых допущений. В процессе выполнения технологических операций оператор ограничивается лишь заданием целей операции класса объектов манипулирования и контролем за работой системы.

Во вторую группу входят системы, в которых допускается непосредственное участие человека в управлении роботом. Как правило, такие системы могут работать и автономно, однако управление может быть передано оператору в тех случаях, когда не определены условия работы, необходима текущая коррекция движений, сопровождаемая анализом ситуации, и, наконец, когда требуется профессиональный и жизненный опыт человека. Такие системы называют *эргатическими (человеко-машинными) манипуляционными системами*. К их числу относятся системы дистанционного управления для выполнения работ в экстремальных условиях, в том числе в условиях повышенной радиации, открытом космосе, под водой. Подобные системы используют не только в силу сложности ситуации, но и по экономическим соображе-

ниям, поскольку применение интеллектуальных систем для автоматизации технологических процессов часто является слишком дорогостоящим. Дистанционно управляемые оператором системы применяют в горнодобывающей промышленности, при выполнении строительных и отделочных работ, в лесодобывающей промышленности. Системы копирующего управления и полуавтоматические системы применяют и для промышленных роботов в режиме обучения. Для эргатических систем, управляемых оператором в рабочем режиме, предусматриваются специальные устройства и подсистемы, облегчающие взаимодействие с оператором. Это эргономичные (удобные для человека, соответствующие его психофизиологическим характеристикам) многостепенные рукоятки управления, пульта управления, позволяющие оператору легко получить необходимую информацию о движении и других характеристиках робота. В эргатических системах информация с соответствующих датчиков поступает не только в устройство управления, но и на пульт оператора, который имеет возможность наблюдать происходящее на рабочей сцене, на экране монитора или графического дисплея.

Поскольку возможности зрительного канала у человека ограничены, в полуавтоматических и копирующих системах предусматриваются и возможности силомоментного осязания. Для этого в шарнирах управляющего устройства (копирующего типа или многостепенной рукоятки) устанавливают микродвигатели, развивающие силы и моменты, воспринимаемые рукой человека. Формируя их в зависимости от сил и моментов, реально действующих на манипулятор в рабочей зоне, можно создать эффект присутствия у оператора и существенно повысить эффективность его работы. Полуавтоматические и копирующие системы с отображением оператору в сенсорной форме информации о силах и моментах называют *системами двустороннего действия*.

Значительно расширяются возможности оператора при работе с интеллектуальными робототехническими системами. Оператор может использовать свой собственный опыт и опыт других операторов-экспертов при предварительном планировании действий робота, используя программно-аппаратное обеспечение последнего. Эксперты могут быть привлечены также к решению задачи описания внешнего мира в случае неопределенности, а также к задачам распознавания образов. В этом случае можно говорить об *экспертной системе интеллектуальных роботов*.

Оператор может принять и непосредственное участие в управлении роботом. Используя возможности интеллектуальной системы управления, он может задавать текущие цели, воспринимать сообщения адаптивной системы управления манипулятором и корректировать в зависимости от них собственные действия для достижения конечной цели управления. В свою очередь, интеллектуальная система анализирует действия оператора и предотвращает ошибки, обусловленные «человеческим фактором». Такую систему принято называть *интерактивной робототехнической системой*.

Уровень управления РТК также относится в силу применяемых методов к интеллектуальным системам. Роботы на этом уровне выполняют функции автоматов с конечным числом состояний, действия которых зависят не только от заданной программы, но и, благодаря системе адаптации, от текущей ситуации в рабочем пространстве. Роль эксперта, знания которого используются при выборе наиболее целесообразного алгоритма функционирования РТК в условиях реального производства, переходит к технологу, ответственному за выполнение комплекса технологических операций.

Эффективность интеллектуальных систем существенно зависит от аппаратных и программных средств, используемых для организации взаимодействия человека и робота, которые образуют *человеко-машинный интерфейс робототехнической системы*. Его аппаратная часть должна позволять оператору использовать речевые команды, воспринимать не только визуальную, но и звуковую и сенсорную информацию. Программные средства должны обеспечивать возможность общения с роботом, в том числе с помощью пространственно-временных отношений, естественных для человека (дальше, ближе, находиться под или над, быстрее или медленнее и т.п.). При этом работа человека с интеллектуальными системами по сравнению с полуавтоматическими облегчается не только за счет усложнения системы, но и за счет упрощения процедуры обучения робота.

Проблема взаимодействия человека и робота сохранится и в перспективе, поскольку человек будет вынужден управлять роботом или его моделью, во всяком случае, на этапе обучения. Однако уровень, на котором происходит такое взаимодействие, будет постоянно повышаться за счет усовершенствования человеко-машинного интерфейса робототехнической системы, учитывающего не только возможности технической части, но и возможности человека-оператора.

1. ОСНОВНЫЕ КИНЕМАТИЧЕСКИЕ СООТНОШЕНИЯ

В первых четырех главах книги рассмотрены кинематические соотношения, описывающие манипуляционный механизм, а также способы управления, основанные на их использовании. Как известно, кинематика — это раздел механики, в котором изучается движение тел без учета сил и моментов, вызывающих это движение. Манипулятор при этом описывается как кинематическая цепь, т.е. как совокупность последовательно соединенных тел, образующих кинематические пары.

Глава 1 посвящена описанию положения манипулятора, определению связанных с ним систем координат, а также установлению связи между положением звеньев и положением конечного элемента кинематической цепи — схвата манипулятора.

1.1. Манипулятор как механическая система

Манипулятором называют разомкнутую механическую систему (цепь), состоящую из твердых тел, которые последовательно соединены между собой при помощи шарниров и образуют кинематические пары пятого класса. Каждое из составляющих манипулятор твердых тел называют *звеном*. Такая цепь имеет два конца, один из которых называют основанием, а другой — схватом (рис. 1.1). Звенья и сочленения нумеруют от основания (ему присваивают нулевой номер) к схвату.

Сделаем несколько замечаний относительно приведенного определения манипулятора.

1. В данной книге будем рассматривать только разомкнутые механические системы, исключая таким образом замкнутые системы типа велосипедных цепей (рис. 1.2). Это вызвано тем, что манипулятор

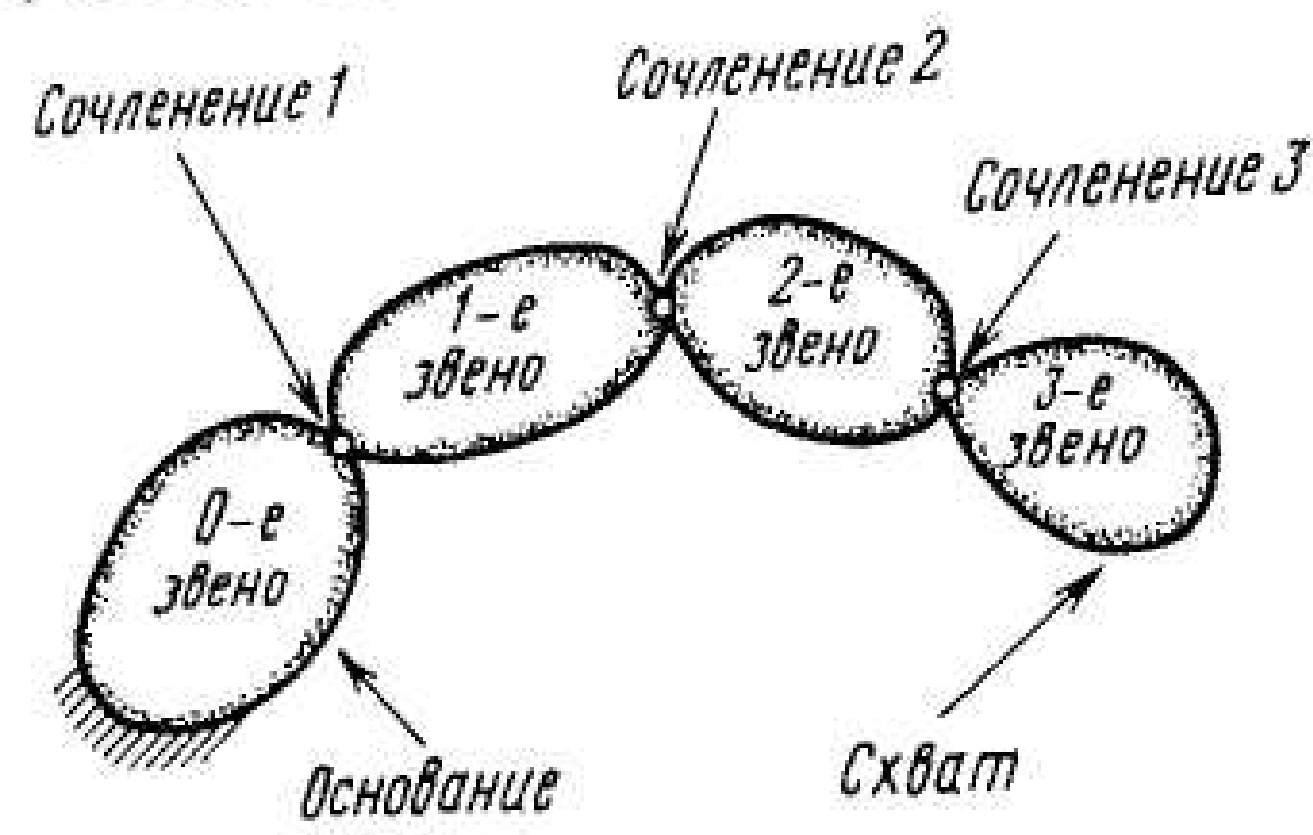


Рис. 1.1. Простая разомкнутая кинематическая цепь

должен иметь свободный конец (схват), предназначенный для проведения различных технологических операций (манипулирование с объектами внешней среды). Следует, правда, заметить, что могут возникнуть такие ситуации, когда манипулятор вместе с объектом манипулирования образуют замкнутую кинематическую цепь, например во

время открывания манипулятором двери в комнату, к полу которой он прикреплен. В этом случае анализ подобных операций существенно усложняется (это касается в основном динамического анализа).

2. В основном будем исследовать манипуляторы с последовательно соединенными звеньями, несмотря на то, что существуют механические системы с гораздо более сложной топологией. Среди манипуляторов можно выделить, например, механизмы с подвижными противовесами, наличие которых приводит к тому, что кинематическая схема становится ветвящейся (рис. 1.3).

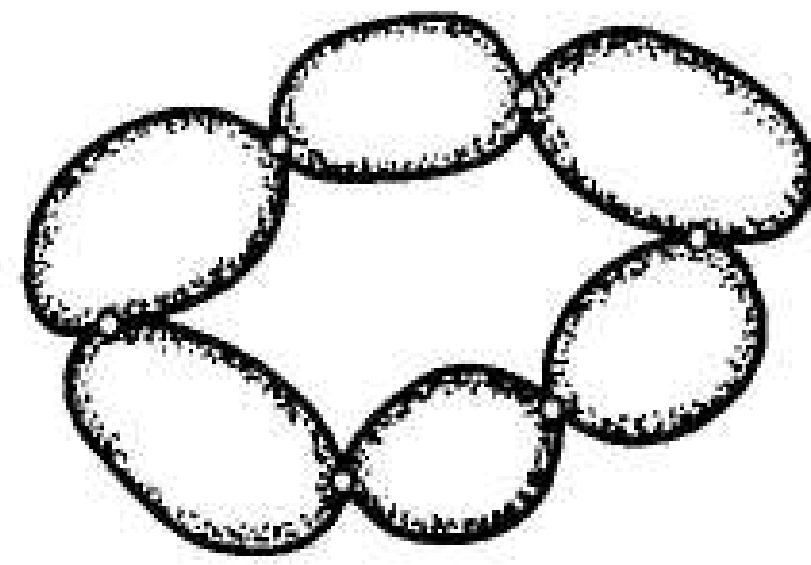


Рис. 1.2. Замкнутая кинематическая цепь

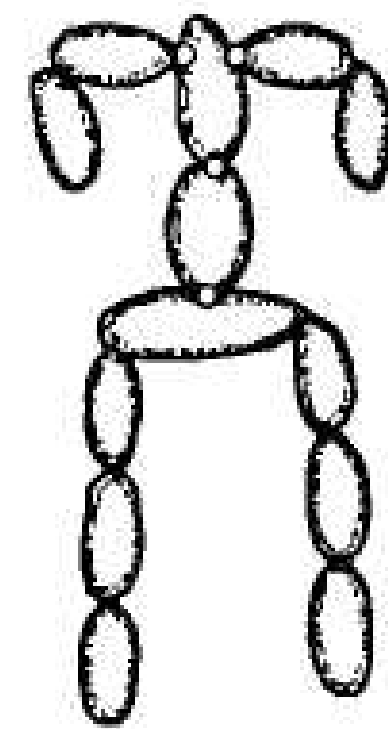


Рис. 1.3. Ветвящаяся кинематическая цепь

3. Чтобы сохранить общепринятую в робототехнике терминологию, будем нумеровать звенья манипулятора, начиная с нуля. В частности, манипулятор называют трехзвенным, если он имеет три подвижных звена после закрепления его, например, на полу. В действительности же у него четыре звена, одно из которых (нулевое) является основанием и служит для закрепления манипулятора. Это

основание чаще всего неподвижно (например, для промышленных роботов), но его можно рассматривать и как подвижное (например, если манипулятор кренится к космическому либо к подводному кораблю, т.е. в тех случаях, когда силы и моменты, действующие на основание, столь велики, что манипулятор будет перемещаться относительно некоторой инерциальной системы координат).

4. Согласно определению, звенья манипулятора представляют собой твердые тела, однако во многих приложениях это условие не выполняется. Например, существуют задачи, в которых соотношения между жесткостью звена и силовыми факторами, действующими на него, таковы, что звено следует рассматривать как гибкое. Однако эти задачи выходят за рамки книги.

Обсудим теперь вопрос, связанный со способом соединения звеньев. В соответствии с определением звенья манипулятора образуют *кинематические пары* пятого класса. Известно, что свободное твердое тело имеет шесть степеней свободы, т.е. его положение можно задать шестью независимыми параметрами u_1, u_2, \dots, u_6 (в данном случае не учитывается геометрическая интерпретация этих параметров). Принадлежность к пятому классу означает, что на относительное движение звеньев, составляющих кинематическую пару, накладывается пять независимых условий, которые можно представить в виде

$$r_i(u_1, \dots, u_6) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, 5.$$

Тогда число независимых параметров, определяющих относительное положение звеньев, становится равным 1 ($6 - 5 = 1$). Существует два вида сочленений, оставляющих звеньям одну степень свободы в относительном движении, — это вращательные и поступательные (телескопические) шарниры (рис. 1.4, а, б). Таким образом, естественно задать положение одного звена относительно другого углом относительного поворота для вращательного сочленения и относительным смещением для телескопического сочленения. Ясно, что набор этих параметров, с одной стороны, однозначно определяет конфигурацию манипулятора, а с другой — является минимальным и независимым, а следовательно, его элементы можно отождествлять с обобщенными координатами. Таким образом, для N -степенного манипулятора с кинематическими парами пятого класса вектором *обобщенных координат* q называют вектор

$$q = (q_1, q_2, \dots, q_N)^T,$$

каждая компонента q_i , которого является обобщенной координатой и представляет собой либо угол поворота, либо перемещение i -го звена относительно $(i-1)$ -го звена (напомним, что нулевым звеном является основание). Это определение, несмотря на то, что оно не конструктивно, поскольку не позволяет построить обобщенные координаты для данного манипулятора, является важным.

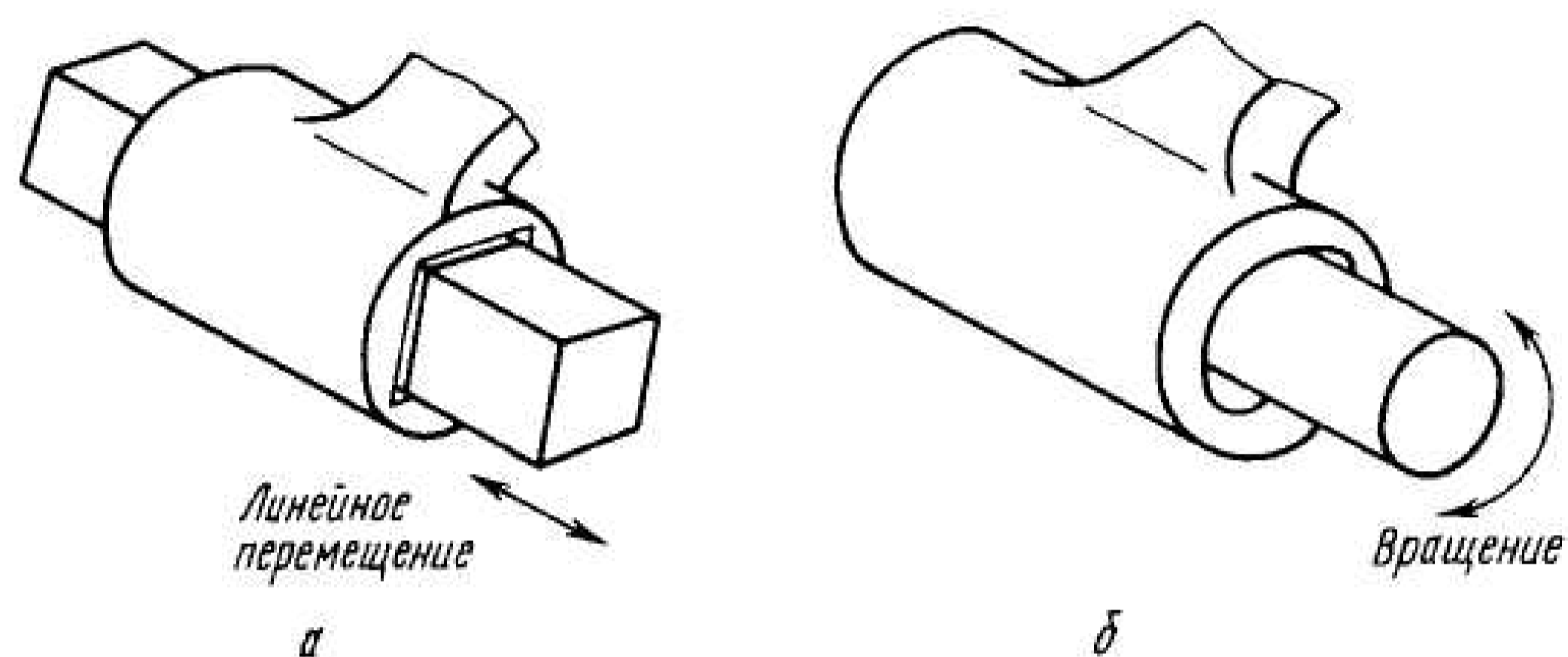


Рис. 1.4. Основные типы сочленений: а — телескопический шарнир; б — вращательный шарнир

Пример 1.1. Рассмотрим манипулятор, разработанный в Стэнфордском университете (рис. 1.5). Манипулятор имеет семь звеньев и шесть степеней подвижности. В качестве вектора обобщенных координат выбираем следующий:

$$q = (q_1, q_2, d_3, q_4, q_5, q_6),$$

где q_1, q_2, q_4, q_5, q_6 — углы относительного поворота звеньев, а d_3 — относительное смещение.

1.2. Преобразование координат

Преобразование координат является, пожалуй, одной из основных проблем, возникающих при кинематическом анализе манипулятора [45]. Как будет перемещаться схват манипулятора, если его звенья движутся в соответствии с некоторым законом, каковы должны быть скорости звеньев, чтобы обеспечить заданную скорость схвата, — эти и другие аналогичные вопросы часто возникают при разработке систем управления роботом. Ясно, что они связаны с преобразованием координат.

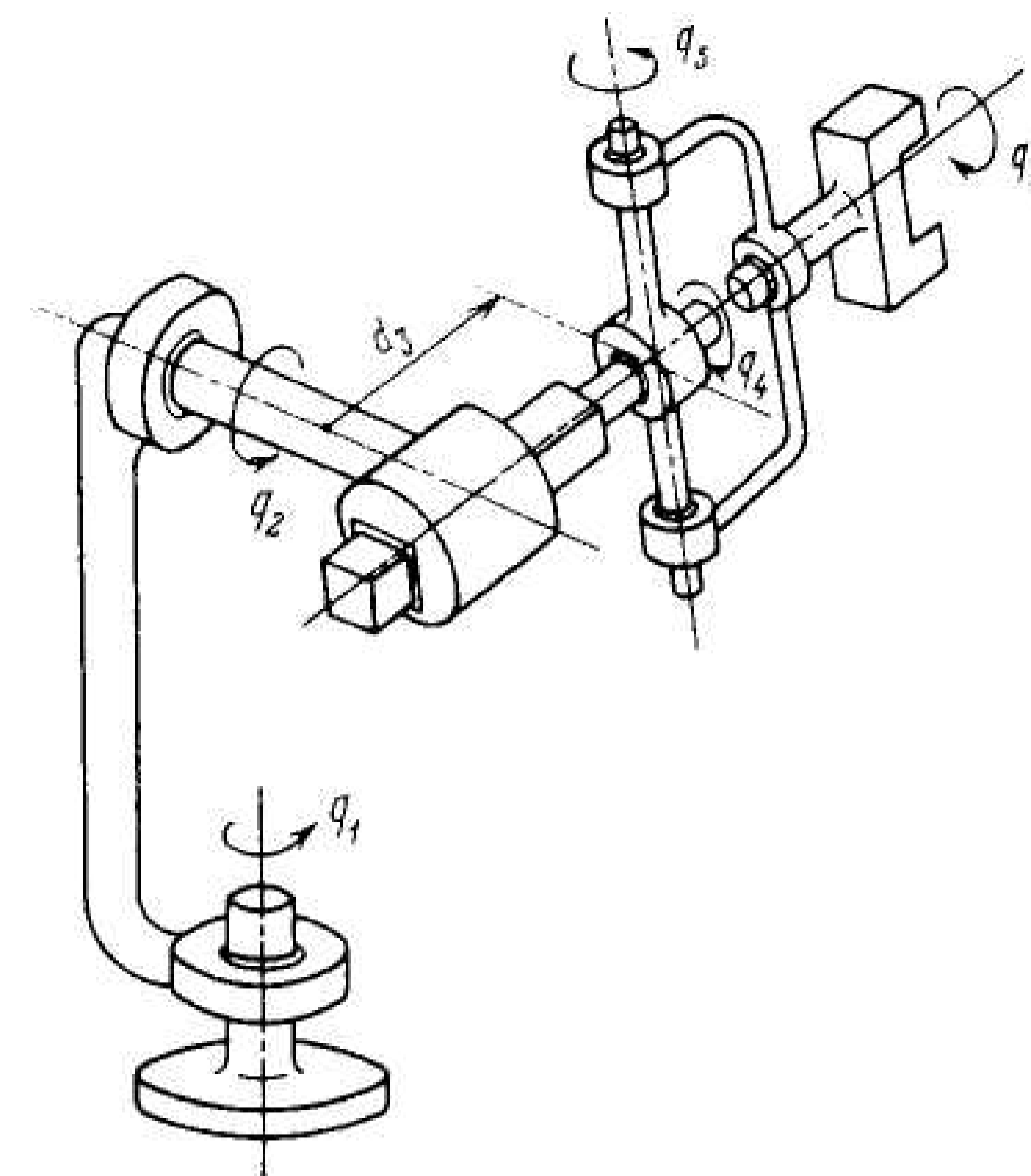


Рис. 1.5. Стэнфордский манипулятор

1.2.1. Преобразования вращения и переноса

Пусть имеются две системы координат: O_1XYZ и O_2UVW (рис. 1.6). Здесь и далее будем считать, что система координат ортогональная и правосторонняя. Зададим в пространстве точку M , проведем в нее два вектора r и ρ . Предположим, что координаты точки M в системе координат O_2UVW (т.е. координаты вектора ρ) известны:

$$\rho = (u, v, w)^T. \quad (1.1)$$

Определим координаты точки M в системе координат O_1XYZ (т.е. координаты вектора r):

$$r = (x, y, z)^T. \quad (1.2)$$

Для вычисления координат искомого вектора выполним следующие операции над вектором ρ :

$$r = R\rho + p, \quad (1.3)$$

где R — матрица 3×3 , а p — вектор 3×1 .

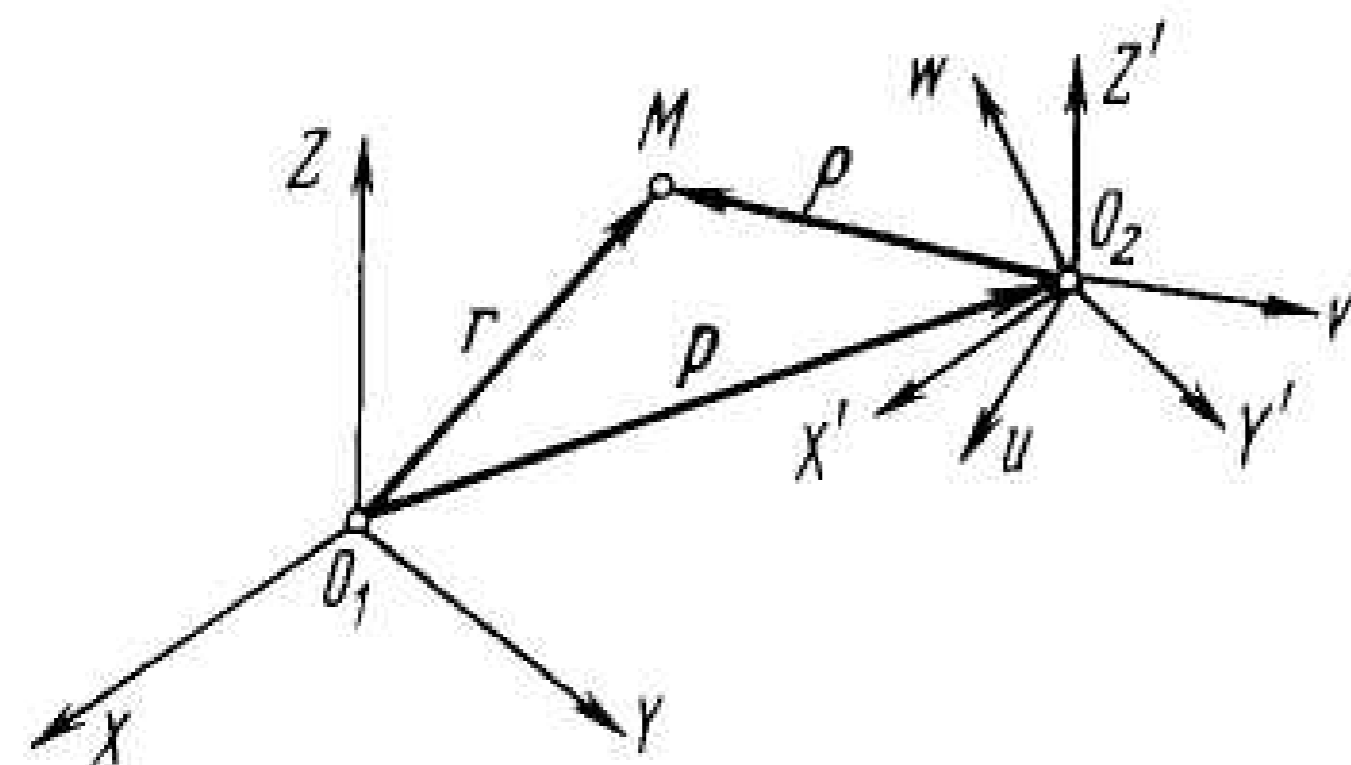


Рис. 1.6. К определению координат точки M в системе координат O_1XYZ , если ее координаты заданы в системе координат O_2UVW

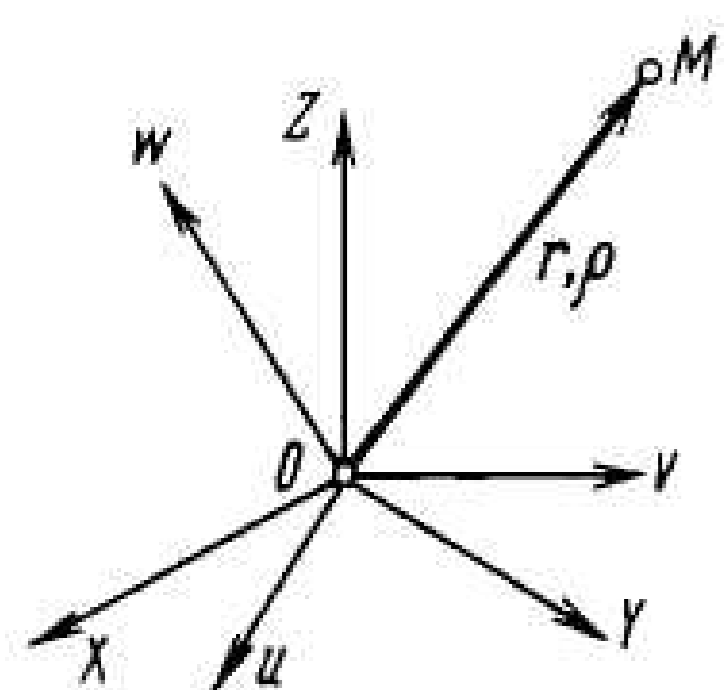


Рис. 1.7. Определение координат точки M в системах координат с общим началом

Матрицу R называют *матрицей поворота*, а вектор ρ — *вектором переноса*. Формула (1.3) является очевидной, если заметить, что компоненты вектора $R\rho$ представляют собой координаты той же точки M в системе $O_2X'Y'Z'$, оси которой параллельны соответствующим осям системы O_1XYZ , а координаты начала системы $O_2X'Y'Z'$ заданы в системе O_1XYZ вектором ρ .

Рассмотрим подробно структуру матрицы поворота R . Пусть начала введенных систем координат совпадают (рис. 1.7), тогда имеем

$$r = R\rho. \quad (1.4)$$

Вообще говоря, любая матрица R преобразует вектор ρ в вектор r , заданный в той же системе координат. Эту матрицу называют матрицей линейного преобразования. Рассмотрим только такие линейные преобразования, в результате которых все векторы r получены путем вращения вектора ρ вокруг некоторой оси на некоторый угол φ (рис. 1.8); это эквивалентно повороту системы координат $OUVW$ совместно с точкой M , которую определяет вектор ρ . Такие линейные преобразования называют *ортогональными преобразованиями*, а

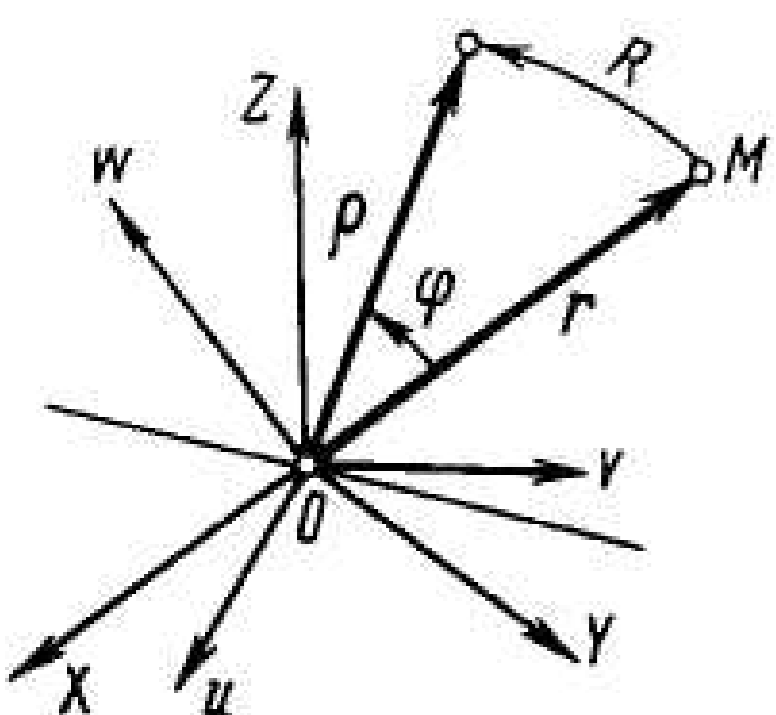


Рис. 1.8. Ортогональное преобразование

соответствующие матрицы R — матрицами ортогональных преобразований, или *ортогональными матрицами*.

Если R — ортогональная матрица, то для нее верно следующее соотношение:

$$R^{-1}R = RR^{-1} = E, \quad (1.5)$$

где E — единичная матрица.

Из формулы (1.5) следуют два свойства матриц поворота:

$$R^{-1} = R^T, \quad (1.6)$$

т.е. обратная матрица совпадает с транспонированной, и

$$(\det R)^2 = 1$$

или (для правосторонней системы координат)

$$\det R = 1. \quad (1.7)$$

Столбцы матрицы поворота обозначим u_i , т.е.

$$R = (u_1, u_2, u_3).$$

Принимая в выражении (1.4) в качестве ρ последовательно орты системы координат $OUVW$, т.е.

$$\rho_1 = (1, 0, 0)^T, \quad \rho_2 = (0, 1, 0)^T, \quad \rho_3 = (0, 0, 1)^T,$$

получаем, что векторы r_1, r_2, r_3 , являющиеся образами ρ_1, ρ_2, ρ_3 :

$$r_i = R\rho_i,$$

совпадают с векторами u_i . Отсюда вытекают следующие два вывода.

1. Элементы каждого столбца матрицы поворота представляют собой компоненты проекции каждого орта системы $OUVW$ на оси системы $OXYZ$.

2. Элементы каждой строки матрицы поворота представляют собой компоненты проекции каждого орта системы $OXYZ$ на оси системы $OUVW$.

Последнее утверждение становится очевидным, если принять во внимание выражение (1.6).

Пример 1.2. Найти матрицу поворота, если система $OUVW$ получена из системы $OXYZ$ путем ее вращения:

- вокруг оси X на 90° (рис. 1.9, а);
- вокруг оси Y на 30° (рис. 1.9, б);
- вокруг оси Z на 180° (рис. 1.9, в).

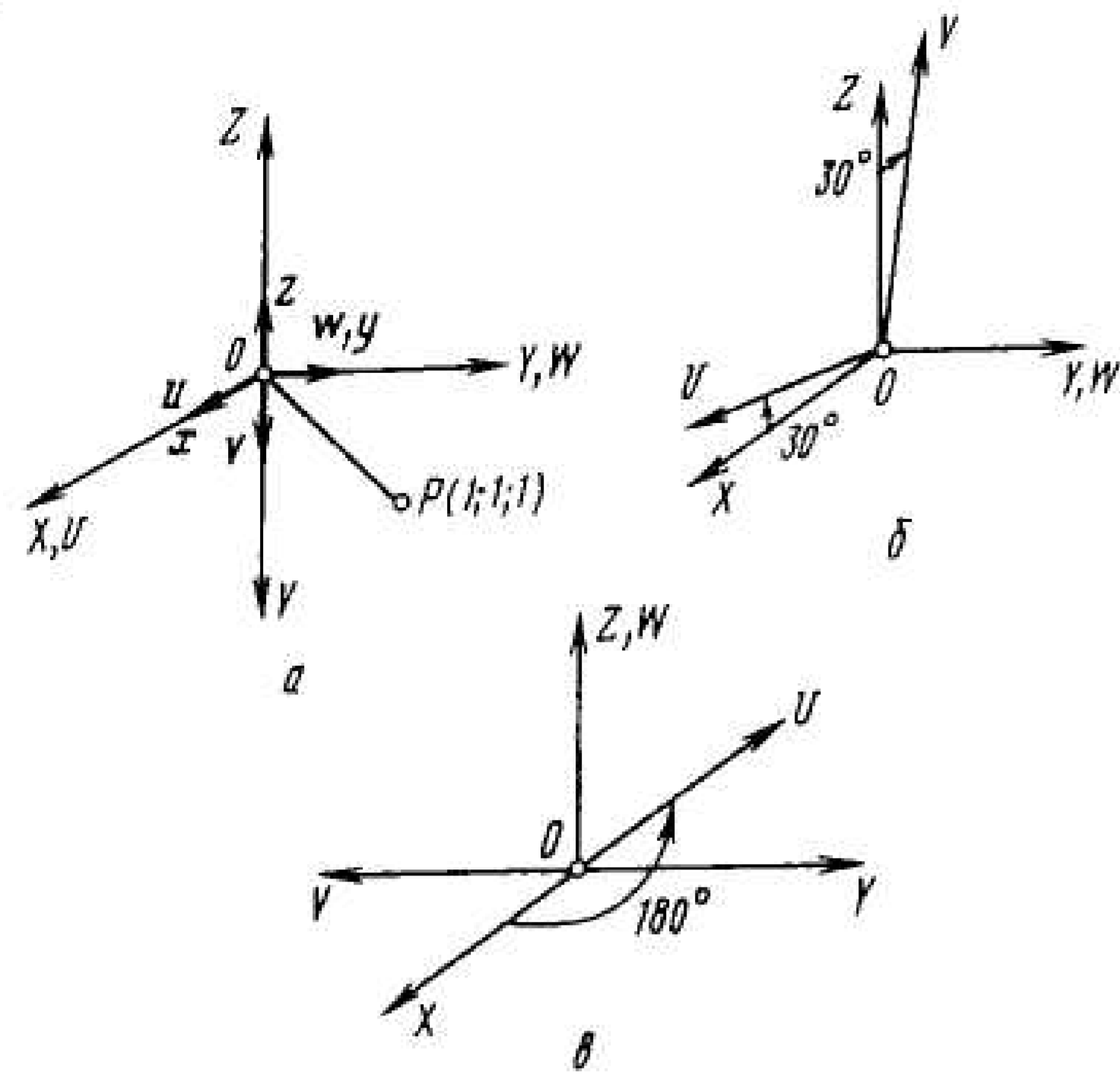


Рис. 1.9. Элементарные повороты вокруг осей координат:
 а — OX на 90° ; б — OY на 30° ; в — OZ на 180°

Решение. В соответствии с рис. 1.9, а находим координаты проекций ортов u, v, w на оси системы координат $OXYZ$:

проекция u на $OXYZ = (1, 0, 0)^T$;

проекция v на $OXYZ = (0, 0, -1)^T$;

проекция w на $OXYZ = (0, 1, 0)^T$,

и строим матрицу $R_{X,90^\circ}$:

$$R_{X,90^\circ} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Нетрудно проверить, что $\det R_{X,90^\circ} = 1$. Кроме того, строки $R_{X,90^\circ}$ представляют собой проекции ортов x, y, z на $OUVW$. Аналогично находим матрицы $R_{Y,30^\circ}$ и $R_{Z,180^\circ}$ (см. рис. 1.9, б, в):

$$R_{Y,30^\circ} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}, \quad R_{Z,180^\circ} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Пример 1.3. В системе координат $OUVW$ (см. рис. 1.9, а) точка P имеет координаты $(1, 1, 1)$. Найти ее координаты в системе $OXYZ$.

Решение. Используя матрицу поворота $R_{X,90^\circ}$, получаем

$$r = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, в системе $OXYZ$ точка P имеет координаты $(1; 1; -1)$.

1.2.2. Элементарные и сложные вращения

Под элементарными вращениями понимают повороты системы координат вокруг собственных осей. Найдем матрицы поворота для элементарных вращений. Выполняя действия, аналогичные проводимым в примере 1.1, и вводя обозначения, которыми будем пользоваться и в дальнейшем:

$$\sin \varphi = s_\varphi, \quad \cos \varphi = c_\varphi, \quad (1.8)$$

получаем

$$R_{X,\varphi} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_\varphi & -s_\varphi \\ 0 & s_\varphi & c_\varphi \end{pmatrix}, \quad (1.9)$$

$$R_{Y,\varphi} = \begin{pmatrix} c_\varphi & 0 & s_\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_\varphi & 0 & c_\varphi \end{pmatrix}, \quad (1.10)$$

$$R_{Z,\varphi} = \begin{pmatrix} c_\varphi & -s_\varphi & 0 \\ s_\varphi & c_\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.11)$$

Задача, которую мы будем решать далее, заключается в том, чтобы, вращая систему координат $OXYZ$, совместить ее с системой $OUVW$. Часто бывает так, что одним элементарным вращением этого совмещения двух систем координат добиться не удастся (или это неудобно по каким-либо соображениям), и тогда необходимо совершить некоторую

последовательность элементарных поворотов. Нас будет интересовать, как выглядит в этом случае матрица поворота.

Пусть для совмещения систем координат $OXYZ$ и $OUVW$ необходимо выполнить некоторую последовательность конечных поворотов (на рис. 1.10 начала систем координат для удобства изображены не совпадающими, в действительности же они находятся в одной точке):

$$OXYZ = OX_0Y_0Z_0 \xrightarrow{R_1} OX_1Y_1Z_1 \xrightarrow{R_2} OX_2Y_2Z_2 \xrightarrow{R_3} \dots \xrightarrow{R_{n-1}} OX_{n-1}Y_{n-1}Z_{n-1} \xrightarrow{R_n} OX_nY_nZ_n = OUVW. \quad (1.12)$$

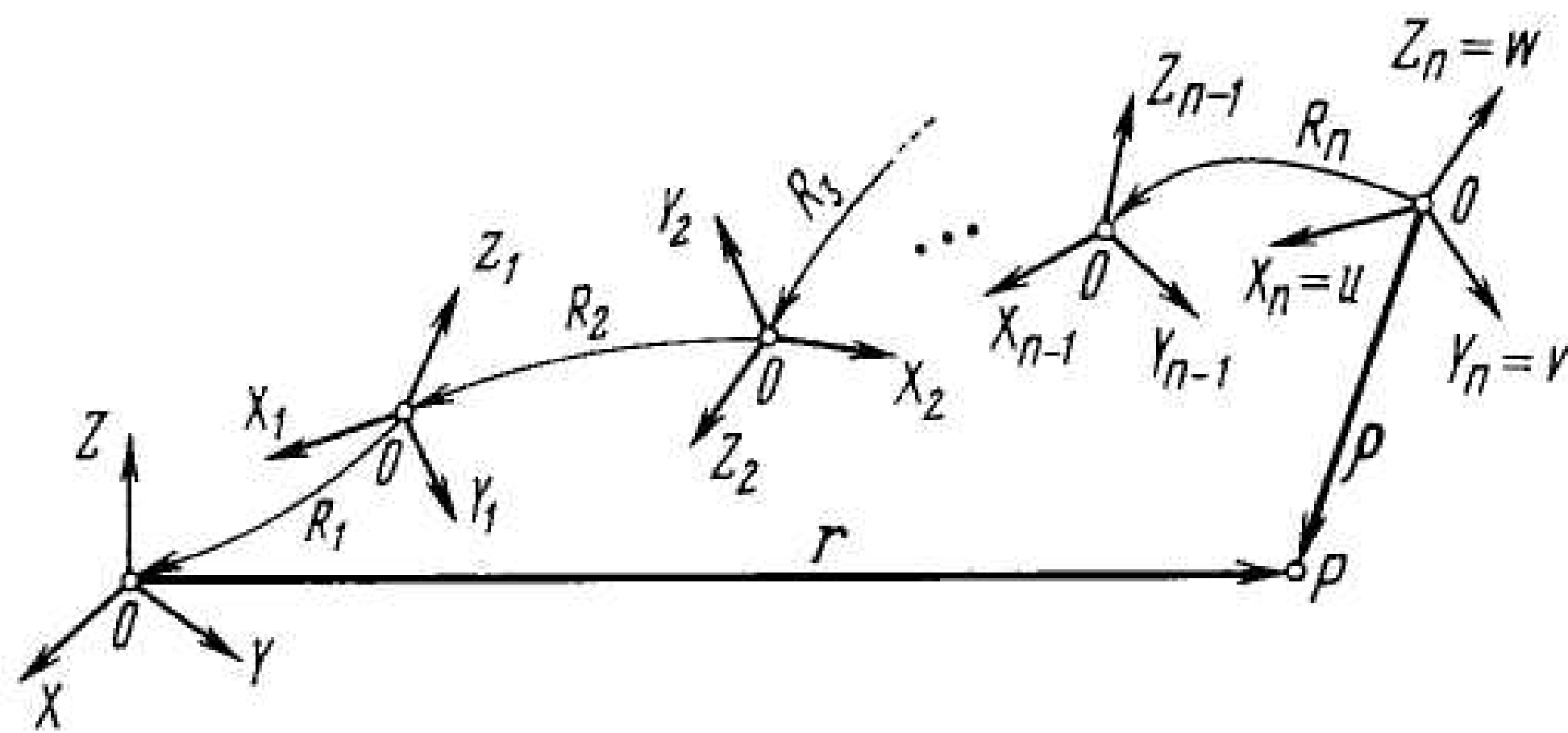


Рис. 1.10. Последовательность поворотов, преобразующих систему координат $OXYZ$ в систему координат $OUVW$; R_1, R_2, \dots, R_n — матрицы элементарных поворотов

Введем вектор ρ_1 , задающий положение точки P в системе координат $OX_1Y_1Z_1$. Зная матрицы поворота R_i для каждого преобразования

$$\rho_i = R_{i+1}\rho_{i+1}, \quad (1.13)$$

получаем результирующую матрицу поворота, используя соотношение

$$r = R\rho,$$

где $\rho = \rho_n$ — вектор, задающий положение точки в системе координат $OUVW$; $r = \rho_0$ — вектор, задающий искомое положение точки в системе координат $OXYZ$.

Используя выражение (1.13), нетрудно найти

$$r = \rho_0 = R_1R_2 \dots R_n\rho_n = R\rho,$$

где

$$R = R_1R_2 \dots R_n \quad (1.14)$$

матрица сложного вращения.

Соотношение (1.14) решает задачу.

Следует обратить внимание на то, что при изменении последовательности поворотов получают разные выражения для результирующей матрицы поворота в силу некоммутативности операции перемножения матриц в выражении (1.13).

1.2.3. Типовые вращения. Углы Эйлера

Существуют различные способы совмещения произвольным образом расположенных систем координат $OXYZ$ и $OUVW$. В качестве иллюстрации описанных вращений рассмотрим два основных способа: три последовательных элементарных поворота (преобразование Эйлера) и поворот вокруг произвольного вектора.

Преобразования Эйлера (углы Эйлера). Пусть для совмещения систем координат $OXYZ$ и $OUVW$ необходимо выполнить в соответствии с (1.12) такую последовательность поворотов (рис. 1.11).

1. Поворот системы координат $OXYZ$ вокруг оси Z на угол φ (получим систему координат $OX_1Y_1Z_1, Z_1 = Z$).

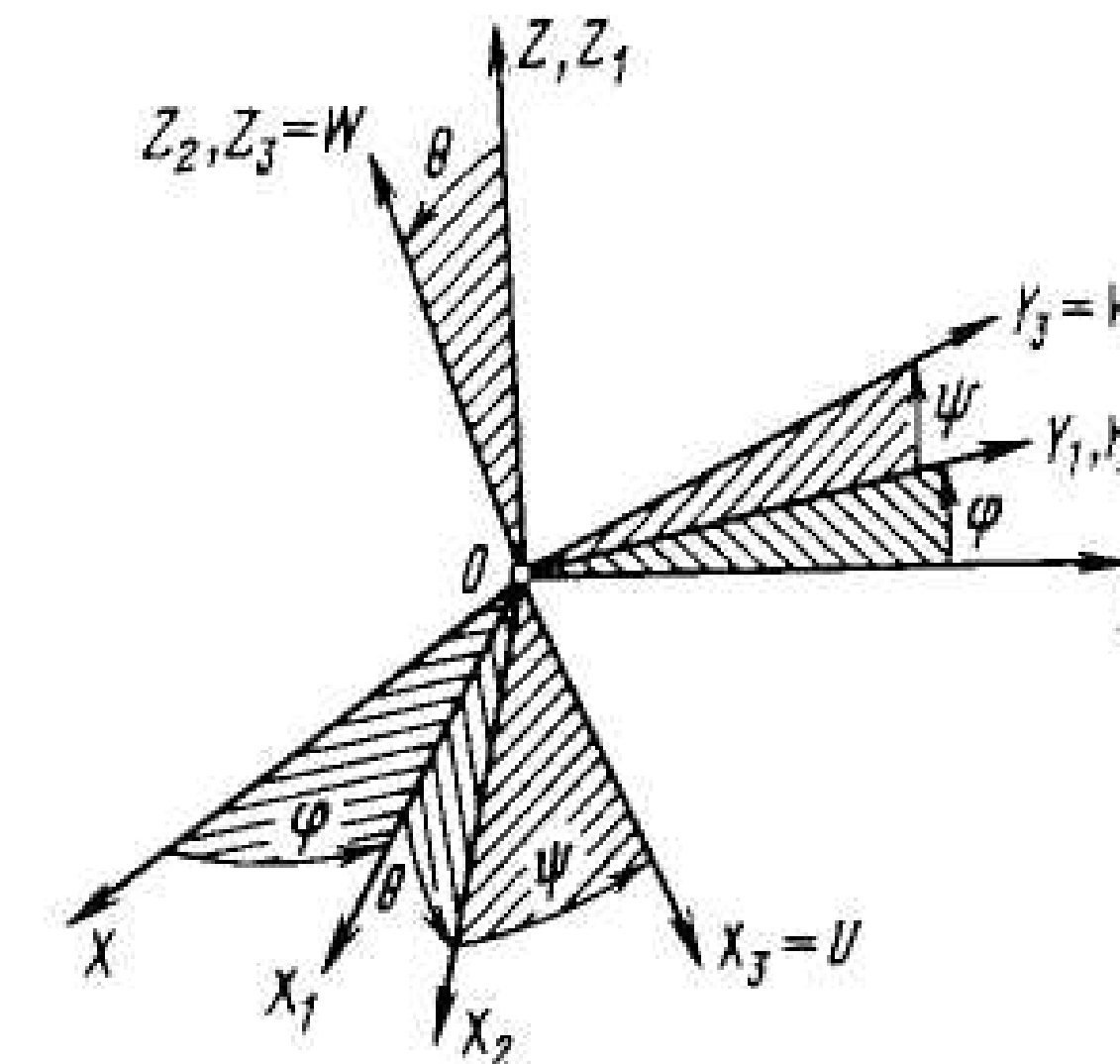


Рис. 1.11. Углы Эйлера

2. Поворот системы координат $OX_1Y_1Z_1$ вокруг Y_1 на угол θ (получим систему координат $OX_2Y_2Z_2, Y_2 = Y_1$).

3. Поворот системы координат $OX_2Y_2Z_2$ вокруг Z_2 на угол ψ (получим систему координат $OX_3Y_3Z_3 = OUVW, Z_3 = Z_2$).

Тогда результирующую матрицу поворота запишем в виде

$$R_{\varphi, \theta, \psi} = \text{Euler}(\varphi, \theta, \psi) = R_{Z, \varphi} R_{Y, \theta} R_{Z, \psi} =$$

$$= \begin{pmatrix} c_\varphi & -s_\varphi & 0 \\ s_\varphi & c_\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_\theta & 0 & s_\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_\theta & 0 & c_\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_\psi & -s_\psi & 0 \\ s_\psi & c_\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} c_\varphi c_\theta c_\psi - c_\varphi s_\psi & -c_\varphi c_\theta s_\psi - s_\varphi c_\psi & -c_\varphi s_\theta & s_\varphi c_\theta c_\psi + c_\varphi s_\psi & -s_\varphi c_\theta s_\psi + c_\psi & s_\varphi s_\theta & -s_\varphi c_\psi & c_\psi & c_\varphi s_\theta \\ s_\varphi c_\theta c_\psi + c_\varphi s_\psi & -s_\varphi c_\theta s_\psi + c_\psi & s_\varphi s_\theta & -s_\varphi c_\theta c_\psi + c_\varphi s_\psi & -s_\varphi c_\theta s_\psi + c_\psi & s_\varphi s_\theta & s_\varphi c_\psi & c_\psi & s_\varphi s_\theta \\ -s_\varphi c_\theta c_\psi + c_\varphi s_\psi & s_\varphi c_\theta s_\psi + c_\psi & s_\varphi s_\theta & s_\varphi c_\theta c_\psi + c_\varphi s_\psi & s_\varphi c_\theta s_\psi + c_\psi & s_\varphi s_\theta & -s_\varphi c_\psi & c_\psi & c_\varphi s_\theta \end{pmatrix}. \quad (1.15)$$

Поворот вокруг произвольной оси. Пусть для совмещения систем координат $OXYZ$ и $OUVW$ необходимо повернуть систему координат $OXYZ$ вокруг вектора n на угол δ (рис. 1.12). Будем считать, что вектор n единичный и задан проекциями на оси системы координат $OXYZ$:

$$n = (c_1, c_2, c_3)^T. \quad (1.16)$$

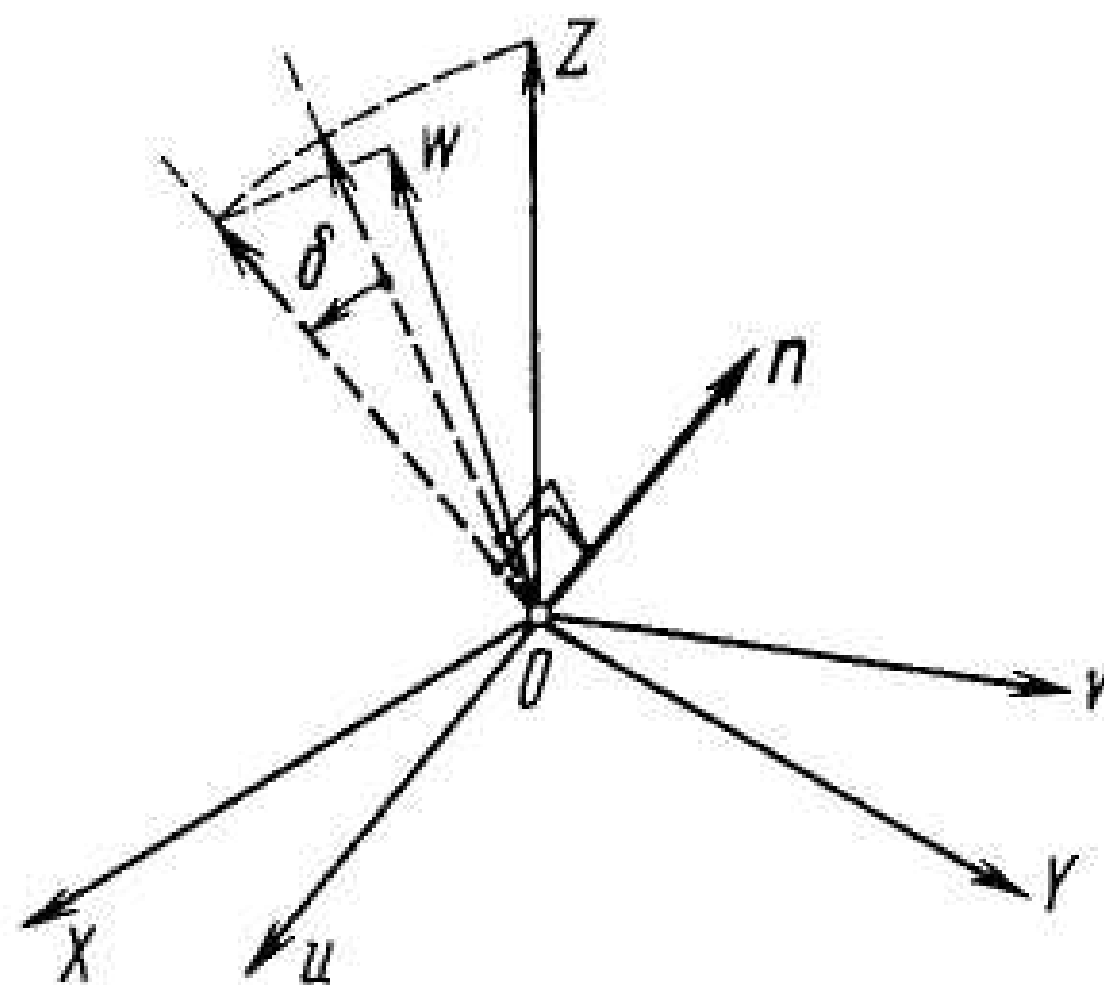


Рис. 1.12. Преобразование системы координат $OXYZ$ в $OUVW$ путем ее вращения вокруг вектора n на угол δ

Матрица любого ортогонального преобразования $R = \{r_{ij}\}$ (т.е. матрица, удовлетворяющая условию (1.5)) поворачивает радиус-вектор каждой точки пространства на угол δ вокруг вектора n , при этом угол поворота и направляющие косинусы (см. (1.16)) можно найти, используя следующие выражения:

$$\cos \delta = \frac{1}{2}(\text{tr}R - 1) = \frac{1}{2}(r_{11} + r_{22} + r_{33} - 1),$$

$$c_1 = \frac{r_{32} - r_{23}}{2 \sin \delta}, c_2 = \frac{r_{13} - r_{31}}{2 \sin \delta}, c_3 = \frac{r_{21} - r_{12}}{2 \sin \delta}. \quad (1.17)$$

Наоборот, если заданы δ и n , то матрица поворота имеет вид

$$R_{\delta, n} = \text{Rot}(\delta, n) = \cos \delta \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} +$$

$$+ (1 - \cos \delta) \begin{pmatrix} c_1^2 & c_1 c_2 & c_1 c_3 \\ c_2 c_1 & c_2^2 & c_2 c_3 \\ c_3 c_1 & c_3 c_2 & c_3^2 \end{pmatrix} + \sin \delta \begin{pmatrix} 0 & -c_3 & c_2 \\ c_3 & 0 & -c_1 \\ -c_2 & c_1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.18)$$

Напомним одну из теорем механики, а именно теорему Шаля, согласно которой всякое перемещение свободного твердого тела из одного положения в другое можно осуществить путем его поступательного движения вместе с произвольно выбранным полюсом и поворота вокруг некоторой оси, проходящей через этот полюс.

В рамках рассматриваемых в данной главе задач это означает, что совмещение двух любых систем координат можно осуществить путем переноса и последующего вращения одной из них вокруг некоторого вектора (см. (1.17) и (1.18)).

Пример 1.4. Найти параметры поворота (т.е. угол и вектор поворота), задаваемого матрицей (1.9).

Решение. В соответствии с выражением (1.17) имеем

$$\cos \delta = \frac{1}{2}(1 + \cos \varphi + \cos \varphi - 1) = \cos \varphi,$$

$$c_1 = 1; c_2 = c_3 = 0.$$

Найденные c_1, c_2, c_3 соответствуют орту i (т.е. единичному вектору, направленному вдоль оси X).

1.2.4. Сложные преобразования

Пусть для совмещения абсолютной и подвижной систем координат в силу каких-либо причин необходимо совершить последовательность не только поворотов, но и переносов (рис. 1.13):

$$OXYZ = O_0 X_0 Y_0 Z_0 \xrightarrow{p_1} O_1 X'_0 Y'_0 Z'_0 \xrightarrow{R_2} O_1 X_1 Y_1 Z_1 \xrightarrow{p_2}$$

$$\begin{aligned}
 & \xrightarrow{p_2} O_2 X'_1 Y'_1 Z'_1 \xrightarrow{R_2} O_2 X_2 Y_2 Z_2 \xrightarrow{p_{n-1}} \dots \xrightarrow{p_{n-1}} \\
 & \xrightarrow{p_{n-1}} O_{n-1} X'_{n-2} Y'_{n-2} Z'_{n-2} \xrightarrow{R_{n-1}} O_{n-1} X_{n-1} Y_{n-1} Z_{n-1} \xrightarrow{p_n} \\
 & \xrightarrow{p_n} O_n X'_n Y'_n Z'_n \xrightarrow{R_n} O_n X_n Y_n Z_n = OUVW. \quad (1.19)
 \end{aligned}$$

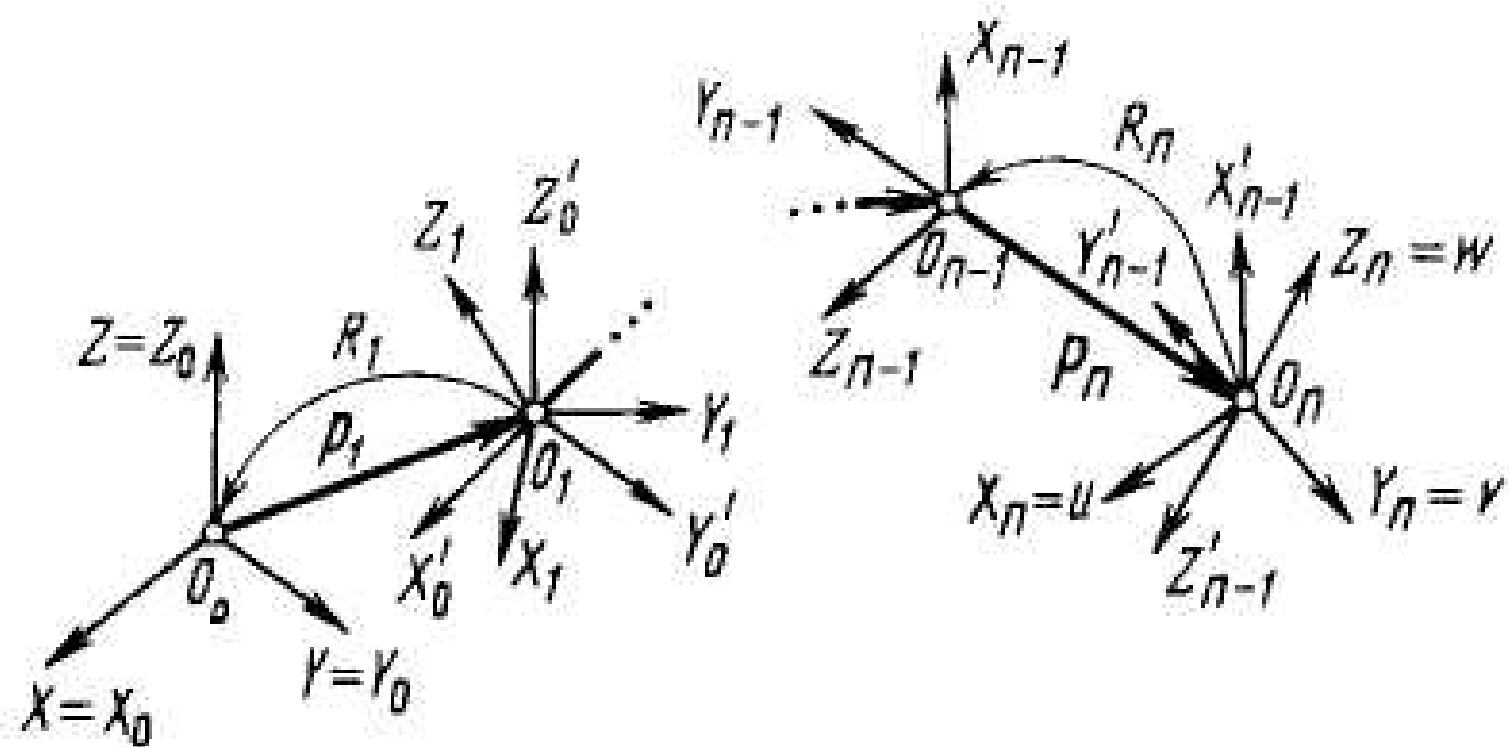


Рис. 1.13. Преобразование системы координат OXYZ в OUVW путем последовательных переносов (p_i) и вращений (R_i)

В последовательности преобразований (1.19) p_i — векторы переносов заданы в системе координат $O_{i-1} X_{i-1} Y_{i-1} Z_{i-1}$, а R_i — матрица поворота, определяет переход от системы координат $O_i X_i Y_i Z_i$ к системе координат $O_i X'_{i-1} Y'_{i-1} Z'_{i-1}$ (последнее верно, поскольку $O_i X'_{i-1} Y'_{i-1} Z'_{i-1}$ и $O_i X_{i-1} Y_{i-1} Z_{i-1}$ имеют параллельные оси). В соответствии с (1.3) имеем

$$p_i = R_{i+1} p_{i+1} + p_{i+1}. \quad (1.20)$$

Тогда, используя соотношение (1.20), нетрудно получить

$$\begin{aligned}
 r = p_0 &= R_1(R_2 \dots R_{n-2}(R_{n-1}(R_n p_n + p_n) + p_{n-1}) + p_{n-2}) + \dots + p_2 + p_1 = \\
 &= R p_n + p, \quad (1.21)
 \end{aligned}$$

где R — суммарная матрица поворота; p — вектор переноса:

$$R = R_1 R_2 \dots R_n, \quad (1.22)$$

$$p = p_1 + R_1 p_2 + R_1 R_2 p_3 + \dots + R_1 R_2 \dots R_{n-1} p_n. \quad (1.23)$$

1.3. Однородные координаты и преобразования

1.3.1. Однородные координаты и векторы

В робототехнике широко используют аппарат однородных преобразований для описания вращений и переносов, т.е. тех движений, ко-

торые допускаются сочленениями манипулятора [60]. Однако, прежде чем перейти непосредственно к однородным преобразованиям, обсудим ряд известных подходов для решения этой задачи.

Пусть некоторая точка M в декартовом пространстве имеет координаты (a, b, c) . Тогда соответствующий ей вектор p можно представить в виде

$$p = (a, b, c)^T.$$

Однородными координатами этой точки с декартовыми координатами (a, b, c) называют четверку чисел (x, y, z, w) , такую, что справедливы следующие соотношения:

$$\begin{aligned}
 x &= aw, \quad y = bw, \quad z = cw; \\
 x^2 + y^2 + z^2 + w^2 &\neq 0.
 \end{aligned}$$

Очевидно, что однородные координаты определены неоднозначно: если a, b, c, d — однородные координаты некоторой точки, то $\lambda a, \lambda b, \lambda c, \lambda d$ — однородные координаты той же точки ($\lambda \neq 0$). Таким образом, каждой точке декартова пространства можно поставить в соответствие четверку чисел, являющихся ее однородными координатами. Обратное, вообще говоря, неверно, если не исключить случай $w = 0$.

Пример 1.5. Найти однородные координаты точек со следующими координатами:

1. (0, 0, 0).
2. (1, 1, 1).
3. (5, 0, 0).

Решение. Очевидно, что однородные координаты будут иметь вид

1. (0, 0, 0, w), где $w \neq 0$ — произвольный параметр.
2. (w, w, w, w), $w \neq 0$.
3. (5w, 0, 0, w), $w \neq 0$.

Пример 1.6. Найти декартовы координаты точек, заданных их однородными координатами:

1. (5, 6, 10, 2).
2. (1, 1, 0, 3).
3. (2w, 5w, 6w, w).

Решение. Декартовы координаты точек имеют следующий вид:

1. (5/2, 3, 5).
2. (1/3, 1/3, 0).

3. (2, 5, 6), $w \neq 0$. Если $w = 0$, то соответствующей точки не существует.

Если в представлении, использующем однородные координаты, выбрать $w = 1$, то координаты (a, b, c) соответствуют $(a, b, c, 1)$.

Можно считать, что однородные координаты вида $(a, b, c, 0)$ имеет точка в декартовом пространстве, бесконечно удаленная в направлении вектора $\rho = (a, b, c)$. Тогда для однородных ортов получаем следующее соответствие:

- $(1, 0, 0, 0)$ — бесконечно удаленная точка в направлении оси X ;
- $(0, 1, 0, 0)$ — бесконечно удаленная точка в направлении оси Y ;
- $(0, 0, 1, 0)$ — бесконечно удаленная точка в направлении оси Z ;
- $(0, 0, 0, 1)$ — начало системы координат.

Однородный вектор задается как и обычный, т.е. если однородные координаты точки представлены четверкой (a, b, c, d) , то соответствующий *однородный вектор* имеет вид $\rho = (a, b, c, d)^T$.

Рассмотрим основные операции, осуществляемые над однородными векторами.

1. Сложение:

$$\begin{aligned} r_1 &= (a_1, b_1, c_1, d_1)^T, \\ r_2 &= (a_2, b_2, c_2, d_2)^T, \quad d_1, d_2 \neq 0, \\ r = r_1 + r_2 &= \left(\frac{a_1}{d_1} + \frac{a_2}{d_2}, \frac{b_1}{d_1} + \frac{b_2}{d_2}, \frac{c_1}{d_1} + \frac{c_2}{d_2}, 1 \right)^T. \end{aligned} \quad (1.24)$$

2. Умножение на скаляр:

$$\begin{aligned} r_1 &= (a_1, b_1, c_1, d_1)^T, \\ r &= \lambda r_1 = \left(\lambda \frac{a_1}{d_1}, \lambda \frac{b_1}{d_1}, \lambda \frac{c_1}{d_1}, 1 \right)^T, \end{aligned}$$

т.е.

$$r = (\lambda a_1, \lambda b_1, \lambda c_1, d_1)^T. \quad (1.25)$$

3. Скалярное произведение:

$$\begin{aligned} r_1 &= (a_1, b_1, c_1, d_1)^T, \\ r_2 &= (a_2, b_2, c_2, d_2)^T, \quad d_1, d_2 \neq 0, \\ \lambda = r_1 r_2 &= \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2}{d_1 d_2}. \end{aligned} \quad (1.26)$$

4. Векторное умножение:

$$\begin{aligned} r_1 &= (a_1, b_1, c_1, d_1)^T, \\ r_2 &= (a_2, b_2, c_2, d_2)^T, \\ r = r_1 \times r_2 &= (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1, a_4 b_4)^T. \end{aligned} \quad (1.27)$$

5. Длина однородного вектора $r = (a, b, c, d)^T$:

$$|r| = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}{|d|}. \quad (1.28)$$

Заметим, что однородные координаты можно задать и в n -мерном пространстве. Тогда n -мерному вектору будет соответствовать $n+1$ -мерный однородный вектор, при этом операции (1.24)–(1.28) легко обобщаются на этот случай.

1.3.2. Однородные преобразования

Однородными преобразованиями называют преобразования однородного вектора, осуществляющие его поворот, перенос, масштабирование, перспективное проектирование.

Пусть ρ — однородный вектор. Тогда однородное преобразование осуществляется следующим образом:

$$\rho' = T\rho. \quad (1.29)$$

где T — матрица однородного преобразования 4×4 (или однородная матрица):

$$T = \begin{pmatrix} R & \rho \\ f & m \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} r_{11} & r_{12} & r_{13} & p_1 \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & p_2 \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & p_3 \\ \hline f_1 & f_2 & f_3 & m \end{array} \right). \quad (1.30)$$

Здесь R — матрица поворота 3×3 ; ρ — вектор переноса; f — вектор, связанный с вектором центрального проектирования; m — коэффициент масштабирования.

Рассмотрим действие каждого из упомянутых выше элементарных преобразований на однородный вектор $\rho = (a, b, c, 1)^T$, соответствующий вектору $r = (a, b, c)^T$.

1. Сдвиг. Пусть однородная матрица имеет вид

$$T_{\text{сд}}(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & p_1 \\ 0 & 1 & 0 & p_2 \\ 0 & 0 & 1 & p_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.31)$$

Тогда в силу соотношения (1.29) получаем

$$\boldsymbol{\rho}' = T_{\text{сд}}(\mathbf{p}) \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + p_1 \\ b + p_2 \\ c + p_3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, однородное преобразование, задаваемое матрицей (1.31), осуществляет операцию сдвига вектора \mathbf{r} :

$$\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r} + \mathbf{p}. \quad (1.32)$$

2. Поворот. Пусть однородная матрица имеет вид

$$T_{\text{пов}}(R) = \begin{pmatrix} & & & 0 \\ & R & & 0 \\ & & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.33)$$

Тогда

$$\boldsymbol{\rho}' = T_{\text{пов}}(R) \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{11}a + r_{12}b + r_{13}c \\ r_{21}a + r_{22}b + r_{23}c \\ r_{31}a + r_{32}b + r_{33}c \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, преобразование (1.33) обеспечивает операцию поворота:

$$\mathbf{r} \rightarrow R\mathbf{r}. \quad (1.34)$$

3. Перспективное проектирование. Пусть однородная матрица имеет вид

$$T_{\text{пер}}(\mathbf{f}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ f_1 & f_2 & f_3 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.35)$$

Тогда вектор $\boldsymbol{\rho}$ можно преобразовать следующим образом:

$$\boldsymbol{\rho}' = T_{\text{пер}}(\mathbf{f})\boldsymbol{\rho} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ f_1 & f_2 & f_3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ af_1 + bf_2 + cf_3 + 1 \end{pmatrix}.$$

Итак, однородное преобразование, определяемое матрицей (1.35), изменяет вектор \mathbf{r} следующим образом:

$$\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}/(1 + \mathbf{r}^T \mathbf{f}). \quad (1.36)$$

Соотношение (1.36) задает преобразование центрального проектирования с вектором \mathbf{g} , имеющим компоненты $g_i = -1/f_i$.

4. Масштабирование. Пусть однородная матрица имеет вид

$$T_{\text{масш}}(m) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m \end{pmatrix}. \quad (1.37)$$

Тогда

$$\boldsymbol{\rho}' = T_{\text{масш}}(m)\boldsymbol{\rho} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ m \end{pmatrix}.$$

Следовательно, матрица $T_{\text{масш}}(m)$ совершает преобразование

$$\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}/m. \quad (1.38)$$

В дальнейшем будем использовать только операции поворота и сдвига, т.е. те однородные преобразования, которые задаются матрицей следующего вида:

$$T = \begin{pmatrix} R & \mathbf{p} \\ 000 & 1 \end{pmatrix}, \quad (1.39)$$

где R — матрица поворота 3×3 ; \mathbf{p} — вектор переноса 3×1 .

Обратная матрица T^{-1} всегда существует, поскольку очевидно, что $\det T = \det R \neq 0$:

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} R^T & -R^T \mathbf{p} \\ 000 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.40)$$

Пример 1.7. Найти матрицу однородного преобразования, обеспечивающего поворот векторов на 30° вокруг оси, задаваемой вектором $(1, 1, 1)^T$, и последующий сдвиг на вектор $(2, 2, 2)^T$.

Решение. Для нахождения матрицы T в форме (1.31) необходимо найти матрицу поворота R и вектор переноса \mathbf{p} . Из (1.18) следует, что

$$\mathbf{n} = (c_1, c_2, c_3) = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right),$$

$$R = \cos 30^\circ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + (1 - \cos 30^\circ) \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} +$$

$$+ \sin 30^\circ \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда окончательно получаем

$$T = \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{3}}{3} & \frac{1-\sqrt{3}}{3} & \frac{1}{3} & 2 \\ \frac{1}{3} & \frac{1+\sqrt{3}}{3} & \frac{1-\sqrt{3}}{3} & 2 \\ \frac{1-\sqrt{3}}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1+\sqrt{3}}{3} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

В заключение решим задачу преобразования систем координат, рассмотренную в п. 1.2.

Пусть заданы абсолютная O_1XYZ и подвижная O_2UVW системы координат (рис. 1.14). Будем считать, что \mathbf{p} — однородный вектор в системе $OUVW$, задающий точку M , а T — однородная матрица (1.39):

$$T = \begin{pmatrix} R & \mathbf{p} \\ 000 & 1 \end{pmatrix}.$$

При этом вектор \mathbf{p} определяет начало (точку O_2) в системе координат O_1XYZ , а матрица R — поворот подвижной системы координат относительно абсолютной. Тогда однородный вектор \mathbf{p}' , задающий точку M в абсолютной системе координат, имеет вид

$$\mathbf{p}' = T\mathbf{p}, \quad (1.41)$$

а матрица T является матрицей перехода от системы координат O_2XYZ к O_1XYZ . Сравнивая аналогичную форму (1.3) для обычных, неоднородных векторов и преобразований, видим, что преимущество заключается в том, что операции вращения и переноса выполняются за одно матричное умножение и линейны по \mathbf{p} . В этом и заключается основное удобство формализма однородных преобразований.

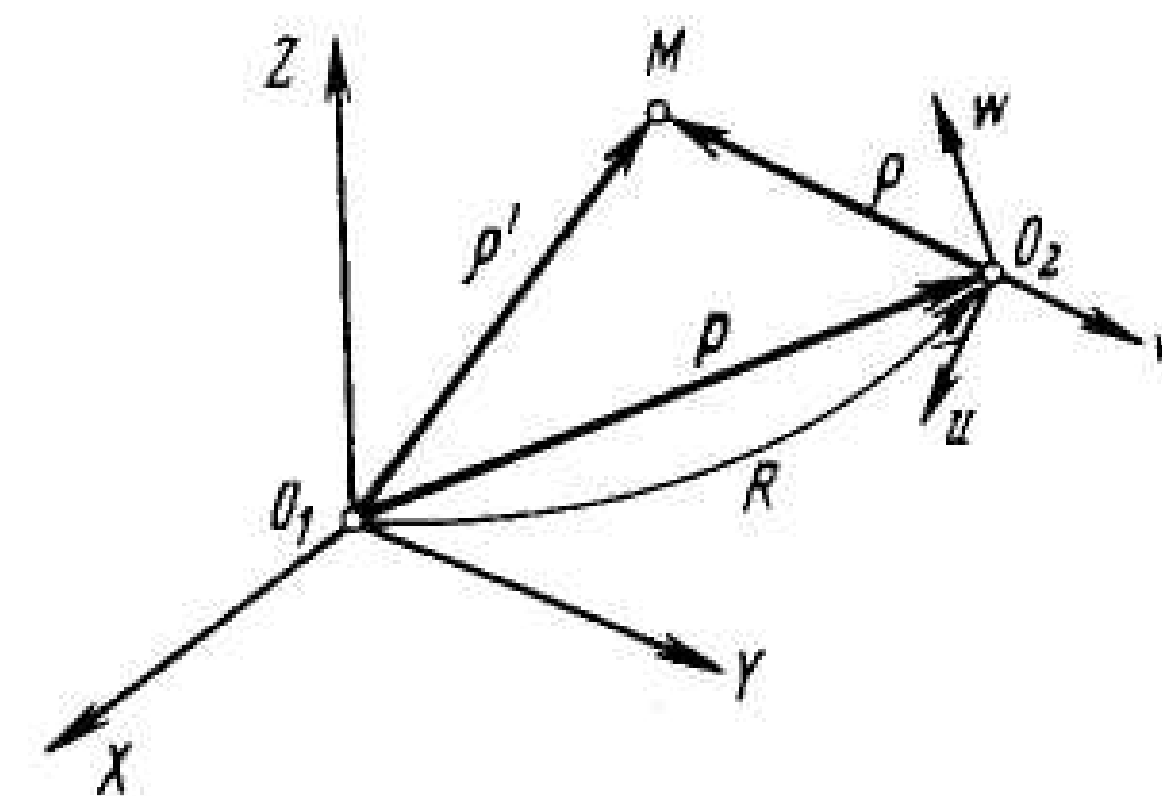


Рис. 1.14. Связь неподвижной O_1XYZ и подвижной O_2UVW систем координат

Рассмотрим сложные однородные преобразования. Пусть $O_0X_0Y_0Z_0, O_1X_1Y_1Z_1, \dots, O_nX_nY_nZ_n$ — произвольно расположенные системы координат (рис. 1.15), A — матрица перехода от системы координат $O_iX_iY_iZ_i$ к $O_{i-1}X_{i-1}Y_{i-1}Z_{i-1}$. Тогда матрица перехода от $O_nX_nY_nZ_n$ к $O_0X_0Y_0Z_0$, имеет вид

$$T'' = A_1 A_2 \dots A_n. \quad (1.42)$$

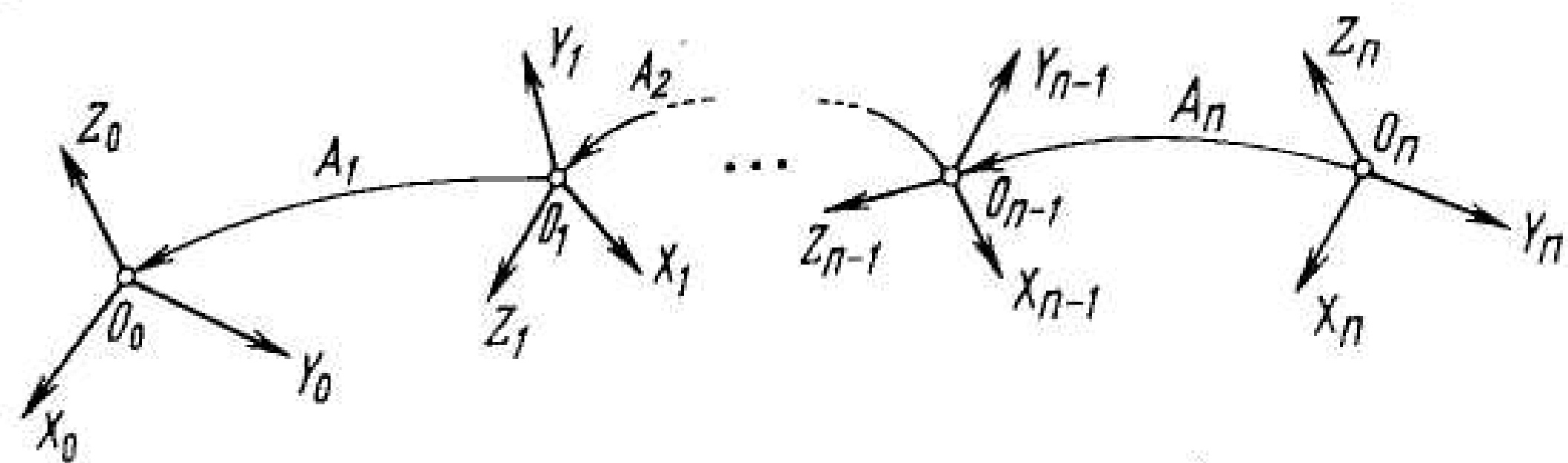


Рис. 1.15. К определению сложного однородного преобразования

В общем случае матрица перехода от l -й системы координат к m -й ($l < m$) имеет вид

$$T_m^l = A_{l-1} A_{l-2} \dots A_m. \quad (1.43)$$

Пример 1.8. Координаты точки M в системе координат O_2UVW заданы на рис. 1.16. Определить ее координаты в системе O_1XYZ .

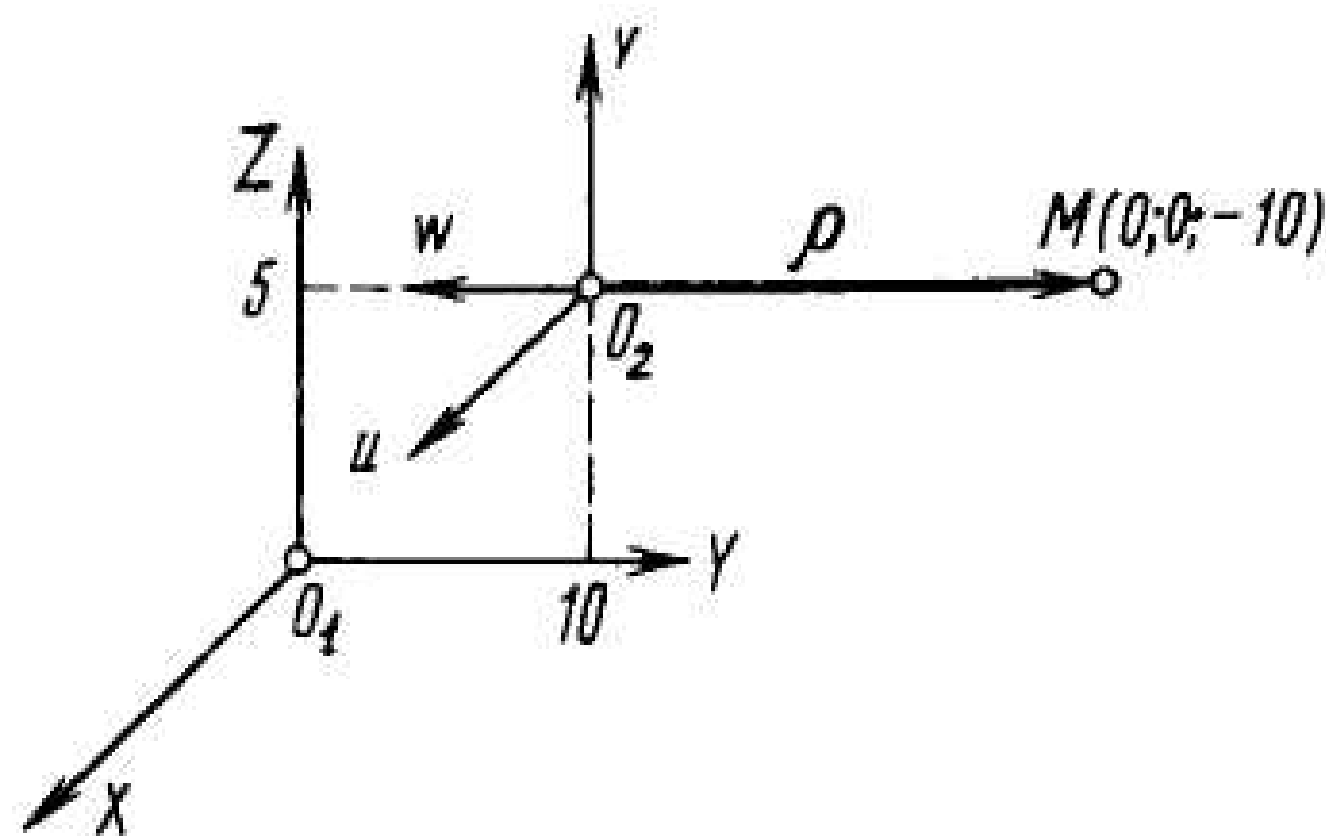


Рис. 1.16. К примеру 1.8

Решение. Найдем матрицу перехода T от O_2UVW к O_1XYZ . Записывая компоненты матрицы T в виде

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \rho = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix},$$

получаем

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Поскольку $\rho = (0, 0, -10, 1)$, то имеем

$$\rho' = T\rho = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -10 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 20 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, координаты точки M в O_1XYZ задаются вектором $(0, 20, 5)$, что ясно из рисунка.

Сделаем одно существенное замечание. Как было сказано выше, для задания взаимного расположения двух систем координат (или двух твердых тел, с которыми связаны эти системы) достаточно указать шесть чисел: три числа характеризуют положение начала системы координат и три — углы, задающие ориентацию. Однако матрица T в форме (1.40) содержит $3 \times 3 + 3 = 12$ чисел, т.е. это представление является избыточным. В данном случае избыточность обусловлена заданием матрицы поворота R . Если представить R в виде

$$R = (a \ b \ c),$$

то вследствие ее ортогональности имеют место соотношения

$$a \times b = c, \quad b \times c = a, \quad c \times a = b,$$

из которых независимыми является любая пара. Эта пара соотношений эквивалентна шести уравнениям, и таким образом из девяти элементов матрицы R независимыми являются три элемента ($9 - 6 = 3$) или их независимые функции.

1.4. Определение положения и ориентации звеньев манипулятора

После рассмотрения ряда вспомогательных моментов, вернемся к задаче построения кинематической модели манипулятора.

Определение положения схвата манипулятора и любого его звена — задача, на первый взгляд, простая, однако ее решение потребует некоторых усилий.

Напомним, что, согласно определению (см. § 1.2), любое звено манипулятора является твердым телом, имеющим в свободном движении шесть степеней свободы, и, следовательно, его положение относитель-

но некоторой абсолютной системы координат полностью задается шестью параметрами:

$$s = (u_1, u_2, \dots, u_6). \quad (1.44)$$

Если со звеном, положение которого необходимо определить, жестко связать систему координат O_1UVW (рис. 1.17), то поставленная задача о положении звена манипулятора трансформируется в задачу о взаимном расположении системы координат O_1UVW , жестко связанной со звеном, и некоторой абсолютной системы координат $O_0X_0Y_0Z_0$, связанной, например, с неподвижным основанием. Тогда параметры u , в соотношении (1.44) можно интерпретировать следующим образом:

$$u_1 = x, u_2 = y, u_3 = z \quad \text{—}$$

координаты начала O_1UVW в $O_0X_0Y_0Z_0$;

$$u_4 = \alpha, u_5 = \beta, u_6 = \gamma \quad \text{—}$$

углы, задающие ориентацию системы координат O_1UVW относительно $O_0X_0Y_0Z_0$ (например, углы Эйлера), т.е.

$$s = (x, y, z, \alpha, \beta, \gamma). \quad (1.45)$$

Представление положения звена s в форме (1.45) будет использоваться в дальнейшем.

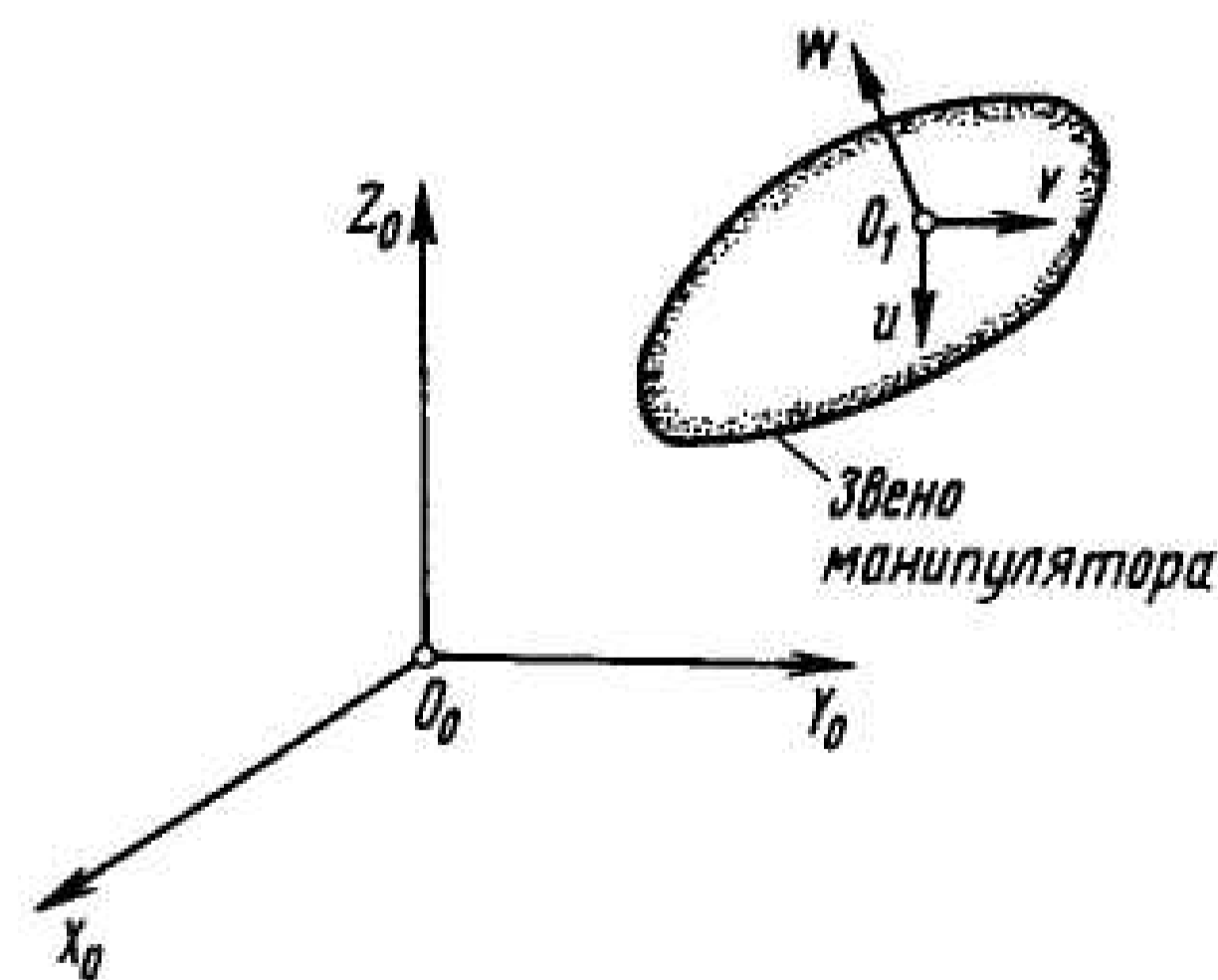


Рис. 1.17. Положение звена в пространстве, заданное связанной с ним системой координат O_1UVW

Отметим, что интерпретировать s как вектор в линейном пространстве нельзя, поскольку не выполняются условия аддитивности по

последним трем компонентам. Для того чтобы их преодолеть, воспользуемся аппаратом однородных координат и преобразований. Как было показано в § 1.2, взаимное положение системы координат звена O_1UVW и абсолютной системы координат $O_0X_0Y_0Z_0$, а следовательно, и положение соответствующего звена можно задать матрицей однородных преобразований T вида:

$$T = \begin{pmatrix} R & p \\ 000 & 1 \end{pmatrix}, \quad (1.46)$$

где p — вектор 3×1 , задающий начало O_1UVW , а R — матрица 3×3 , задающая ориентацию O_1UVW относительно $O_0X_0Y_0Z_0$.

Такое представление будем использовать для задания положения звеньев. Несомненно, оно избыточно, поскольку матрица T имеет шестнадцать элементов ($4 \times 4 = 16$), несмотря на то, что для описания положения звена достаточно шести. Однако, этот недостаток полностью компенсируется следующими преимуществами.

1. Исключается необходимость отдельного рассмотрения операций переноса и вращения, поскольку представление (1.46) совмещает их.

2. В целях аналитического исследования проблем кинематики манипуляторов появляется возможность использовать аппарат теории матриц.

Рассмотрим N -степенной манипулятор, т.е. манипулятор, имеющий $N+1$ звено. Свяжем с каждым i -м звеном систему координат $O_iX_iY_iZ_i$ (рис. 1.18), при этом будем считать, что нулевое звено неподвижно (оно является основанием), и, следовательно, система координат $O_0X_0Y_0Z_0$ является абсолютной. Тогда однородная матрица T_i , имеющая вид

$$T_i = \begin{pmatrix} R_i & P_i \\ 000 & 1 \end{pmatrix}, \quad i = 0, 1, \dots, N, \quad (1.47)$$

$$T_0 = E$$

задает положение и ориентацию системы координат $O_iX_iY_iZ_i$ относительно абсолютной системы координат $O_0X_0Y_0Z_0$, значит, эта матрица определяет положение и ориентацию i -го звена.

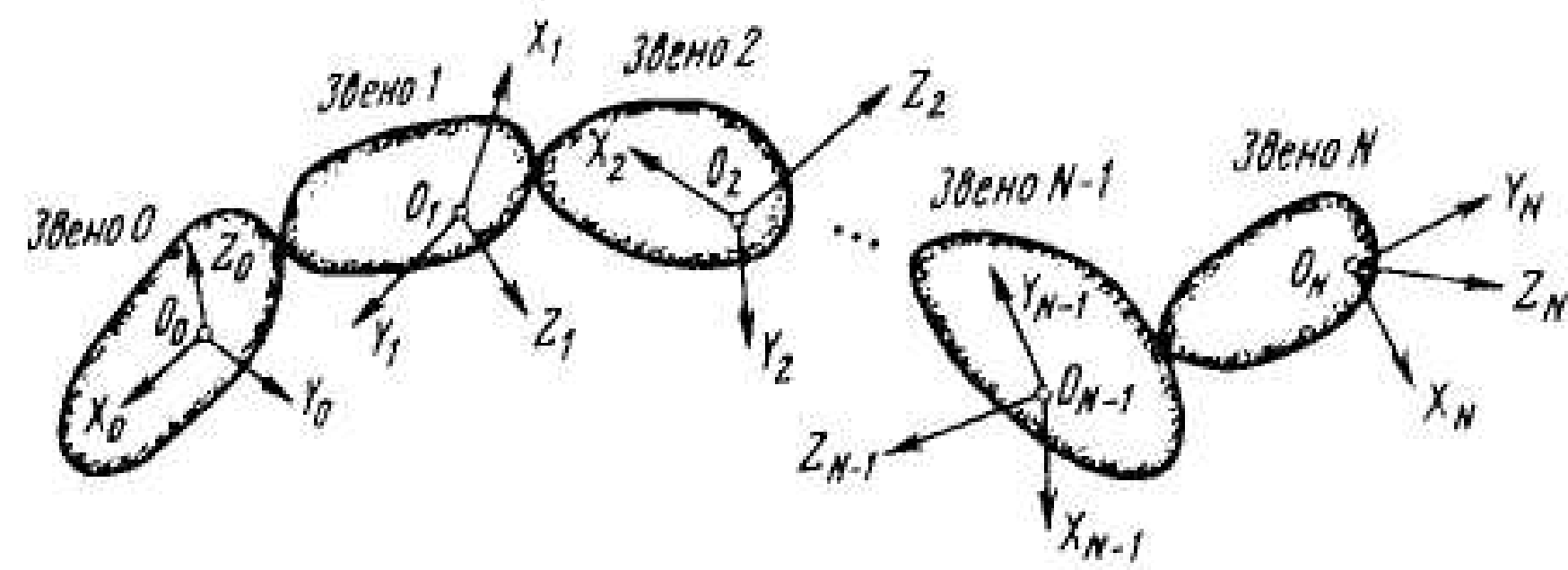


Рис. 1.18. Системы координат $O_i, X_i, Y_i, Z_i, i = 0, 1, 2, \dots, N$, связанные со звеньями манипулятора

Отметим, что, с одной стороны, положение схвата манипулятора полностью определяется положением всех остальных звеньев, т.е. вектором обобщенных координат $q = (q_1, q_2, \dots, q_N)^T$. С другой стороны, положение схвата, рассматриваемого как свободное твердое тело, определяется шестью параметрами (см. (1.45)). Отсюда следует:

- 1) если $N < 6$, то существуют такие положения схвата, что никаким выбором q мы не сможем их обеспечить;
- 2) если $N = 6$, то существует конечное число обобщенных векторов q (т.е. различных конфигураций манипулятора), обеспечивающих заданное положение схвата;
- 3) если $N > 6$ (манипулятор с избыточным числом звеньев), то может существовать бесконечное число конфигураций манипулятора, обеспечивающих заданное положение схвата.

Детально этот вопрос будет изучен в § 3.2, где речь пойдет о рабочем пространстве манипулятора.

1.5. Специальные системы координат

Та простота, с которой мы можем находить положение и ориентацию звеньев манипулятора, т.е. вид матрицы T_i (см. (1.47)), существенно зависит от выбора системы координат звеньев O_i, X_i, Y_i, Z_i . Рассмотрим способ построения системы координат, предложенный Денавитом и Хартенбергом в 1955 г. [67], который в настоящее время широко используют при построении кинематической модели манипулятора.

Построение системы координат Денавита — Хартенберга для манипулятора с N степенями подвижности ($N + 1$ звено) опишем в виде

алгоритма, состоящего в выполнении следующей последовательности шагов (рис. 1.19).

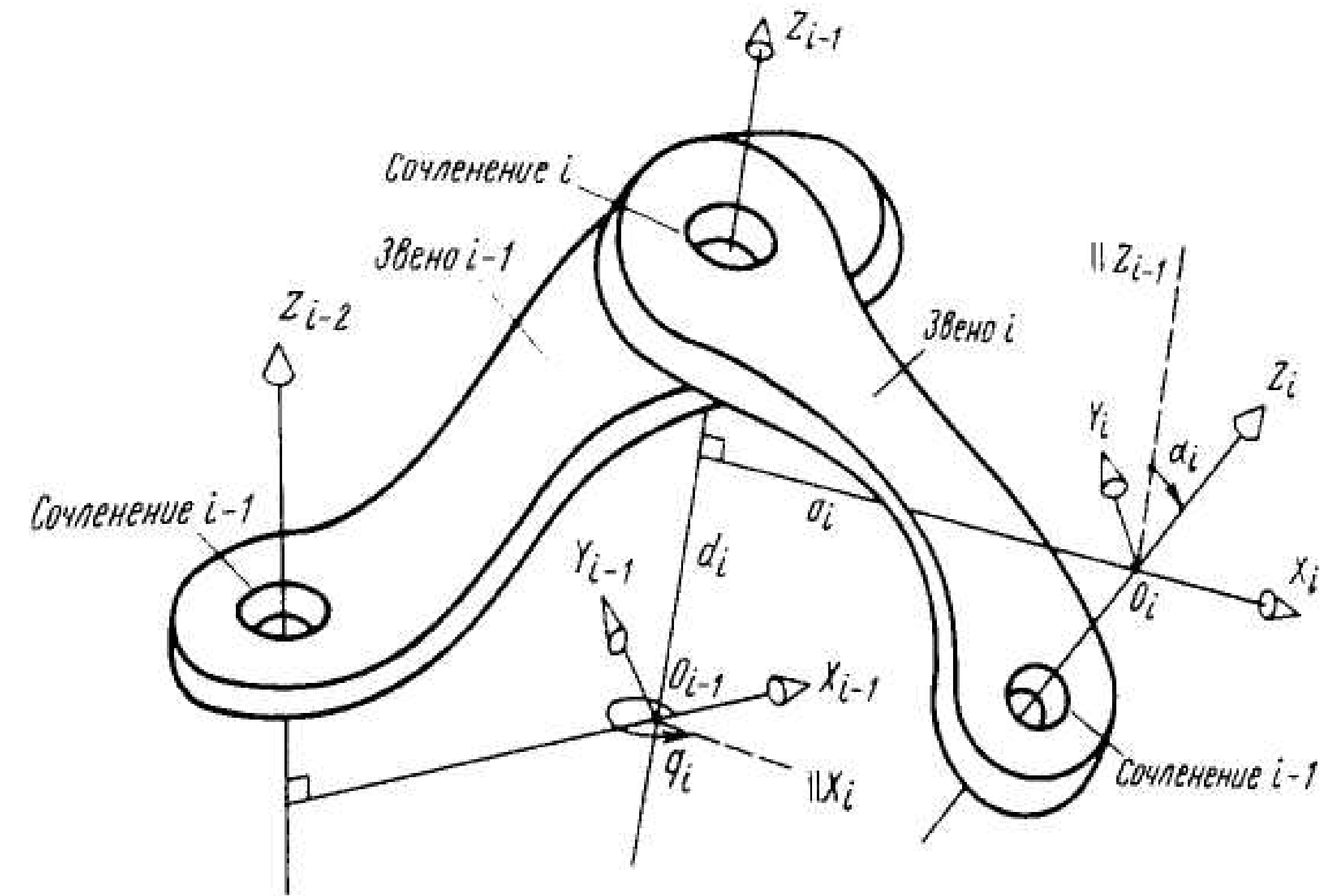


Рис. 1.19. Система координат Денавита — Хартенберга

- Шаг 1. Построение абсолютной системы координат. Построить правую ортогональную систему координат O_0, X_0, Y_0, Z_0 , направив Z_0 вдоль оси первого сочленения в направлении схвата.
- Шаг 2. Инициализация и цикл. Для всех $i = 1, 2, \dots, N$ выполнить шаги 3–6.
- Шаг 3. Построение Z_i . Направить ось Z_i вдоль оси $(i + 1)$ -го шарнира. При $i = N$ (т.е. для схвата) выберем ось Z_N в направлении оси Z_{N-1} .
- Шаг 4. Построение начала i -й системы координат. Выбрать начало i -й системы координат в точке пересечения осей Z_{i-1} и Z_i или в точке пересечения оси Z_i и общей нормали к осям Z_{i-1} и Z_i (если оси Z_{i-1} и Z_i не пересекаются).

- Шаг 5. Построение оси X_i .
Направить ось X_i вдоль общей нормали к осям Z_{i-1} и Z_i (вдоль вектора (z_{i-1}, z_i) , где z_{i-1} и z_i — орты соответствующей системы координат).
- Шаг 6. Построение оси Y_i .
Направить ось Y_i так, чтобы полученная в результате система координат $O_i X_i Y_i Z_i$ была правосторонней.
- Шаг 7. Нахождение параметров.
Для всех $i = 1, 2, \dots, N$ выполнить шаги 8–11.
- Шаг 8. Нахождение d_i .
Параметр d_i равен расстоянию от начала $(i-1)$ -й системы координат до точки пересечения осей Z_{i-1} и X_i , измеренному в направлении оси Z_{i-1} . Если i -е сочленение телескопическое, то d_i является обобщенной координатой.
- Шаг 9. Нахождение a_i .
Параметр a_i равен расстоянию от точки пересечения осей Z_{i-1} и X_i до начала i -й системы координат, измеренному в направлении оси X_i .
- Шаг 10. Нахождение q_i .
Параметр q_i равен углу поворота оси X_{i-1} вокруг оси Z_{i-1} до ее совпадения с осью X_i . Если i -е сочленение вращательное, то q_i является обобщенной координатой.
- Шаг 11. Нахождение α_i .
Параметр α_i равен углу поворота оси Z_{i-1} вокруг оси X_i до ее совпадения с осью Z_i .
- Шаг 12. Конец.

Описанный алгоритм построения систем координат Денавита — Хартенберга имеет рекуррентный характер, т.е. позволяет строить

системы координат, передвигаясь от звена к звену, начиная с основания и кончая схватом.

Четыре числа d, a, q, α полностью задают расположение каждого звена относительно предыдущего, при этом либо параметр d (для телескопического соединения), либо параметр q (для вращательного сочленения) является обобщенной координатой. Здесь нет противоречия с утверждением, что положение твердого тела задается шестью числами, поскольку в последнем случае речь идет о свободном движении твердого тела, у нас же звено снабжено связями, оставляющими ему лишь одну степень свободы.

В качестве примеров рассмотрим построение систем координат Денавита — Хартенберга для известных промышленных манипуляторов.

Система координат трехстепенного манипулятора М20П, работающего в цилиндрической системе координат, и его кинематические параметры приведены на рис. 1.20.

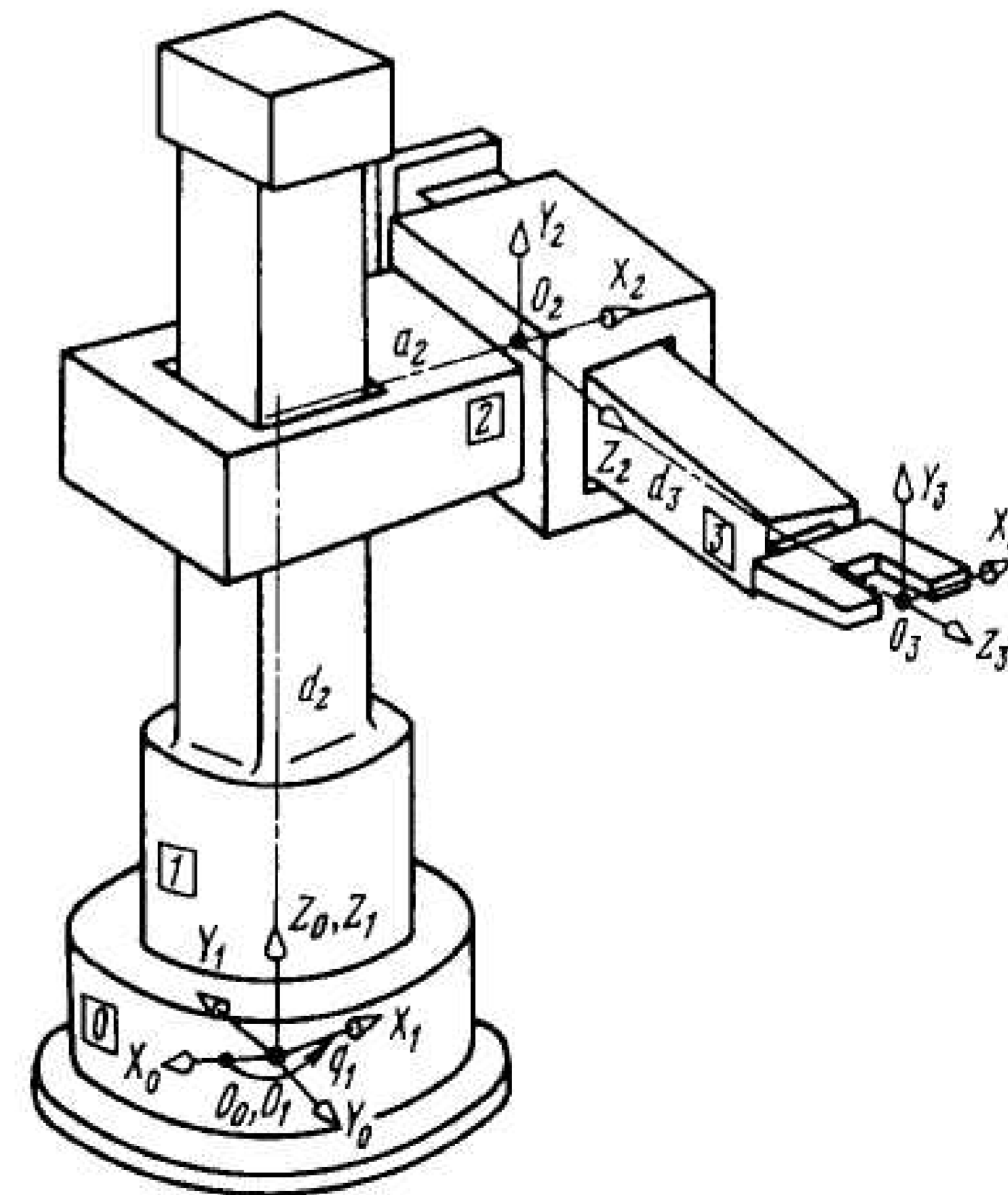


Рис. 1.20. Манипулятор М20П

Система координат пятистепенного манипулятора IRIS-11 и его кинематические параметры приведены на рис. 1.21.

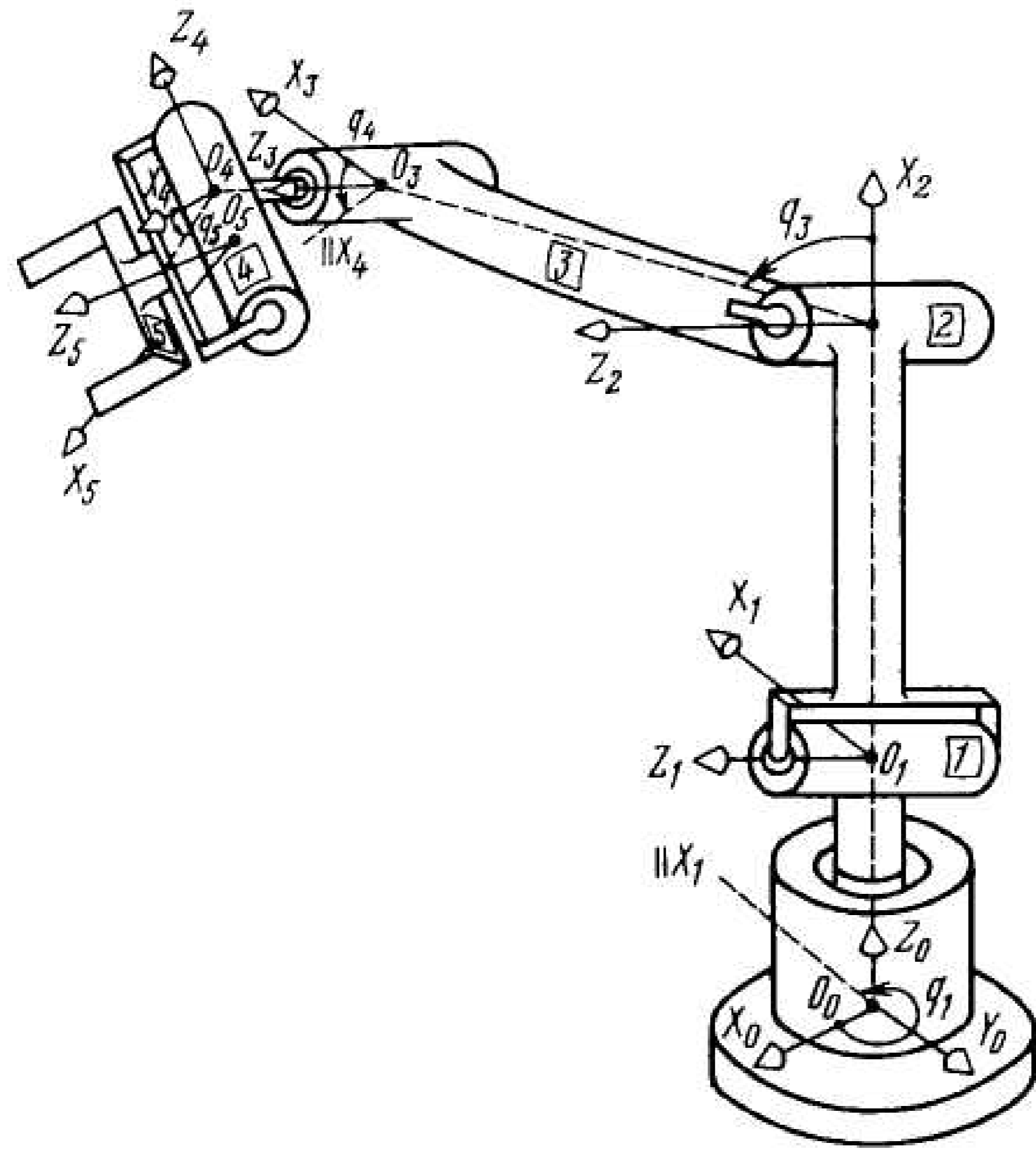


Рис. 1.21. Манипулятор IRIS-11

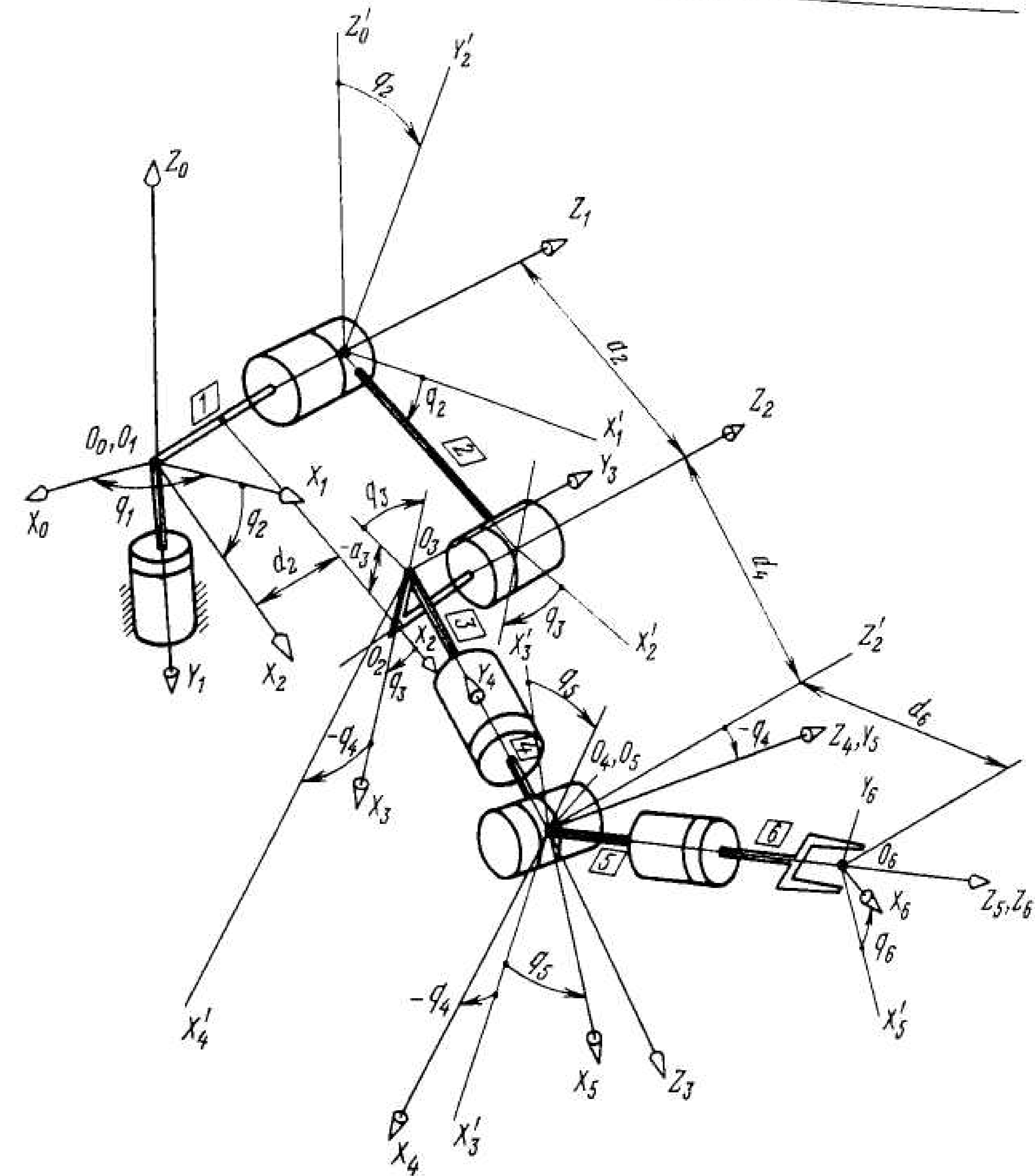


Рис. 1.22. Манипулятор PUMA-600

Система координат шестистепенного манипулятора PUMA-600 и его кинематические параметры представлены на рис. 1.22.

Система координат шестистепенного манипулятора RAMP-2000 и его кинематические параметры даны на рис. 1.23.

Контрольные вопросы и задания

1. Сколько звеньев имеет N -звенный манипулятор? Нарисуйте кинематическую схему трехзвенного манипулятора, работающего в декартовой системе координат.
2. К какому классу принадлежат кинематические пары, образуемые звеньями манипулятора? Как Вы думаете, к какому классу можно отнести кинематические пары, образуемые суставами руки человека, и является ли рука манипулятором в смысле приведенного определения?

3. Почему все существующие манипуляторы устроены так, что их звенья образуют кинематические пары пятого класса? Какой двигатель можно использовать, чтобы управлять i -м звеном, образующим с $(i-1)$ -м кинематическую пару четвертого класса?
4. Что понимают под положением звена манипулятора? Является ли соответствующая шестерка чисел вектором, если нет, то почему?
5. В чем состоят преимущества и недостатки использования однородных преобразований при построении кинематической модели манипулятора?

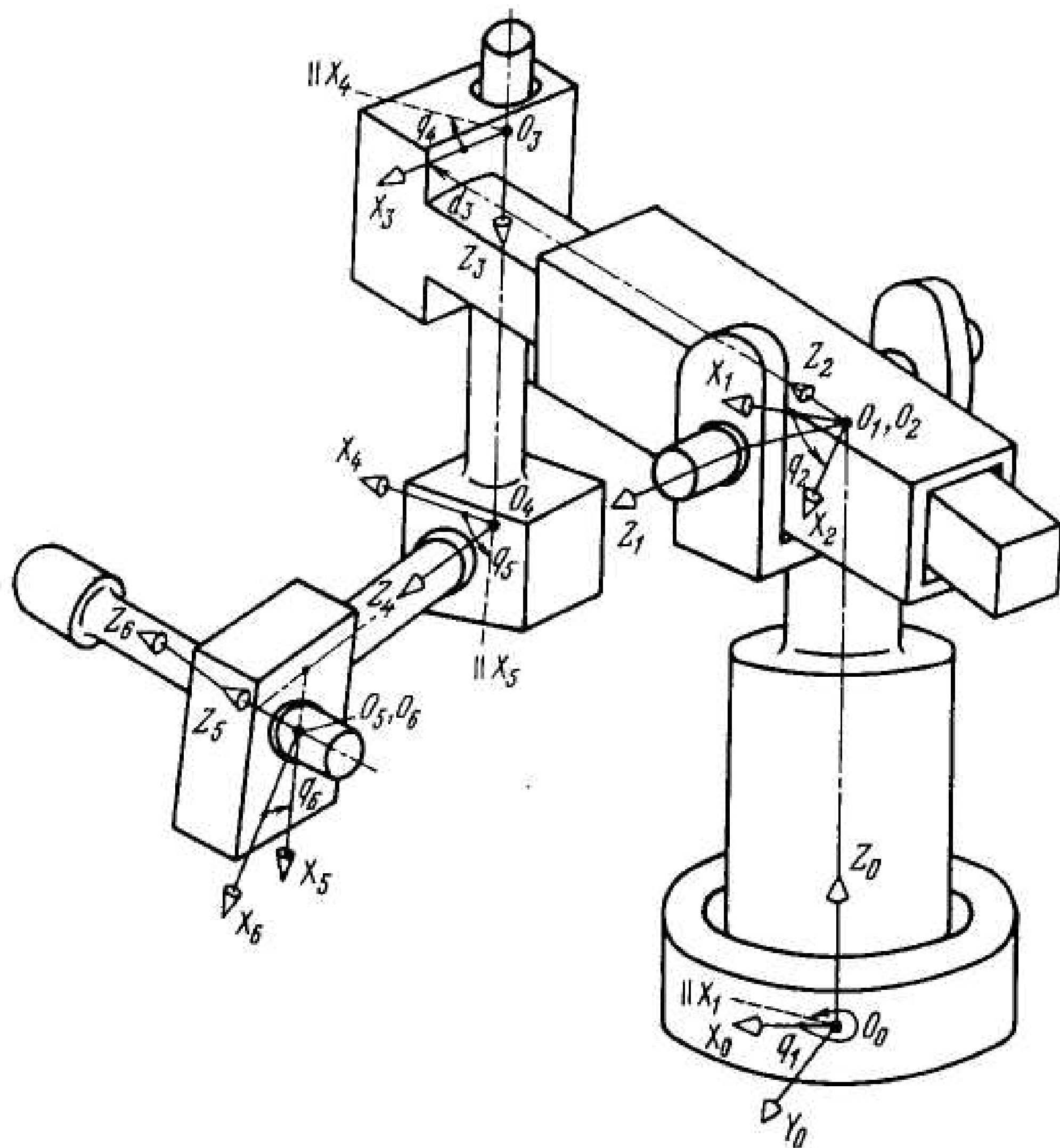


Рис. 1.23. Манипулятор RAMP-2000

6. Как построить системы координат звеньев манипулятора в соответствии с методом Денавита — Хартенберга? Является ли этот метод построения однозначным?

7. Объясните, почему положение i -го звена относительно $(i-1)$ -го, составляющего с i -м звеном кинематическую пару пятого класса и задаваемого матрицей A_i , однозначно определяется четверкой чисел d, a, α, q , одно из которых является обобщенной координатой?

2. ПОЛОЖЕНИЕ МАНИПУЛЯТОРА В РАБОЧЕМ ПРОСТРАНСТВЕ

Глава 2 посвящена решению основных задач, связанных с определением соотношений между координатами схвата манипулятора, заданными в различной форме: с одной стороны, положение схвата однозначно определяется обобщенными координатами многосвязного механизма, а с другой — шестью числами, задающими положение и ориентацию связанной с ним системы координат. Решены прямая и обратная задачи по положению, а также введено понятие рабочего пространства и изучены его свойства.

2.1. Прямая позиционная задача

Прямую позиционную задачу формулируют следующим образом [60; 63]: по заданному вектору обобщенных координат $q = (q_1, q_2, \dots, q_N)^T$ найти положение и ориентацию схвата $s = f(q)$. Положение и ориентацию схвата мы будем искать в форме матрицы однородного преобразования (1.46):

$$T = \begin{pmatrix} R & p \\ 000 & 1 \end{pmatrix}.$$

Пусть $A_i, i = 1, 2, \dots, N$ — матрицы, задающие переход от системы координат i -го звена к системе координат $(i-1)$ -го звена. Тогда, очевидно, матрица

$$T_N = A_1 A_2 \dots A_N \quad (2.1)$$

является решением поставленной задачи. Вводя матрицу

$$T_i = A_1 A_2 \dots A_i, \quad (2.2)$$

для (2.1) получаем следующее рекуррентное соотношение:

$$T_i = T_{i-1} A_i, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (2.3)$$

$$T_0 = E.$$

Соотношение (2.3) позволяет не только записать решение прямой задачи о положении схвата в компактной форме, но также найти положение и ориентацию всех звеньев манипулятора, поскольку матрица T_i определяет положение и ориентацию i -го звена.

Ясно, что для определения положения k -го звена относительно l -го ($k < l$) можно использовать следующее соотношение:

$$T_k = A_{k+1} A_{k+2} \dots A_l.$$

Вид матриц A_i , входящих в (2.3), зависит от способа выбора систем координат звеньев.

Определим вид матриц в случае использования представления Денавита — Хартенберга. Согласно способу построения систем координат (см. § 1.4), для совмещения $(i-1)$ -й системы координат $O_{i-1}X_{i-1}Y_{i-1}Z_{i-1}$ с i -й системой координат $O_iX_iY_iZ_i$ необходимо выполнить следующую последовательность операций.

1. Поворот вокруг оси Z_{i-1} на угол q_i (оси X_{i-1} и X_i параллельны).
2. Сдвиг вдоль оси Z_{i-1} на d_i (оси X_{i-1} и X_i совпадают).
3. Сдвиг вдоль оси X_{i-1} на a_i (начала координат O_{i-1} и O_i совпадают).
4. Поворот вокруг оси X_{i-1} на угол α_i (системы координат $O_iX_iY_iZ_i$ и $O_{i-1}X_{i-1}Y_{i-1}Z_{i-1}$ совпадают).

Каждую из этих операций можно представить соответствующей однородной матрицей:

$$\text{Rot}(z, q_i) = \begin{pmatrix} & & & 0 \\ & R_{z, q_i} & & 0 \\ & & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.4)$$

$$\text{Trans}(z, d_i) = \begin{pmatrix} & & & 0 \\ & E & & 0 \\ & & & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.5)$$

$$\text{Trans}(x, a_i) = \begin{pmatrix} & & a_i & \\ & E & & 0 \\ & & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.6)$$

$$\text{Rot}(x, \alpha_i) = \begin{pmatrix} & & & 0 \\ & R_{x, \alpha_i} & & 0 \\ & & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.7)$$

где матрицы поворота R_{x, α_i} , R_{z, q_i} определяются выражениями (1.9)–(1.11). Тогда имеем

$$A_i = \text{Rot}(Z_i, q_i) \text{Trans}(Z_i, d_i) \text{Trans}(X_i, a_i) \text{Rot}(X_i, \alpha_i).$$

Перемножая матрицы, стоящие справа, окончательно получаем

$$A_i(d_i, a_i, q_i, \alpha_i) = \begin{pmatrix} c_{q_i} & -c_{\alpha_i} s_{q_i} & s_{\alpha_i} s_{q_i} & a_i c_{q_i} \\ s_{q_i} & c_{\alpha_i} c_{q_i} & -s_{\alpha_i} c_{q_i} & a_i s_{q_i} \\ 0 & s_{\alpha_i} & c_{\alpha_i} & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.8)$$

Используя равенство (1.40), обратную к A_i матрицу (т.е. матрицу перехода от $(i-1)$ -й к i -й системе координат) представим в виде

$$A_i^{-1}(d_i, a_i, q_i, \alpha_i) = \begin{pmatrix} c_{q_i} & s_{q_i} & 0 & -a_i \\ -c_{\alpha_i} s_{q_i} & c_{\alpha_i} c_{q_i} & s_{\alpha_i} & -d_i s_{\alpha_i} \\ s_{\alpha_i} s_{q_i} & -s_{\alpha_i} c_{q_i} & c_{\alpha_i} & -d_i c_{\alpha_i} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.9)$$

Таким образом, соотношения (2.3) совместно с (2.5) решают прямую позиционную задачу.

Пример 2.1. Решить прямую кинематическую задачу для манипулятора типа М20П (см. рис. 1.20).

Решение. Запишем матрицы перехода в виде

$$A_1 = \begin{pmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда матрицы T_i , $i=1, 2, 3$, принимают вид

$$T_0 = E, T_1 = A_1,$$

$$T_2 = T_1 A_2 = \begin{pmatrix} c_1 & 0 & s_1 & c_1 a_2 \\ s_1 & 0 & -c_1 & s_1 a_2 \\ 0 & 1 & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$T_3 = T_2 A_3 = \begin{pmatrix} c_1 & 0 & s_1 & s_1 d_3 + c_1 a_2 \\ s_1 & 0 & -c_1 & -c_1 d_3 + s_1 a_2 \\ 0 & 1 & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Обозначая $d_2 = z$, $d_3 = r$, $q_1 = q$, $a_2 = a$, окончательно получаем соотношения, описывающие:

положение схвата

$$p_x = r \sin q + a \cos q,$$

$$p_y = -r \cos q + a \sin q,$$

$$p_z = z;$$

ориентацию схвата

$$x_3 = (\cos q, \sin q, 0)^T,$$

$$y_3 = (0, 0, 1)^T,$$

$$z_3 = (\sin q, -\cos q, 0)^T.$$

Например, при $q = 180^\circ$ имеем

$$p_x = -a, p_y = r, p_z = z,$$

$$x_3 = (-1, 0, 0)^T, y_3 = (0, 0, 1)^T, z_3 = (0, 1, 0)^T,$$

что согласуется с геометрическими соображениями.

Пример 2.2. Решить прямую задачу для манипулятора PUMA (см. рис. 1.22).

Решение. Найдем матрицы перехода. Имеем

$$A_1 = \begin{pmatrix} c_1 & 0 & -s_1 & 0 \\ s_1 & 0 & c_1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & a_2 c_2 \\ s_2 & c_2 & 0 & a_2 s_2 \\ 0 & 0 & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} c_3 & 0 & s_3 & a_3 c_3 \\ s_3 & 0 & -c_3 & a_3 s_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} c_4 & 0 & s_4 & 0 \\ s_4 & 0 & -c_4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & d_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A_5 = \begin{pmatrix} c_5 & 0 & s_5 & 0 \\ s_5 & 0 & -c_5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, A_6 = \begin{pmatrix} c_6 & -s_6 & 0 & 0 \\ s_6 & c_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Для определения матрицы T_6 представим ее следующим образом:

$$T_6 = A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6 = A_{13} A_{46},$$

где $A_{13} = A_1 A_2 A_3$, $A_{46} = A_4 A_5 A_6$.

Записывая матрицу T_6 в виде

$$T_6 = \begin{pmatrix} x_{6x} & y_{6x} & z_{6x} & p_x \\ x_{6y} & y_{6y} & z_{6y} & p_y \\ x_{6z} & y_{6z} & z_{6z} & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

и выполняя необходимые вычисления, получаем

$$x_{6x} = c_1 [c_{23} (c_4 c_5 c_6 - s_4 s_6) - s_{23} s_5 s_6] - s_1 (s_4 c_5 c_6 + c_4 s_6),$$

$$x_{6y} = s_1 (c_{23} (c_4 c_5 c_6 - s_4 s_6) - s_{23} s_5 s_6) + c_1 (s_4 c_5 c_6 + c_4 s_6),$$

$$x_{6z} = -s_{23} (c_4 c_5 c_6 - s_4 s_6) - c_{23} s_4 s_6,$$

$$y_{6x} = c_1 (-c_{23} (c_4 c_5 s_6 + s_4 c_6) + s_{23} s_5 s_6) - s_1 (-s_4 c_5 c_6 + c_4 c_6),$$

$$y_{6y} = s_1 (-c_{23} (c_4 c_5 s_6 + s_4 c_6) + s_{23} s_5 s_6) + c_1 (-s_4 c_5 c_6 + c_4 c_6),$$

$$y_{6z} = s_{23} (c_4 c_5 s_6 + s_4 c_6) + c_{23} s_5 s_6,$$

$$z_{6x} = c_1(c_{23}c_4s_5 + s_{23}c_5) - s_1s_4s_5,$$

$$z_{6y} = s_1(c_{23}c_4s_5 + s_{23}c_5) + c_1s_4s_5,$$

$$z_{6z} = -s_{23}c_4c_5 + c_{23}c_5,$$

$$p_x = c_1(d_6(c_{23}c_4s_5 + s_{23}c_5) + s_{23}d_4 + a_3c_{23} + a_2c_2) - s_1(d_6s_4s_5 + d_2),$$

$$p_y = s_1(d_6(c_{23}c_4s_5 + s_{23}c_5) + s_{23}d_4 + a_3c_{23} + a_2c_2) + c_1(d_6s_4s_5 + d_2),$$

$$p_z = d_6(c_{23}c_5 + s_{23}c_4s_5) + c_{23}d_4 + a_3c_{23} - a_2s_2.$$

Пример 2.3. Составить для манипулятора PUMA (см. рис. 1.22) рекуррентный алгоритм, позволяющий решить прямую позиционную задачу.

Решение. Запишем соотношение

$$(x \ y \ z \ w) \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = ax + by + cz + dw.$$

Тогда, используя соотношение (2.3) и обозначая матрицу положения i -го звена в абсолютной системе координат следующим образом:

$$T_i = \begin{pmatrix} x_i & y_i & z_i & p_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

получаем векторы, определяющие положение и ориентацию всех звеньев.

Основание:

$$\mathbf{x}_0 = (1, 0, 0)^T, \quad \mathbf{y}_0 = (0, 1, 0)^T, \quad \mathbf{z}_0 = (0, 0, 1)^T, \quad \mathbf{p}_0 = (0, 0, 0)^T.$$

Первое звено:

$$\mathbf{x}_1 = c_1\mathbf{x}_0 + s_1\mathbf{y}_0, \quad \mathbf{y}_1 = -\mathbf{z}_0, \quad \mathbf{z}_1 = -s_1\mathbf{x}_0 + c_1\mathbf{y}_0, \quad \mathbf{p}_1 = 0.$$

Второе звено:

$$\mathbf{x}_2 = c_2\mathbf{x}_1 + s_2\mathbf{y}_1, \quad \mathbf{y}_2 = -s_2\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{y}_1, \quad \mathbf{z}_2 = \mathbf{z}_1, \\ \mathbf{p}_2 = a_2c_2\mathbf{x}_1 + a_2s_2\mathbf{y}_1 + d_2\mathbf{z}_1 + \mathbf{p}_1 = a_2\mathbf{x}_2 + d_2\mathbf{z}_1 + \mathbf{p}_1.$$

Третье звено:

$$\mathbf{x}_3 = c_3\mathbf{x}_2 + s_3\mathbf{y}_2, \quad \mathbf{y}_3 = \mathbf{z}_2, \quad \mathbf{z}_3 = s_3\mathbf{x}_2 - c_3\mathbf{y}_2, \quad \mathbf{p}_3 = a_3\mathbf{x}_3 + \mathbf{p}_2.$$

Четвертое звено:

$$\mathbf{x}_4 = c_4\mathbf{x}_3 + s_4\mathbf{y}_3, \quad \mathbf{y}_4 = -\mathbf{z}_3, \quad \mathbf{z}_4 = -s_4\mathbf{x}_3 + c_4\mathbf{y}_3, \quad \mathbf{p}_4 = \mathbf{p}_3 + d_4\mathbf{z}_3.$$

Пятое звено:

$$\mathbf{x}_5 = c_5\mathbf{x}_4 + s_5\mathbf{y}_4, \quad \mathbf{y}_5 = \mathbf{z}_4, \quad \mathbf{z}_5 = s_5\mathbf{x}_4 - c_5\mathbf{y}_4, \quad \mathbf{p}_5 = \mathbf{p}_4.$$

Шестое звено:

$$\mathbf{x}_6 = c_6\mathbf{x}_5 + s_6\mathbf{y}_5, \quad \mathbf{y}_6 = -s_6\mathbf{x}_5 + c_6\mathbf{y}_5, \quad \mathbf{z}_6 = \mathbf{z}_5, \quad \mathbf{p}_6 = d_6\mathbf{z}_5 + \mathbf{p}_5.$$

Приведенное решение прямой позиционной задачи удобно в вычислительном плане, и именно его будем использовать в дальнейшем.

2.2. Геометрия рабочего пространства манипулятора

Решение прямой позиционной задачи (см. § 2.1) позволяет определить положение и ориентацию в пространстве схвата манипулятора, удерживаемого им инструмента или транспортируемого объекта при условии, что известны значения обобщенных координат манипулятора q_i , $i = 1, \dots, N$. Эти значения могут изменяться в определенных пределах, которые обусловлены конструкцией механизма, или их специально назначают из соображений безопасности работы манипулятора:

$$q_{i \min} \leq q_i \leq q_{i \max}, \quad i = 1, \dots, N. \quad (2.10)$$

Совокупность условий (2.10) определяет область S_q изменения обобщенных координат. Поскольку каждому сочетанию обобщенных координат соответствует некоторое положение схвата (объекта манипулирования), области S_q изменения обобщенных координат соответствует некоторая область S_r в пространстве рабочей сцены, в которой может находиться схват. Эту область называют *рабочим пространством манипулятора* (а также рабочей зоной, зоной достижимости).

2.2.1. Конфигурация рабочего пространства и его объем

Свяжем со схватом манипулятора некоторую характерную точку, например точку, симметрично расположенную между губками схвата.

Введем в рабочем пространстве робота неподвижную систему координат $OXYZ$. Эту систему удобно связать со стойкой (основанием) манипулятора, расположив оси X и Y в горизонтальной плоскости, а ось Z направив вдоль оси первой кинематической пары, которая, как правило, вертикальна (рис. 2.1, а, б, в).

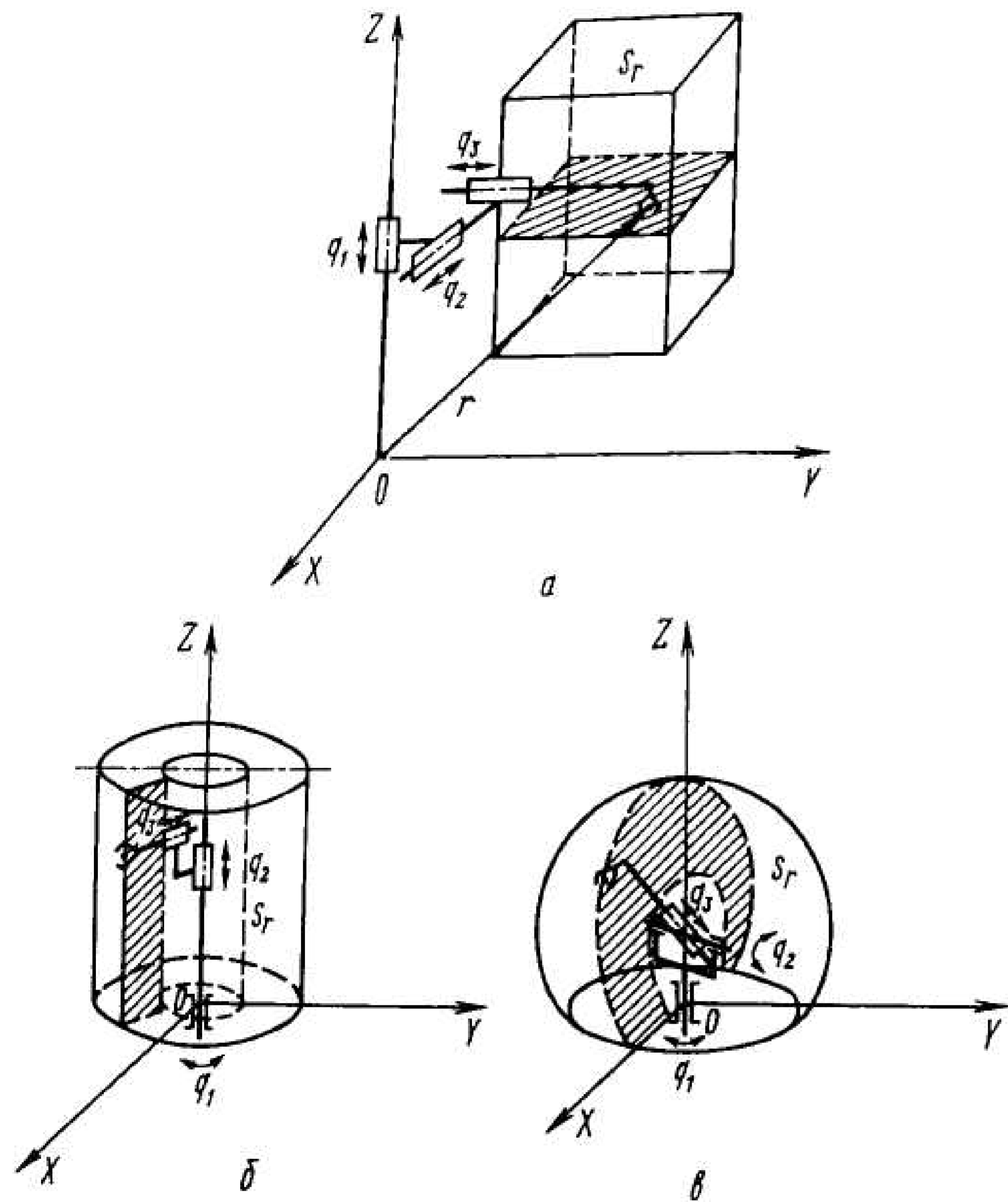


Рис. 2.1. Конфигурация рабочего пространства: а — декартова система координат; б — цилиндрическая система координат; в — сферическая система координат

Обозначим через r радиус-вектор характерной точки в системе координат $OXYZ$. Положение этой точки зависит от текущего значения относительных углов поворота в шарнирах и относительных перемещений в поступательных кинематических парах, т.е. от обобщенных координат $q_i, i = 1, \dots, N$.

Решая прямую кинематическую задачу для манипуляционного механизма, получаем зависимость

$$r = r(q_1, q_2, \dots, q_N), \quad (2.11)$$

определяющую положение схвата или рабочего инструмента как функцию обобщенных координат манипулятора.

Значения q_i могут изменяться в пределах заданных ограничений, определяющих область S_q обобщенных координат (2.10). Каждой точке $q \in S_q$ можно поставить в соответствие характерную точку в пространстве рабочей сцены. Другими словами, каждому вектору обобщенных координат q из области S_q соответствует некоторое положение манипулятора и его схвата. При этом области допустимых значений обобщенных координат S_q будет соответствовать область S_r допустимых значений декартовых координат схвата в пространстве рабочей сцены, которая характеризует рабочее пространство манипулятора.

Граница рабочего пространства S_r определяется кинематической схемой манипулятора. Так, для манипулятора, работающего в декартовой системе координат (рис. 2.1, а), это параллелепипед, грани которого параллельны осям координат. Для манипулятора, работающего в цилиндрической системе координат (рис. 2.1, б) рабочее пространство представляет собой часть цилиндрического объема. Для манипулятора, сконструированного в сферической системе координат (рис. 2.1, в), — часть сферы. Более сложную конфигурацию имеет рабочее пространство манипулятора антропоморфного типа.

Во всех рассмотренных случаях рабочее пространство обладает определенной симметрией, следовательно, оно характеризуется одним из его сечений, т.е. плоской рабочей зоной. На рис. 2.1, а эта симметрия обусловлена наличием поступательной кинематической пары, смещающей построенную зону вдоль оси OZ , на рис. 2.1, б, в — наличием вращательной кинематической пары, которая эту зону поворачивает относительно вертикальной оси OZ .

Отображение допустимой области обобщенных координат в пространство рабочей сцены однозначно, но не взаимнооднозначно, так как одному и тому же положению характерной точки C могут соответствовать, вообще говоря, различные положения манипулятора (рис. 2.2). Если кинематическая схема манипулятора не имеет избыточности (см. Введение), т.е. число обобщенных координат совпадает с числом степеней свободы схвата, то существует конечное множество конфигураций кинематической

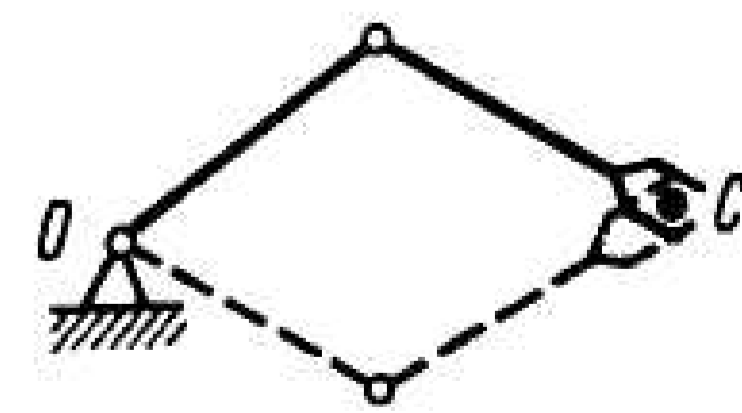


Рис. 2.2. Два возможных положения для манипулятора без избыточности

схемы манипулятора, соответствующее одному и тому же положению схвата. Это утверждение следует из того, что при неподвижном схвате число степеней подвижности механизма равно нулю, т.е. он представляет собой ферму.

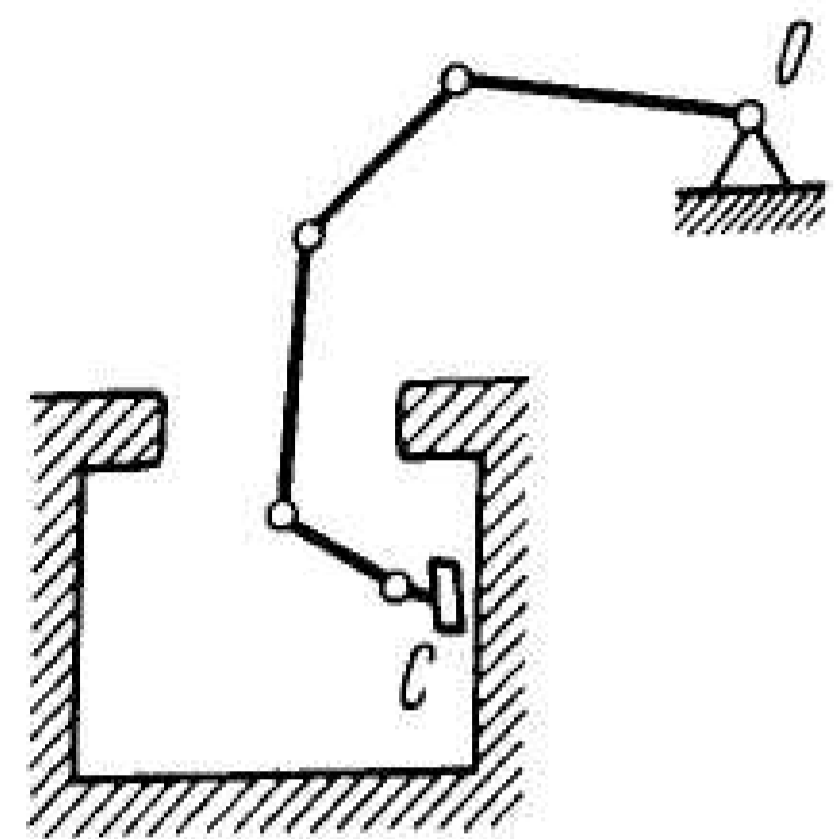


Рис. 2.3. Манипулятор с избыточными степенями подвижности

Для манипуляционных механизмов, обладающих избыточными степенями подвижности, движение звеньев может осуществляться при неподвижном схвате, что позволяет преодолевать внешние препятствия или проводить работы во внутренних объемах (рис. 2.3). Такое свойство называют маневренностью манипулятора. Характеристикой маневренности может служить разность между числом степеней подвижности манипулятора и числом степеней свободы схвата. Эта характеристика позволяет определить то число степеней подвижности механизма, которое остается после наложения внешних связей на движение схвата.

В общем случае построение границы рабочей зоны связано с решением прямой кинематической задачи. Однако часто границу рабочей зоны S_r проще определить непосредственно из геометрических соотношений, следующих из описания кинематической схемы манипулятора.

В общем случае построение границы рабочей зоны связано с решением прямой кинематической задачи. Однако часто границу рабочей зоны S_r проще определить непосредственно из геометрических соотношений, следующих из описания кинематической схемы манипулятора.

Пример 2.4. Определить границу рабочего пространства двухзвенного плоского манипулятора (рис. 2.4) при условии $|\theta_1| \leq d_1$, $|\theta_2| \leq d_2$, $l_1 = l_2$.

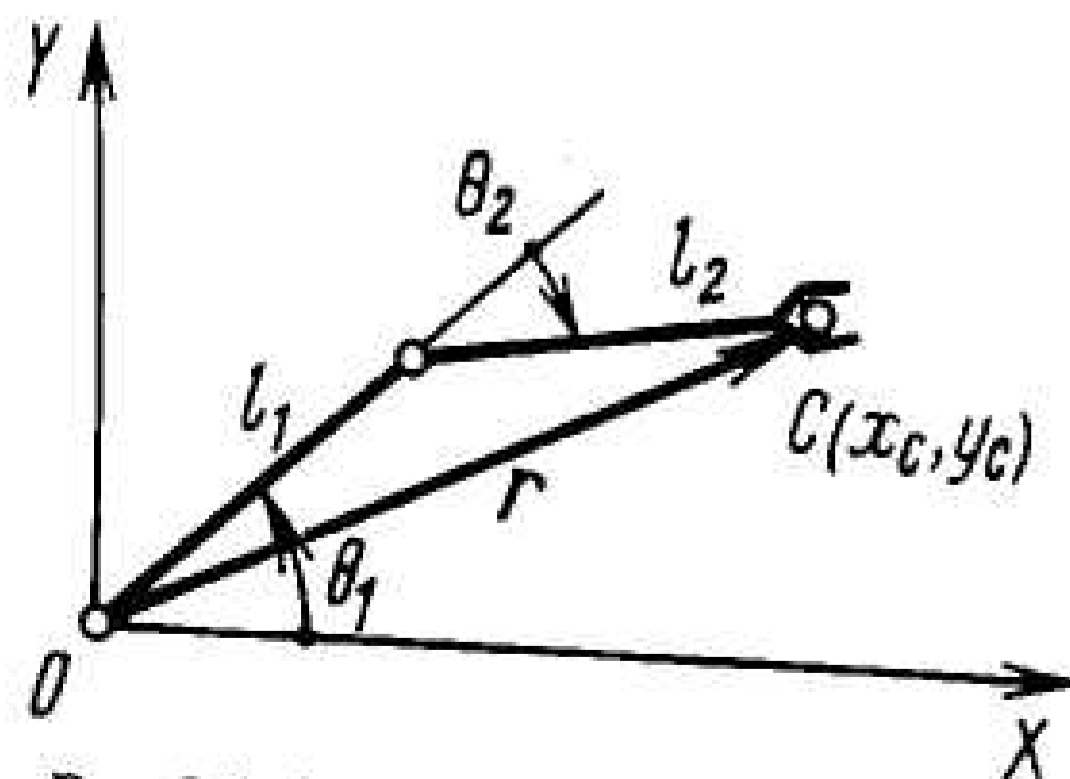


Рис. 2.4. Схема двухзвенного плоского манипулятора

Решение. В данном случае $q_1 = \theta_1$, $q_2 = \theta_2$, $r = [x_c, y_c]^T$ и уравнение (2.11) имеет вид

$$x_c = l_1 \cos q_1 + l_2 \cos(q_1 + q_2),$$

$$y_c = l_1 \sin q_1 + l_2 \sin(q_1 + q_2).$$

Изменяя q_1 в пределах $-d_1 \leq q_1 \leq d_1$ при $q_2 = 0$, получаем участок границы Γ_1 (рис. 2.5, а) как дугу окружности

радиуса $l_1 + l_2$. Участок Γ_2 образован дугой окружности радиуса l_2 при $q_1 = \pm d_1$, $-d_2 \leq q_2 \leq d_2$. Участок Γ_3 образован дугой окружности радиуса l_1 и соответствует случаю $q_2 = d_2$, $-d_1 \leq q_1 \leq d_1$.

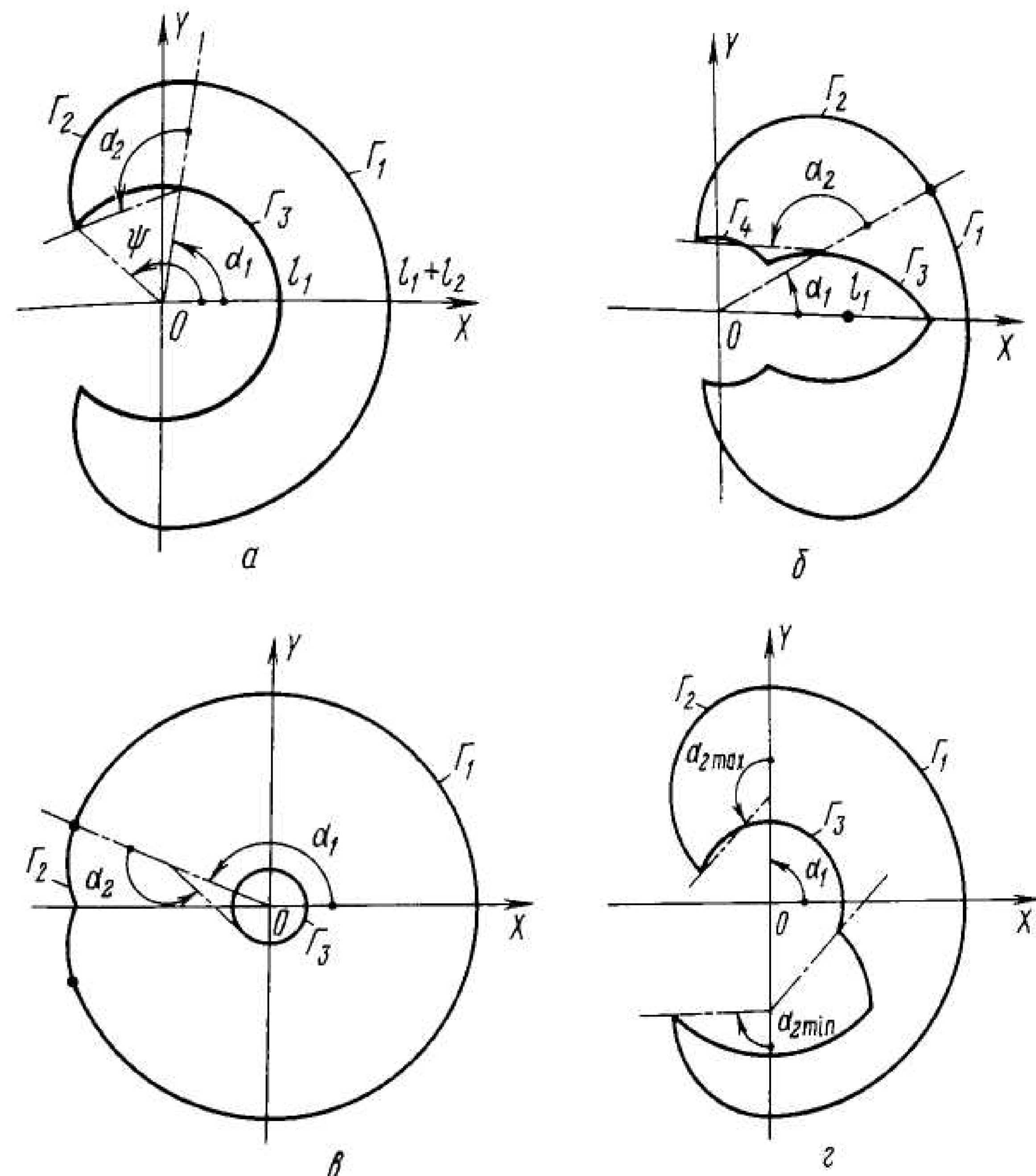


Рис. 2.5. Конфигурация рабочего пространства плоского двухзвенного манипулятора: а — $d_1 = 80^\circ$, $d_2 = 120^\circ$; б — $d_1 = 30^\circ$, $d_2 = 160^\circ$; в — $d_1 = d_2 = 160^\circ$; г — случай несимметричных ограничений

Граница рабочего пространства зависит от величин d_1 , d_2 . На рис. 2.5, а $d_1 = 80^\circ$, $d_2 = 120^\circ$. На рис. 2.5 б, в рассмотрены случаи $d_1 = 30^\circ$, $d_2 = 150^\circ$ и $d_1 = d_2 = 160^\circ$. Детальный анализ (см. [26, с. 121])

позволяет установить, что случай *a* имеет место, когда угол ψ (см. рис. 2.5, *a*) удовлетворяет условию $\psi \leq 2d_1$, а случай *b* — когда $\psi > 2d_1$, причем ψ можно найти по формуле

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{l_1 \sin d_1 + l_2 \sin(d_1 + d_2)}{l_1 \cos d_1 + l_2 \cos(d_1 + d_2)}.$$

Для того чтобы граница была односвязной (как в случаях *a* и *b*), необходимо потребовать, чтобы выполнялись следующие соотношения (см. [26, с. 120]):

$$\begin{aligned} l_1 \sin d_1 + l_2 \sin(d_1 + d_2) &> 0 \text{ при } d_1 + d_2 < 3\pi/2, \\ l_1 \sin d_1 - l_2 &> 0 \text{ при } d_1 + d_2 \geq 3\pi/2. \end{aligned}$$

Заметим, что в том случае, когда ограничения отличны от рассмотренных в примере 2.4, граница рабочего пространства может быть несимметричной. Например, при условиях $|\theta_1| \leq \pi/2$, $-\pi/2 \leq \theta_2 \leq 3\pi/4$ граница показана на рис. 2.5, *г*.

Конфигурация и размеры рабочей зоны являются важными техническими характеристиками манипулятора, включаемыми в его паспортные данные (см. [28]). Их используют для того, чтобы правильно расположить манипулятор относительно обслуживаемого объекта (станка, конвейера и т.п.) в пространстве рабочей сцены.

Объем рабочего пространства манипулятора является его важной численной характеристикой:

$$V = \iiint_{S_r} dx dy dz. \quad (2.12)$$

Для манипулятора с определенной кинематической схемой объем рабочего пространства может быть большим или меньшим в зависимости от ограничений на обобщенные координаты. Увеличение объема рабочего пространства манипулятора без существенного увеличения габаритных размеров его конструкции является одной из задач проектирования манипуляционных механизмов.

Для того чтобы охарактеризовать качество конструкции манипулятора, связанное с объемом рабочего пространства, необходимо соотнести этот объем с линейными размерами конструкции. Один из способов состоит в следующем.

Введем обобщенную полную длину манипуляционного механизма (без поступательных кинематических пар), используя формулу

$$L = \sum_{i=1}^n l_i + \sum_{i=1}^n d_i,$$

где l_i — длина звеньев; d_i — расстояние между звеньями, которое можно определить как расстояние между двумя общими перпендикулярами к осям звеньев в $(i+1)$ -м и i -м и в i -м и $(i-1)$ -м сочленениях. Значения величин d_i равны нулю в случае параллельности осей соседних звеньев.

Для манипуляционного механизма с вращательными парами, имеющего произвольную кинематическую схему, справедлива теорема Ли-Янга, в соответствии с которой отношение

$$V_L = \frac{V}{L^3} \quad (2.13)$$

является постоянной величиной.

Обоснование этого факта можно найти в [63, с. 206].

Максимальное значение показателя Ли-Янга V_L достигается для гипотетического манипулятора, работающего в сферической системе координат, но не имеющего ограничений в кинематических парах, благодаря чему его рабочее пространство представляет собой полную (без полостей и вырезов) сферу радиуса L . Ее объем равен

$$V = 4\pi L^3 / 3.$$

Следовательно, максимальное значение рассматриваемого показателя составляет

$$V_L = V/L^3 = 4\pi/3 \approx 4,188 = V_{L_{\max}}.$$

С этой константой можно сопоставлять показатель Ли-Янга для реальных промышленных роботов.

Введем, кроме того, нормированный показатель объема рабочего пространства $V_N = V_L/V_{L_{\max}}$. Например, для робота PUMA-600, имеющего $L = 1,295$ м, $V = 3,005$ м³, эти показатели равны $V_L = 1,39$; $V_N = 0,332$ [63, с. 207].

Еще одним численным показателем, связанным с объемом рабочего пространства, является *предел досягаемости схвата*. Он определяется либо как максимальная длина радиус-вектора, проведенного из начала координат системы $OXYZ$ в характерную точку схвата R_{\max} , либо как предел досягаемости по каждому из направлений осей координат:

$X_{\max}, Y_{\max}, Z_{\max}$. Обычно пределы досягаемости можно установить непосредственно из кинематических уравнений механизма.

Пример 2.5. Найти предел досягаемости R_{\max} для манипулятора, представляющего собой двухзвенный пространственный механизм общего вида с вращательными парами.

Решение. Свяжем со звеньями манипулятора системы координат в соответствии с правилами Денавита — Хартенберга (см. § 2.4): систему координат $Ox_0y_0z_0$ — с основанием манипулятора, а $O_2x_2y_2z_2$ — с его схватом. Тогда радиус-вектор R начала O_2 последней системы координат можно записать так:

$$R = A_1 A_2 R^{(2)},$$

где $R^{(2)} = [0 \ 0 \ 0 \ 1]^T$; A_1, A_2 — однородные матрицы вида (2.8), т.е.

$$A_i = \begin{pmatrix} \cos q_i & -\sin q_i \cos \alpha_i & \sin q_i \sin \alpha_i & a_i \cos q_i \\ \sin q_i & \cos q_i \cos \alpha_i & -\cos q_i \sin \alpha_i & a_i \sin q_i \\ 0 & \sin \alpha_i & \cos \alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где $i = 1, 2$; q_1, q_2 — обобщенные координаты манипулятора; d_i, α_i — константы, геометрический смысл которых был пояснен в § 2.1.

Перемножая однородные матрицы, получаем вектор

$$R = \begin{pmatrix} a_2 \cos q_1 \cos q_2 - a_2 \sin q_1 \sin q_2 \cos \alpha_1 + d_2 \sin q_1 \sin \alpha_1 + a_1 \cos q_1 \\ a_2 \cos q_2 \sin q_1 + a_2 \cos q_1 \sin q_2 \cos \alpha_1 - d_2 \cos q_1 \sin \alpha_1 + a_1 \sin q_1 \\ a_2 \sin q_2 \sin \alpha_1 + d_2 \cos \alpha_1 + d_1 \end{pmatrix}.$$

После приведения подобных членов для квадрата модуля этого вектора запишем следующее выражение:

$$|R|^2 = d_1^2 + d_2^2 + a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2 \cos q_2 + 2d_1 d_2 \cos \alpha_1 + 2d_1 a_2 \sin q_2 \sin \alpha_1.$$

Очевидно, что R зависит только от одной обобщенной координаты q_2 . Дифференцируя R по q_2 и приравнивая результат нулю, получаем условие максимальной досягаемости, при котором $R = R_{\max}$:

$$\operatorname{tg} q_2 = \frac{d_1 \sin \alpha_1}{a_1} \text{ и, следовательно,}$$

$$R_{\max} = d_1^2 + d_2^2 + a_1^2 + a_2^2 + 2d_1 d_2 \cos \alpha_1 + 2a_1 a_2 \cos(\operatorname{arctg}(d_1 \sin \alpha_1 / a_1))((d_1 \sin \alpha_1)^2 / a_1^2 + 1).$$

Пример 2.6. Определить пределы досягаемости $X_{\max}, Y_{\max}, Z_{\max}$ робота Rhino, кинематическая схема которого показана на рис. 2.6 [63, с. 211] при условии, что задана ориентация схвата в рабочем пространстве робота, описываемая углом ψ_1 .

Решение. Ориентацию схвата, определяемую его углом качания относительно нормали к горизонтальной поверхности ψ_1 , выразим через обобщенные координаты q_1, q_2 и q_3 :

$$\psi_1 = \pi + (q_2 + q_3 + q_4)$$

(углы q_2, q_3 и q_4 измеряются в отрицательном направлении).

Поскольку эта величина задана, то пределы досягаемости будут устанавливаться координатами точки A в основании «запястья» робота. Радиус вращения этой точки R_A вычислим по формуле

$$R_A = R - R_1 - R_2 = R - a_4 \sin \psi_1 - a_5 \cos \psi_1,$$

где R — радиус вращения характерной точки схвата.

Определим теперь высоту H_A запястья над плечом (см. рис. 2.6):

$$H_A = z + z_2 - z_1 - a_1 = z - a_5 \sin \psi_1 + a_4 \cos \psi_1 - a_1.$$

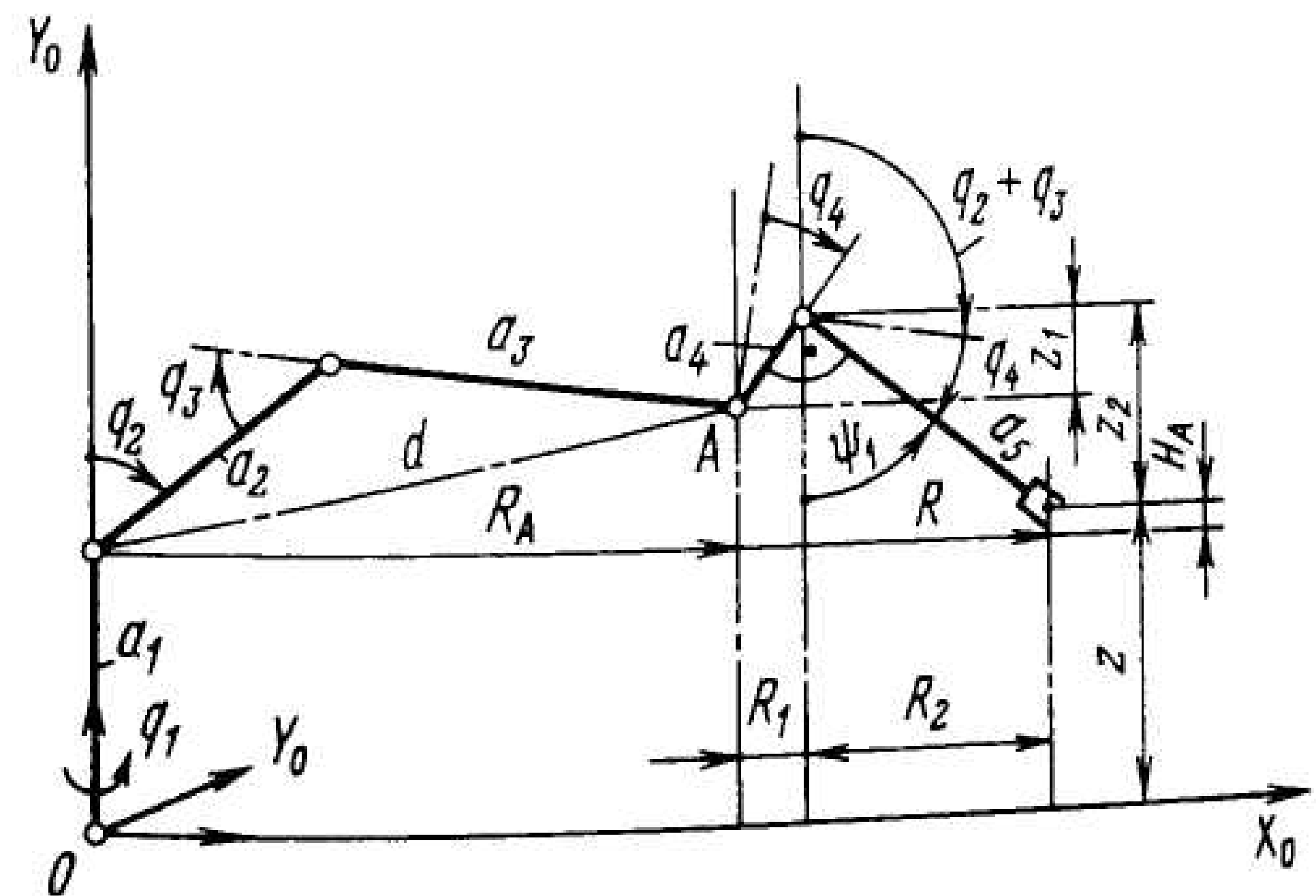


Рис. 2.6. Кинематическая схема робота Rhino

В соответствии с кинематической схемой

$$R_A^2 + H_A^2 = a^2 \leq (a_2 + a_3)^2 = d^2,$$

т.е.

$$(R - \beta_1)^2 + (z - \beta_2)^2 \leq d^2,$$

где β_1, β_2 — константы, определяемые заданным углом ψ_1 :

$$\beta_1 = a_4 \sin \psi_1 + a_5 \cos \psi_1,$$

$$\beta_2 = a_1 + a_5 \sin \psi_1 - a_4 \cos \psi_1.$$

Анализируя полученную формулу, видим, что максимальный радиус достижимости R_{\max} обеспечивается при условии $z = \beta_2$ и равен $R_{\max} = d + \beta_1$. Отсюда следует, что для координат x, y характерной точки схвата выполняется неравенство $x^2 + y^2 \leq (d + \beta_1)^2$ и при $y = 0$ достигается максимальное значение

$$x_{\max} = d + \beta_1 = R_{\max}.$$

Величина x не может принимать значений, равных нулю, в силу конструктивных ограничений. Ее минимальное значение составляет (см. [63, с. 213])

$$x_{\min} = R_{\min} = 2 + 3 \cos \psi_1 + 12 \sin \psi_1,$$

откуда следует, что

$$y_{\max}^2 = R_{\max}^2 - R_{\min}^2.$$

Предел досягаемости по высоте можно определить из прежнего неравенства, переписав его в виде

$$z \leq \beta_2 + \sqrt{d^2 - (R - \beta_1)^2},$$

откуда

$$z_{\max} = \beta_2 + \sqrt{d^2 - (R_{\min} - \beta_1)^2}.$$

Неудобство, связанное с использованием введенных показателей рабочего пространства, состоит в сложности их определения. Наиболее простым в вычислительном отношении способом определения рабочего пространства является решение прямой позиционной задачи (см. § 2.1) для множества значений обобщенных координат $q_i^{(j)}$, $i = 1, \dots, n$; $j = 1, \dots, N$, принадлежащих области допустимых значений S_q (2.10). Значения $q_i^{(j)}$, можно выбрать в узлах равномерной n -мерной решетки, построенной внутри параллелепипеда (2.10) и на

его границах. Совокупность соответствующих значений $r^{(j)}$ определяет множество внутренних и граничных точек, принадлежащих рабочему пространству S_r . Если предположить, что точки $r^{(j)}$ также распределены равномерно и находятся в узлах кубической решетки с шагом δ , то нетрудно приближенно определить объем V рабочего пространства: если M — число узлов в S_r , то $V = M\delta^3$.

Существуют специальные методы, обеспечивающие равномерное заполнение узлами $r^{(j)}$ области S_r — методы ε -сети (см. [26, с. 124]).

2.2.2. Анализ ориентации схвата в рабочем пространстве.

Коэффициент сервиса

Манипулятор, помимо доставки объекта в заданную область рабочего пространства, должен правильно его сориентировать. Имея возможность определить положение в неподвижной системе координат любой точки, связанной с объектом манипулирования, решая прямую кинематическую задачу, можно определить и ориентацию объекта. В частности, можно найти ориентацию продольной оси схвата ψ , что в ряде случаев оказывается достаточным. В общем случае ориентация схвата задается тремя ортами осей связанной с ним системы координат $OX_c Y_c Z_c$: $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$. Способы вычисления этих векторов в зависимости от обобщенных координат манипулятора были рассмотрены в § 2.1.

Более экономным способом относительно числа задаваемых параметров является способ определения ориентации схвата с помощью углов Эйлера α, γ, δ (см. п. 1.2.4).

Вычисляя наряду с (2.11) зависимости $\alpha(q_1, \dots, q_N), \gamma(q_1, \dots, q_N), \delta(q_1, \dots, q_N)$, можно решить задачу об определении ориентации объекта манипулирования в рабочем пространстве по известным значениям обобщенных координат. Аналогично при необходимости можно определить положение и ориентацию любого из звеньев манипулятора. Такая задача возникает при планировании перемещения манипулятора в пространстве с препятствиями.

Возможность манипулятора сориентировать схват (инструмент) нужным образом в данной точке пространства определяют как его манипулятивность. Характеристикой манипулятивности может служить допустимый угол ориентации в рабочей точке. Уточним это понятие.

Предположим, что ориентация схвата определяется как ориентация его продольной оси в неподвижной системе координат в данной точке рабочего пространства. Тогда совокупность всех допустимых при данной конструкции и ограничениях направлений образует в данной точке r пространственный (телесный) угол ψ_r , который называют *зоной обслуживания* в точке r .

В общем случае этот угол зависит от всех обобщенных координат манипулятора, и его можно определить, если известно соотношение

$$\psi_r = \psi_r(q_1, q_2, \dots, q_N), \quad (2.14)$$

а также ограничения на обобщенные координаты (2.10). Во многих случаях конструкция манипулятора позволяет отделить поступательные перемещения от ориентирующих. Примером может служить конструкция манипулятора PUMA-560 (см. рис. В.2, а), где ориентация схвата обеспечивается двигателями, расположенными у его основания и не участвующими в поступательном движении. В этом случае угол ψ_r зависит только от обобщенных координат ориентирующих степеней подвижности:

$$\psi_r = \psi_r(q_4, q_5, q_6),$$

где q_4, q_5 и q_6 — углы ротации, качания и наклона схвата соответственно.

Максимальное значение пространственного угла равно 4π (полный телесный угол). Отношение угла ψ_r к полному телесному углу называют *коэффициентом сервиса*:

$$\Omega_r = \psi_r / 4\pi, \quad (2.15)$$

который является численной оценкой манипулятивности в точке r .

Иногда вводят также оценку манипулятивности в заданном направлении. Если V_v — это объем рабочего пространства, в котором возможна ориентация в направлении, определяемом вектором v , а V — полный объем рабочего пространства, то *манипулятивность в направлении v* оценивается отношением

$$\Omega_v = V_v / V. \quad (2.16)$$

Используют также средние оценки манипулятивности по рабочему пространству. В частности, усредняя первую из приведенных выше оценок по всему рабочему пространству, получаем

$$\Omega = \frac{1}{V} \int_{S_r} \Omega_r dx dy dz. \quad (2.17)$$

Эту оценку называют *сервисом манипулятора*.

В случае плоского механизма зону обслуживания в рабочей точке можно легко вычислить с использованием очевидных геометрических соотношений.

Пример 2.7. Требуется построить зону обслуживания и вычислить коэффициент сервиса для плоского трехзвенного манипулятора (рис. 2.7) при условии, что обобщенные координаты $q_1 = \theta_1, q_2 = \theta_2, q_3 = \theta_3$ удовлетворяют ограничениям вида

$$|q_i| < d_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

Положим для определенности, что $l_2 \leq l_1; l_3 = l_1 - l_2$.

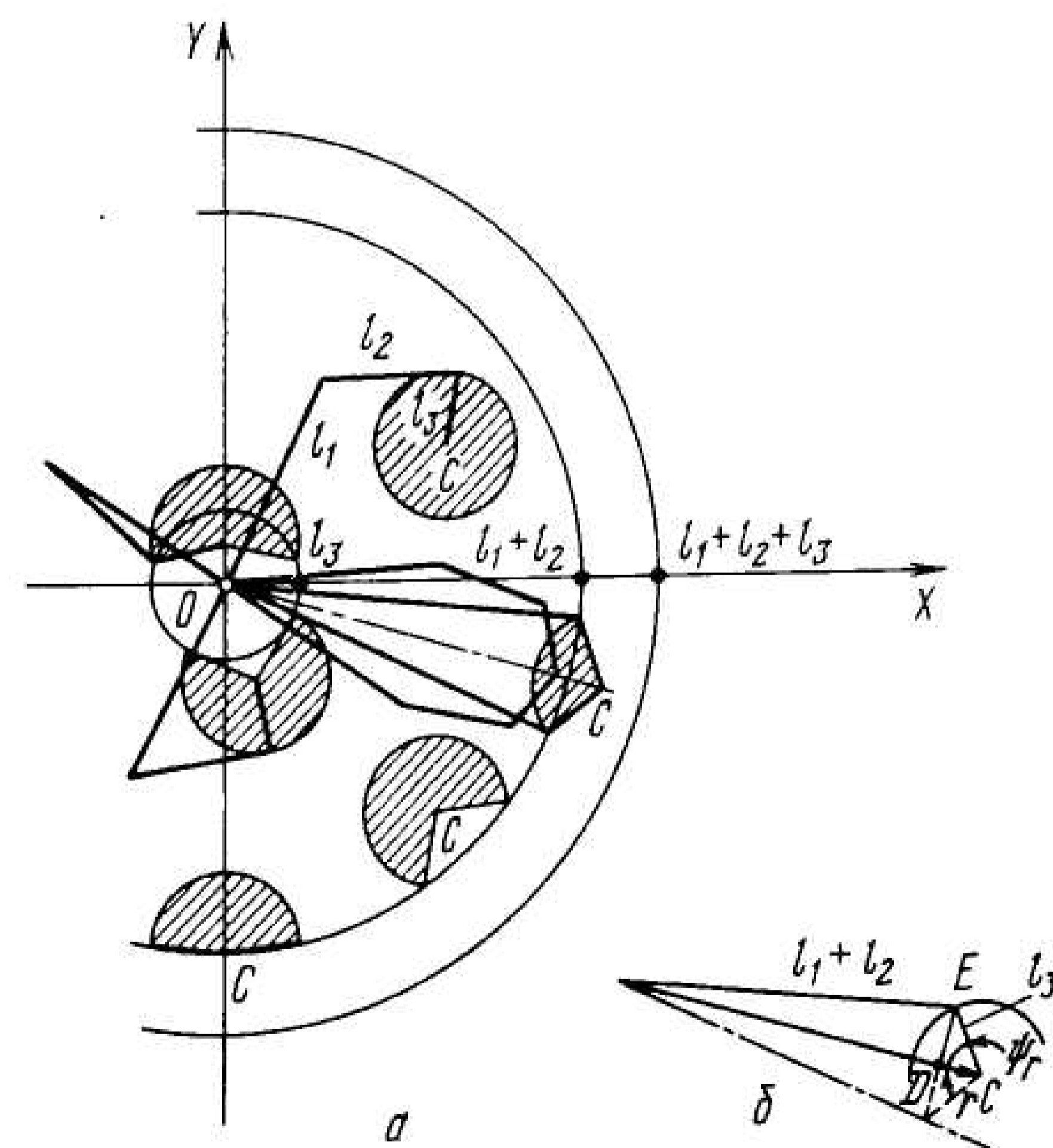


Рис. 2.7. Зоны обслуживания для плоского трехзвенного манипулятора

Решение. В рассматриваемом примере зона обслуживания в произвольной точке r рабочего пространства манипулятора определяется величиной плоского угла, образуемого последним звеном l_3 (схватом) при перемещении других звеньев, когда точка C' , определяющая положение схвата, зафиксирована в точке r . Предположим, что $d_i = \pi$, $i = 1, 2, 3$, т.е. ограничения на углы поворота в кинематических парах манипулятора отсутствуют. В этом случае рабочим пространством механизма, определяемым характерной точкой C' , является круг радиуса $R = l_1 + l_2 + l_3$.

Линии равных значений Ω_r , очевидно, также являются концентрическими окружностями, заполняющими круг радиуса $|r| \leq l_3$ и кольцо $l_1 + l_2 \leq |r| \leq l_1 + l_2 + l_3$.

Не представляет труда найти и формулу для определения угла сервиса ψ_r . Из рис. 2.7, б ясно, что при $l_1 + l_2 \leq r \leq l_1 + l_2 + l_3$

$$\cos \psi_r = CD/l_3.$$

Кроме того,

$$(DE)^2 = (l_1 + l_2)^2 - (r - CD)^2;$$

$$(DE)^2 = l_3^2 - (CD)^2,$$

и, следовательно,

$$CD = [l_3^2 + r^2 - (l_1 + l_2)^2] / 2r.$$

Таким образом, для внешней зоны значений ψ_r меньших единицы, получим

$$\psi_r = \arccos [l_3^2 + r^2 - (l_1 + l_2)^2] / 2rl_3.$$

Аналогично для внутренней зоны получим

$$\psi_r = \arccos [l_3^2 + r^2 - (l_1 - l_2)^2] / 2rl_3.$$

Заметим, что в том случае, если существуют ограничения в углах относительного поворота кинематических пар, линии равных значений коэффициента сервиса перестают быть центрально-симметричными. Так, при $d_j = 2$ рад, $j = 1, 2, 3$; $l_1 = l_2 = 3$, $l_3 = 1$, они приобретают вид, показанный на рис. 2.8 (см. [26, с. 151]).

Из кинематической схемы ясно, что на границах рабочей зоны, т.е. на окружности радиуса R и в начале координат, коэффициент сервиса равен нулю, так как последнее звено в каждой из граничных точек может иметь только одно направление (совпадающее с направлением остальных звеньев).

Если же рассмотреть точки, лежащие внутри рабочей зоны, причем такие, что

$$l_3 + r < l_1 + l_2, \quad r > l_3,$$

то зона обслуживания в каждой из них определится значением 2π , т.е. коэффициент сервиса $\Omega_r = 1$.

Неравенства, определяющие в данном случае зону полного сервиса, имеют следующий геометрический смысл. Кольцо с внутренним радиусом $l_1 - l_2$ и внешним $l_1 + l_2$ — это область рабочего пространства, в которой может находиться точка C' . Если окружность радиуса l_3 с центром в точке r целиком принадлежит этому кольцу, то в точке r коэффициент сервиса равен единице (см. рис. 2.7, а).

Для точек r рабочего пространства, расположенных в кольце $l_1 + l_2 \leq |r| \leq l_1 + l_2 + l_3$ и внутри круга $|r| \leq l_3$, зону обслуживания можно определить как пересечение сектора круга $|x - r| \leq l_3$ с этим кольцом и с кругом $|r| \leq l_3$, соответственно (см. рис. 2.7). При этом зона обслуживания сокращается, а коэффициент сервиса уменьшается от 1 до 0 при перемещении в первом случае в сторону внешней границы рабочего пространства, а во втором — к его центральной точке. В частности, для точек r , лежащих на окружности радиуса $l_1 + l_2$, можно приблизительно считать $\Omega_r = 0,5$.

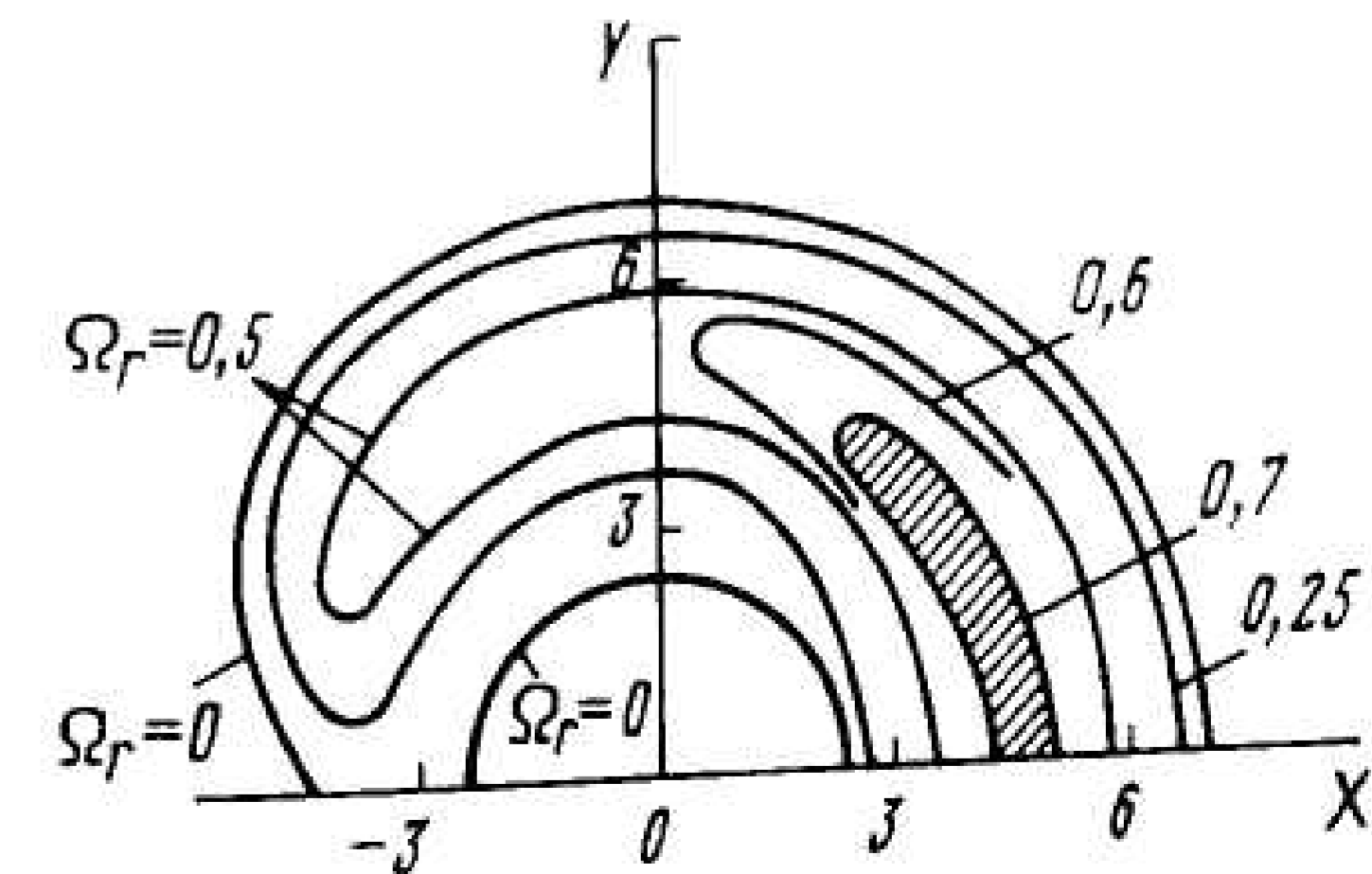


Рис. 2.8. Зоны обслуживания для плоского трехзвенного манипулятора при наличии ограничений на обобщенные координаты

Рабочее пространство в этом случае заключено между внешней и внутренней границами, на которых коэффициент сервиса равен нулю. Внутри рабочей зоны он возрастает, причем можно указать область рабочего пространства, в которой коэффициент сервиса максимален ($\Omega_r = 0,7$). Эта область заштрихована на рис. 2.8.

При расчете усредненного значения Ω_r с использованием полученных выше выражений для ψ_r , зависящих от r , в формуле (2.17) следует перейти к полярным координатам. При усреднении по плоскости получим

$$\Omega = \frac{1}{V} \iint_{S_r} \Omega_r(\varphi, r) r dr d\varphi, \quad (2.18)$$

где φ — угол, образуемый радиус-вектором r с положительным направлением оси OX .

В частности, в отсутствие ограничений по обобщенным координатам Ω_r не зависит от φ и формула (2.18) приобретает следующий вид:

$$\Omega = \frac{2\pi}{V} \int_0^{r_m} r \Omega_r(r) dr. \quad (2.19)$$

Так, для рассмотренного выше примера 2.7

$$r_m = \sum_{i=1}^3 l_i.$$

Вычисляя по последней формуле усредненное значение коэффициента сервиса в случае, если ограничения отсутствуют, получаем $\Omega = 0,48$.

Применяя первую из написанных выше формул при ограничениях $d_j = 2, j = 2, 3$, видим, что сервис уменьшился и составил 0,4. Дальнейшее ужесточение ограничений на обобщенные координаты приводит к снижению показателя усредненного сервиса.

Для рассмотренного примера можно определить и оценку манипулятивности в направлении. Пусть, например, следует определить возможность ориентации схвата в горизонтальном направлении (вектор v параллелен оси OX и совпадает с ней по направлению). Из рис. 2.9, построенного для случая без ограничений, ясно, что область рабочего пространства S_r (на рис. 2.9 она заштрихована), в которой такая ориентация возможна, представляет собой пересечение кольца допусти-

мых положений точки C , смещенного в направлении вектора v на величину l_3 и круга радиуса $l_1 + l_2 + l_3$. Поскольку площадь кольца при перемещении не изменяется и составляет

$$V_v = 4\pi l_1 l_2,$$

а площадь рабочего пространства равна

$$V = \pi(l_1 + l_2 + l_3)^2,$$

то оценка манипулятивности в данном направлении

$$\Omega_v = \frac{V_v}{V} = \frac{4l_1 l_2}{(l_1 + l_2 + l_3)^2}.$$

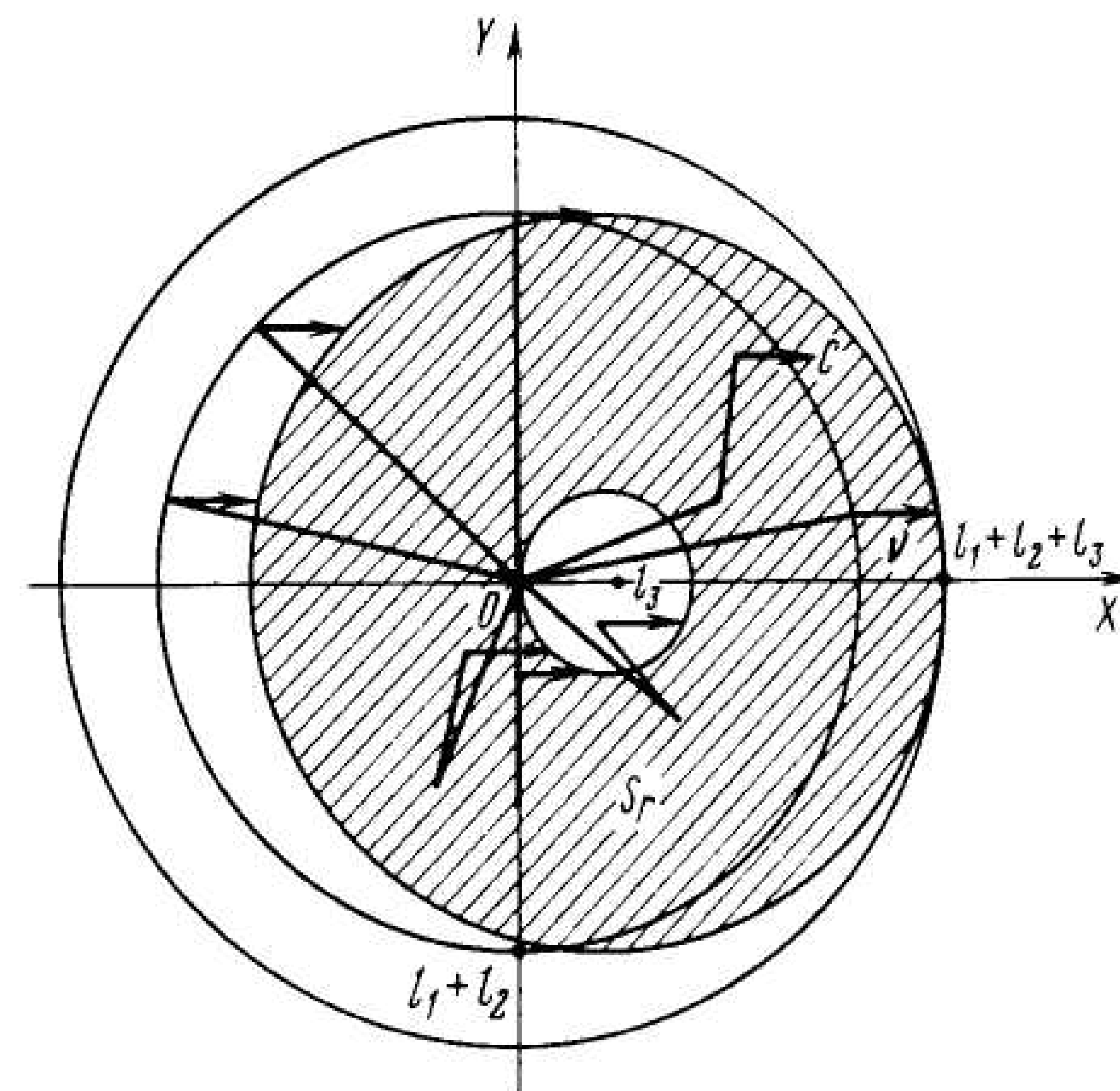


Рис. 2.9. Область, в которой возможна ориентация схвата в горизонтальном направлении

Отметим, что аналогично можно определить область допустимой ориентации в любом направлении, причем оценка манипулятивности зависит только от линейных размеров механизма и не зависит от направления. При наличии ограничений на обобщенные координаты это утверждение теряет силу. В этом случае можно выделить направления минимальной и максимальной манипулятивности. В рассмотренном выше примере при $d_i = 2, j = 1, 2, 3$ минимальное значение равно 0,27; если обозначить ν — угол вектора v с осью OX , то оно достигается в

направлении $\nu = 0$. Максимальное значение манипулятивности, составляющее 0,45, достигается в направлении $\nu = 3/4 \pi$.

Области рабочего пространства, в которых в рассматриваемом случае возможна ориентация в направлениях $\nu = 0$ и $\nu = 3/4 \pi$, показаны на рис. 2.10, а, б (см. [26, с. 152]).

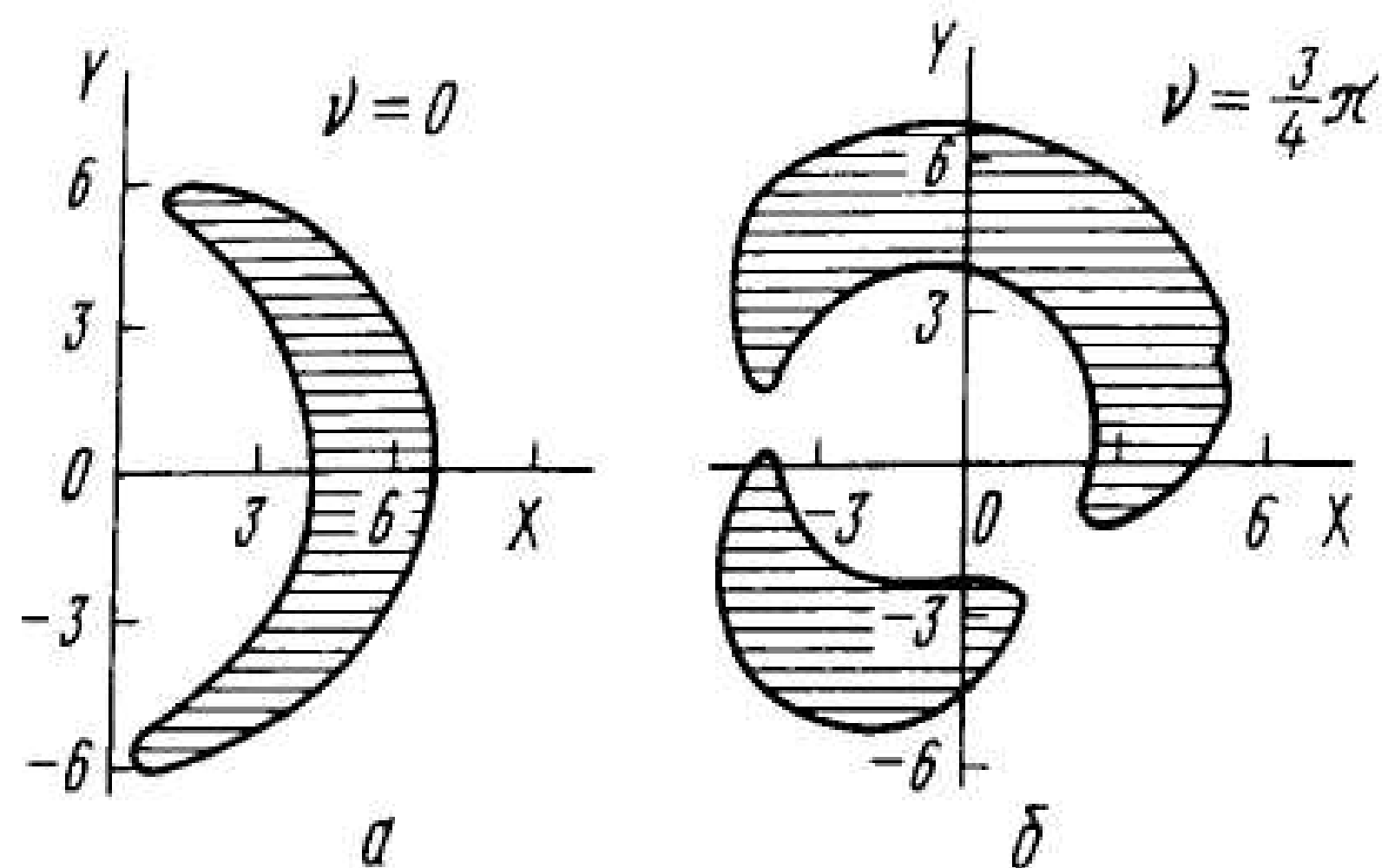


Рис. 2.10. Области, в которых возможна ориентация схвата в заданном направлении при ограничениях на обобщенные координаты

Пример использования зон обслуживания при организации технологического процесса приведен на рис. 2.11 [34, с. 100]. На рисунке показан окрасочный робот РБ-211, установленный на главном конвейере автомобильного завода. Длины звеньев этого робота равны 940, 1630 и 600 мм, а ограничения по угловым перемещениям в кинематических парах составляют (от основания к схвату) $40 \dots 130^\circ$; $50 \dots 140^\circ$; $-180 \dots 0^\circ$.

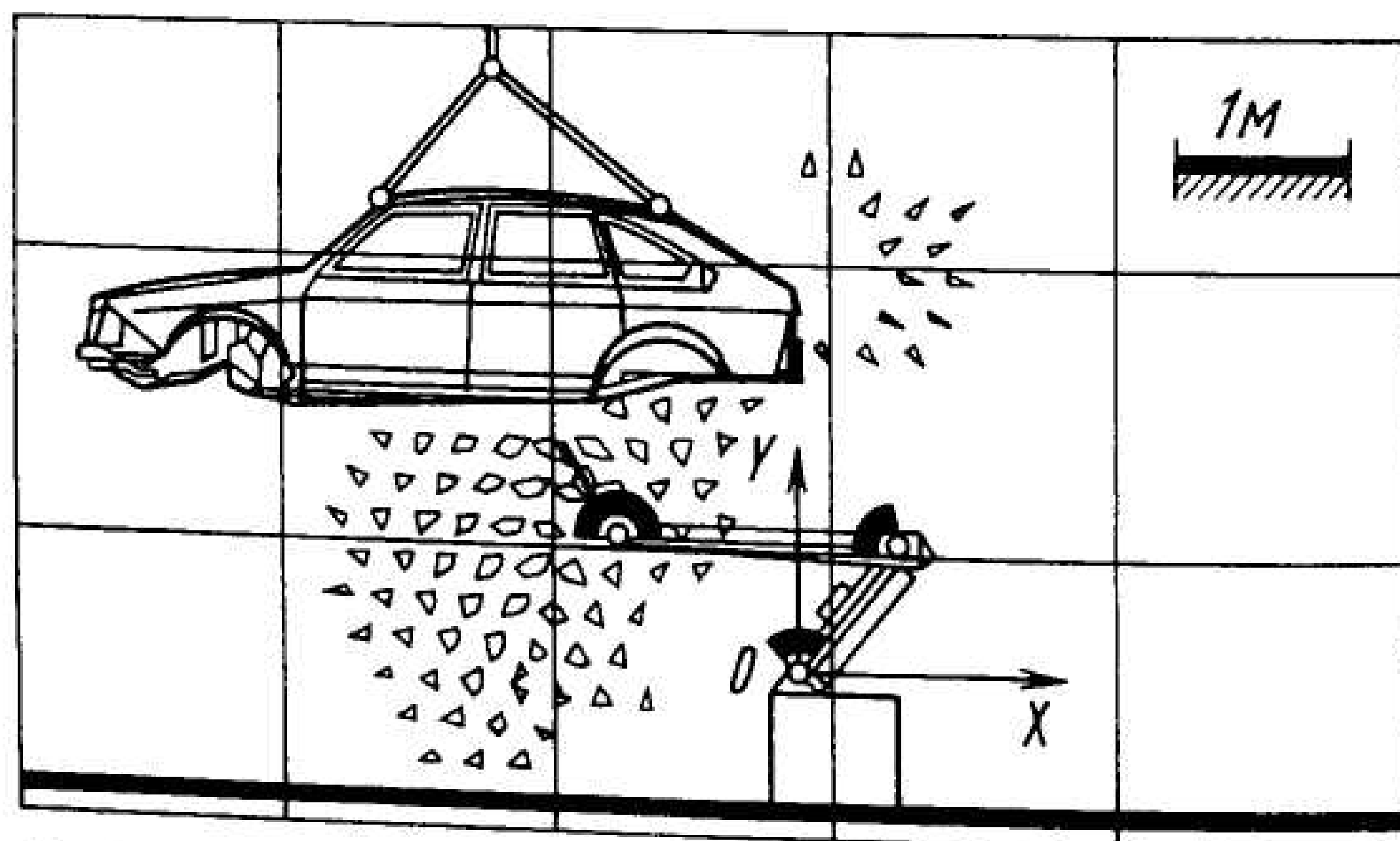


Рис. 2.11. Секторы допустимых зон обслуживания окрасочного робота РБ-211

Кроме того, на рис. 2.11 показаны секторы допустимых зон обслуживания в точках рабочего пространства робота. Предварительный расчет зон обслуживания позволяет разместить автомобиль в рабочем пространстве робота таким образом, чтобы полностью обеспечить покраску его поддона.

2.3. Обратная позиционная задача

Обратную позиционную задачу формулируют следующим образом. При заданном положении и ориентации схвата $s = s^*$ или $T_N = T_N^*$ найти обобщенные координаты $q^* = (q_1^*, q_2^*, \dots, q_n^*)^T$.

Если обозначить

$$s = f_s(q) \quad (2.20)$$

или

$$T_N = f_T(q), \quad (2.21)$$

то искомые углы q^* будут задаваться соотношением

$$q^* = f_s^{-1}(s^*)$$

или

$$q^* = f_T^{-1}(T_N^*).$$

Таким образом, решение обратной позиционной задачи сводится в общем случае к решению нелинейной тригонометрической системы шести уравнений с N неизвестными. Известно, что такого рода системы могут:

не иметь ни одного решения. Это означает, что заданные положение и ориентация схвата системы не могут быть достигнуты никаким выбором углов (перемещений) в сочленениях;

иметь единственное решение;

иметь более одного решения. Это означает, что существует несколько (или бесконечно много) конфигураций манипулятора, обеспечивающих заданное положение схвата.

Умение решать обратную позиционную задачу является чрезвычайно важным для управления манипулятором. Действительно, если программное движение манипулятора задано в виде траектории его

схвата $s(t)$ (или $T_N(t)$, что эквивалентно), то для управления сочленениями необходимо обеспечить такие $q(t)$, чтобы в каждый момент времени выполнялось соотношение (2.20). Однако, к сожалению, не существует общего метода решения этой системы в явном виде, а именно это и является желательным, поскольку управление манипулятором осуществляется в режиме on-line. (Впрочем, и применение численных методов также сопряжено с рядом трудностей, связанных с возможной расходимостью соответствующих итерационных схем.)

Рассмотрим три метода решения обратной позиционной задачи: метод обратных преобразований, тригонометрический подход, итерационный метод. Выбор метода для решения конкретной задачи определяется спецификой кинематической схемы манипулятора, а также опытом исследователя.

2.3.1. Метод обратных преобразований

Как было показано выше, матрица T_N , определяющая положение и ориентацию схвата, имеет вид

$$T_N = A_1 A_2 \dots A_{N-1} A_N, \quad (2.22)$$

где $A_i = A_i(q_i)$ — матрицы перехода от i -й к $(i-1)$ -й системе координат манипулятора.

Тогда, умножая соотношение (2.22) на A_1^{-1} (напомним, что матрица A_i невырожденная), имеем

$$A_1^{-1}(q_1) T_N = A_2 \dots A_{N-1} A_N. \quad (2.23)$$

В силу того, что матрица T_N известна, нам удалось разрешить соотношение (2.23) относительно q_1 . Если структура (2.23) такова, что удастся найти q_1 , то этот процесс повторяем для q_2, q_3, \dots, q_N . Ясно, что, умножая (2.22) справа на A_N^{-1} , аналогично можно найти q_N . Этот метод был использован в работе [22] при решении обратной позиционной задачи для манипулятора PUMA.

Пример 2.8. Пусть механизм представляет собой трехстепенной карданный подвес, ориентация которого задана тремя углами Эйлера (см. п. 1.2.4):

$$T_3 = R_{Z,\varphi} R_{Y,\theta} R_{Z,\psi} = \begin{pmatrix} c_\varphi & -s_\varphi & 0 \\ s_\varphi & c_\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_\theta & 0 & s_\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_\theta & 0 & c_\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_\psi & -s_\psi & 0 \\ s_\psi & c_\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.24)$$

Требуется решить обратную задачу для этого механизма, т.е. найти углы ψ, θ, φ по заданной матрице $T_3 = (x \ y \ z)$.

Решение. Умножая слева выражение (2.24) на матрицу

$$R_{Z,\varphi}^{-1} = \begin{pmatrix} c_\varphi & s_\varphi & 0 \\ -s_\varphi & c_\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

получаем

$$R_{Z,\varphi}^{-1} T_3 = R_{Y,\theta} R_{Z,\psi}$$

или, после перемножения матриц,

$$\begin{pmatrix} x_x c_\varphi + x_y s_\varphi & y_x c_\varphi + y_y s_\varphi & z_x c_\varphi + z_y s_\varphi \\ -x_x s_\varphi + x_y c_\varphi & -y_x s_\varphi + y_y c_\varphi & -z_x s_\varphi + z_y c_\varphi \\ x_z & y_z & z_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_\theta c_\psi & -c_\theta s_\psi & s_\theta \\ s_\psi & c_\psi & 0 \\ -s_\theta c_\psi & c_\theta s_\psi & c_\theta \end{pmatrix}. \quad (2.25)$$

Приравнивая в (2.25) элементы второй строки и третьего столбца обеих матриц, находим

$$-z_x s_\varphi + z_y c_\varphi = 0,$$

откуда

$$\varphi = \operatorname{atan} 2(z_y, z_x). \quad (2.26)$$

Напомним, что функцию $\operatorname{atan} 2(a, b)$ определяют следующим образом:

$$\operatorname{atan} 2(a, b) = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{a}{b}, & b > 0, \\ \operatorname{arctg} \frac{a}{b} + \pi, & b > 0, a < 0, \\ \operatorname{arctg} \frac{a}{b} - \pi, & b < 0, a < 0; \end{cases} \quad (2.27)$$

$$-\pi \leq \operatorname{atan} 2(a, b) \leq \pi,$$

т.е. $\theta = \operatorname{atan} 2(a, b)$ учитывает принадлежность аргументов одному из четырех квадрантов.

Приравнивая элементы второй строки и первого и третьего столбцов в выражении (2.25), получаем

$$\begin{aligned} s_\psi &= -x_x s_\varphi + x_y c_\varphi; \\ c_\psi &= -y_x s_\varphi + y_y c_\varphi, \end{aligned}$$

откуда следует, что

$$\psi = \operatorname{atan} 2(-x_x s_\varphi + x_y c_\varphi, -y_x s_\varphi + y_y c_\varphi). \quad (2.28)$$

Далее, приравнивая элементы первой строки и третьего столбца, а также третьей строки и третьего столбца, находим

$$\begin{aligned} s_\theta &= z_x c_\varphi + z_y s_\varphi, \\ c_\theta &= z_z, \end{aligned}$$

следовательно,

$$\theta = \operatorname{atan} 2(z_x c_\varphi + z_y s_\varphi, z_z). \quad (2.29)$$

Таким образом, соотношения (2.26), (2.28), (2.29) решают обратную позиционную задачу.

2.3.2. Тригонометрический подход к решению обратной позиционной задачи

Проиллюстрируем этот метод на примере решения обратной позиционной задачи для манипулятора PUMA.

При решении обратной задачи будем учитывать характерную особенность кинематической схемы манипулятора, состоящей в том, что оси вращения трех последних сочленений z_3 , z_4 и z_5 пересекаются в одной точке (в начале координат совпадающих систем $O_4 X_4 Y_4 Z_4$, $O_5 X_5 Y_5 Z_5$). В этом случае, как нетрудно видеть, можно сразу найти координаты точки пересечения осей:

$$P = P_4 = P_6 - d_6 z_6 = (p_x, p_y, p_z)^T. \quad (2.30)$$

Тогда, определив матрицу $T_4 = A_1 A_2 A_3 A_4$ и приравняв ее последний столбец вектору (2.30), получим

$$p_x = c_1 (a_2 c_2 + a_3 c_{23} + d_4 s_{23}) - d_2 s_1, \quad (2.31)$$

$$p_y = s_1 (a_2 c_2 + a_3 c_{23} + d_4 s_{23}) + d_2 c_1,$$

$$p_z = -a_2 s_2 - a_3 s_{23} + d_4 c_{23}.$$

Эти соотношения представляют собой систему трех тригонометрических уравнений с тремя неизвестными q_1, q_2, q_3 . Таким образом, с помощью выражения (2.30) можно разбить систему шести уравнений с шестью неизвестными q_1, q_2, \dots, q_6 на две подсистемы.

Решим систему уравнений (2.31). Умножая первое уравнение системы на $-s_1$, второе уравнение на c_1 и суммируя их, получаем

$$-p_x s_1 + p_y c_1 = d_2. \quad (2.32)$$

Поскольку $p_x^2 + p_y^2 > d_2^2$, уравнение (2.32) всегда имеет решение.

Для решения (2.32) воспользуемся известными тригонометрическими соотношениями

$$\sin \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}, \quad \cos \alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}. \quad (2.33)$$

Подставляя (2.33) в (2.32) и решая полученное квадратное уравнение, получаем

$$\operatorname{tg} \frac{q_1}{2} = \frac{-p_x \pm \sqrt{p_x^2 + p_y^2 + d_2^2}}{p_y + d_2},$$

откуда, отбрасывая не влияющее на результат слагаемое $2\pi i$, находим

$$q_1 = 2 \operatorname{arctg} \frac{-p_x \pm \sqrt{p_x^2 + p_y^2 + d_2^2}}{p_y + d_2}, \quad -\pi \leq q_1 \leq \pi. \quad (2.34)$$

Запишем систему уравнений (2.21) следующим образом:

$$\begin{aligned} a_2 c_2 + a_3 c_{23} + d_4 s_{23} &= p_x c_1 + p_y s_1, \\ -a_2 s_2 + d_4 c_{23} - s_{23} &= p_z. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Далее, умножая первое уравнение на d_4 , а второе на $-d_3$ и суммируя их, получаем

$$a_2 d_4 c_2 + a_2 a_3 s_2 + d_4^2 + a_3^2 = (p_x c_1 + p_y s_1) d_4 - p_z a_3, \quad (2.36)$$

т.е.

$$a_3 s_2 + d_4 c_2 = A,$$

где

$$A = \frac{1}{a_2} ((p_x c_1 + p_y s_1) d_4 - p_z d_3 - d_4^2 - a_3^2) \quad (2.37)$$

известное (после определения q_1) число.

Структуры уравнений (2.36), (2.32) аналогичны. Теперь, используя подстановку (2.33), получаем

$$q_2 = 2 \operatorname{arctg} \frac{a_3 \pm \sqrt{a_3^2 + d_4^2 - A^2}}{A + d_4}, \quad -\pi \leq q \leq \pi. \quad (2.38)$$

Чтобы найти угол q_3 , определим s_{23} и c_{23} . Для этого решим систему уравнений (2.35) как линейную. Имеем

$$\begin{aligned} d_4 s_{23} + a_3 c_{23} &= p_x c_1 + p_y s_1 - a_2 c_2, \\ -a_3 s_{23} + d_4 c_{23} &= p_z + a_2 s_2, \end{aligned} \quad (2.39)$$

откуда

$$s_{23} = \frac{d_4 B - a_3 C}{d_4^2 + a_3^2}, \quad (2.40)$$

$$c_{23} = \frac{d_4 C + a_3 B}{d_4^2 + a_3^2}, \quad (2.41)$$

где

$$B = p_x c_1 + p_y s_1 - a_2 c_2; \quad (2.42)$$

$$C = p_z + a_2 s_2.$$

Тогда из соотношений (2.40), (2.41) следует, что

$$q_3 = \operatorname{atan} 2(s_{23}, c_{23}) - q_2, \quad -\pi \leq q_3 \leq \pi. \quad (2.43)$$

Итак, искомые углы q_1 , q_2 , q_3 определяются выражениями (2.34), (2.38), (2.43). Приведенное решение обратной задачи состоит в последовательном нахождении этих углов. Следует отметить, что решение обратной задачи для q_1 , q_2 , q_3 неоднозначно: выбирая независимо знаки в соотношениях (2.34) и (2.38) получаем четыре тройки углов (q_1^+, q_2^+, q_3) , (q_1^+, q_2^-, q_3) , (q_1^-, q_2^+, q_3) , (q_1^-, q_2^-, q_3) , обеспечивающие одно и то же положение схвата.

Продолжим решение обратной задачи и найдем углы q_4 , q_5 , q_6 . Из решения прямой задачи имеем для проекции вектора z_6 следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} z_{6x} &= c_1 (c_{23} c_4 s_5 + s_{23} c_5) - s_1 s_4 s_5, \\ z_{6y} &= s_1 (c_{23} c_4 s_5 + s_{23} c_5) + c_1 s_4 s_5, \\ z_{6z} &= -s_{23} c_4 s_5 + c_{23} c_5. \end{aligned} \quad (2.44)$$

Умножая первое уравнение (2.44) на $-s_1$, второе на c_1 и суммируя их, получаем

$$-s_1 z_{6x} + c_1 z_{6y} + s_4 s_5. \quad (2.45)$$

Далее, умножая первое уравнение (2.44) на $c_1 c_{23}$, второе на $s_1 c_{23}$, третье на $-s_{23}$, имеем

$$c_1 c_{23} z_{6x} + s_1 c_{23} z_{6y} - s_{23} z_{6z} = c_4 s_5. \quad (2.46)$$

Поскольку s_5 может иметь различный знак, то, используя соотношения (2.45) и (2.46), получаем для q_4 два решения:

$$q_4 = \operatorname{atan} 2(W(-s_6 z_{6x} + c_1 z_{6y}), W(c_1 c_{23} z_{6x} + s_1 c_{23} z_{6y} - s_{23} z_{6z})), \quad (2.47)$$

где $W = \pm 1$.

Система уравнений (2.44) позволяет найти s_5 , c_5 . Нетрудно видеть, что

$$s_5 = (c_1 c_{23} c_4 - s_1 s_4) z_{6x} + (s_1 c_{23} c_4 + c_4 s_4) z_{6y} - c_4 s_{23} z_{6z}, \quad (2.48)$$

$$c_5 = c_1 s_{23} z_{6x} + s_1 s_{23} z_{6y} + c_{23} z_{6z}. \quad (2.49)$$

Тогда

$$q_5 = \operatorname{atan} 2(s_5, c_5), \quad (2.50)$$

где s_5 и c_5 определяются соотношениями (2.48), (2.49).

Те же результаты можно получить, если заметить, что $s_5 = z_6 x_4$ и $c_5 = -z_6 y_4$, где векторы x_4 и y_4 , являются компонентами матрицы T_4 , т.е. матрицы положения четвертого звена.

Чтобы найти угол q_6 , запишем следующие соотношения:

$$s_6 = x_6 y_5, \quad (2.51)$$

$$c_6 = y_6 y_5.$$

Поставляя в (2.51) соответствующие значения для y_5 (см. пример 2.3), получаем

$$s_6 = (-s_1 c_4 - c_1 c_{23} s_4) x_{6x} + (c_1 c_4 - s_1 c_{23} s_4) x_{6y} - s_4 s_{23} x_{6z}, \quad (2.52)$$

$$c_6 = (-s_1 c_4 - c_1 c_{23} s_4) y_{6x} + (c_1 c_4 - s_1 c_{23} s_4) y_{6y} - s_4 s_{23} y_{6z} \quad (2.53)$$

и, следовательно,

$$q_6 = \text{atan} 2(s_6, c_6), \quad (2.54)$$

где s_6 и c_6 определяются соотношениями (2.52), (2.53).

Нахождение q_6 завершает решение обратной задачи по положению для манипулятора PUMA.

Таким образом, для каждого (кинематически допустимого) положения схвата существует восемь решений обратной позиционной задачи, различающихся углами q_1 , q_2 и q_4 . Кроме того, существуют конфигурации, при которых число решений бесконечно.

Приведенный пример решения обратной позиционной задачи подтверждает высказанное выше положение: решение обратных задач является кинематически зависимым (в отличие от прямой задачи) и требует тщательных (хотя и несложных, не выходящих за пределы школьного курса математики) вычислений.

2.3.3. Численные методы решения обратной задачи

Способы решения обратной задачи по положению в замкнутой форме, описанные в предыдущих главах, применимы не для всех кинематических схем манипуляторов. Вместе с тем, существует много численных методов, позволяющих решить обратную задачу. Согласно этим методам, весьма развитым в вычислительной математике и носящим итерационный характер, обратную задачу рассматривают как задачу поиска корня уравнения

$$f(q) = s^*, \quad (2.55)$$

где s^* — заданное положение схвата.

Рассмотрим простейший из этих методов, а именно *метод Ньютона* (метод касательных). В основе метода лежит простая геометрическая идея, состоящая в том, что если для решения скалярного уравнения

$$\varphi(x) = 0 \quad (2.56)$$

выбрать некоторое начальное приближение x_0 и построить следующее приближение x_1 как точку пересечения касательной к графику функции $y = \varphi(x)$ в точке x_0 с осью X , то полученное значение x_1 «ближе» к корню x^* , чем x_0 (рис. 2.12).

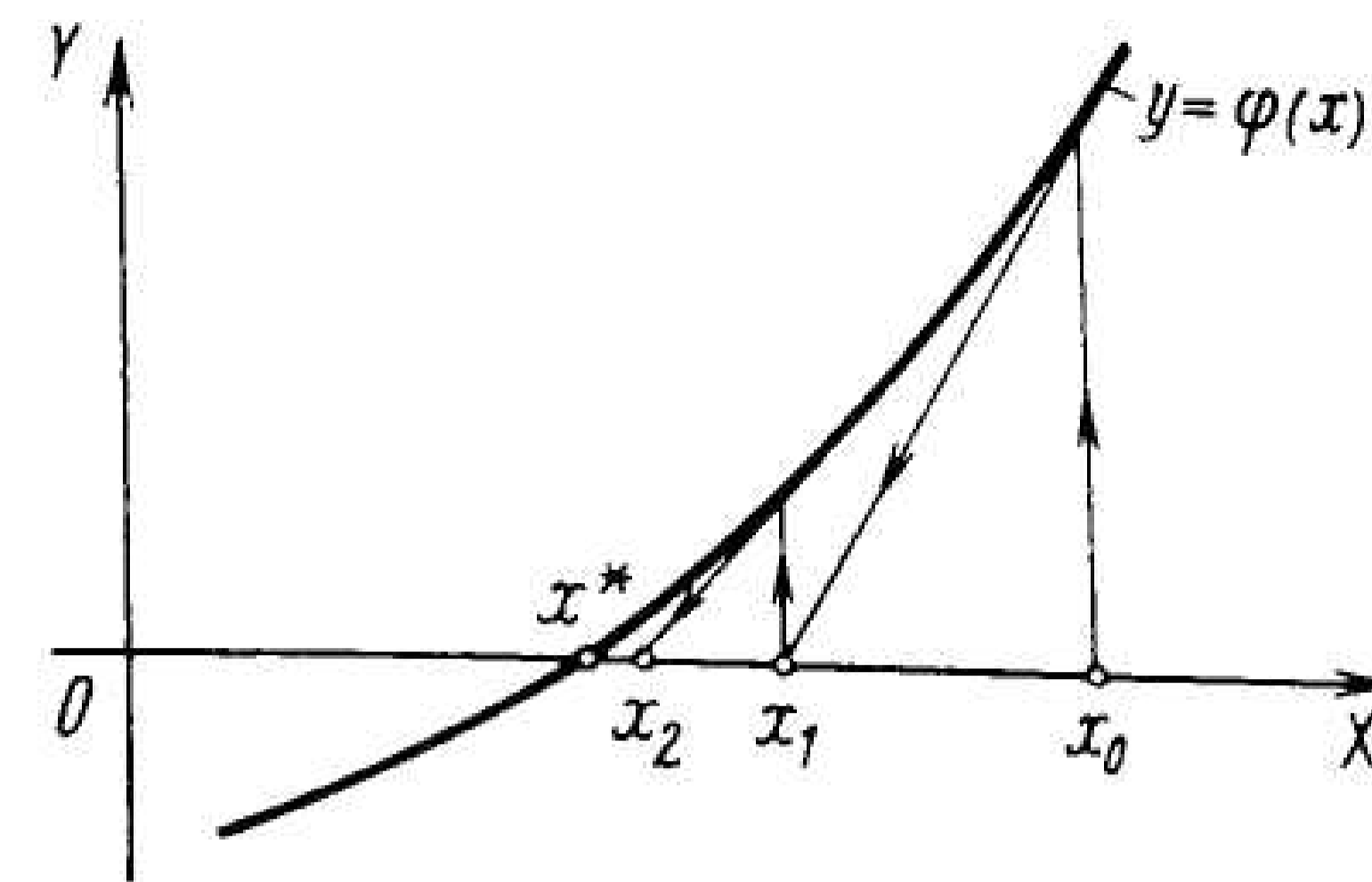


Рис. 2.12. Геометрическая интерпретация метода Ньютона для решения уравнения $\varphi(x) = 0$

Продолжая этот процесс и получая таким образом x_1, x_2, \dots , можно рассчитывать на то, что последовательность $\{x_i\}$ сойдется к x^* . Реализация этого подхода приводит к следующей итерационной схеме:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{\varphi_i(x)}{\varphi'_i(x)}, \quad i = 1, 2, \dots \quad (2.57)$$

Существует теорема о достаточных условиях сходимости итерационного процесса (2.57), ее формулируют следующим образом.

Пусть x^* является решением уравнения (2.56). Обозначим через Ω_ε ε -окрестность точки x^* :

$$\Omega_\varepsilon = \{x : |x - x^*| < \varepsilon\}.$$

Пусть при некоторых $a > 0, a_1 \geq 0$ выполняются условия

$$|\varphi'(x)| < a_1, \quad x \in \Omega_a,$$

$$|\varphi(u_1) - \varphi(u_2) - \varphi'(u_2)(u_1 - u_2)| \leq a_2 |u_2 - u_1|, \quad u_1, u_2 \in \Omega_a.$$

Пусть $c = a_1 a_2, b = \min(a, c^{-1})$. Тогда при этих условиях и $x_0 \in \Omega_b$ процесс (2.57) сходится к x^* с оценкой погрешности

$$|x_n - x^*| \leq c^{-1} (c |x_0 - x^*|)^{2^n}.$$

Заметим, что если $\varphi(x)$ имеет ограниченную вторую производную, то последнее условие выполнено.

Применяя метод Ньютона для решения уравнения (2.55), получаем следующую схему:

$$q_{i+1} = q_i + (f'_q(q_i))^{-1}(s^* - f(q_i)), \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (2.58)$$

где q_0 — заданное начальное значение вектора обобщенных координат.

Входящую в выражение (2.58) матрицу $J(q) = f'(q)$ называют *матрицей Якоби*, которая играет важную роль при разработке методов управления манипуляторами. При использовании метода Ньютона требуется вычислять обратную матрицу Якоби на каждом шаге итерации.

Использование метода Ньютона приводит к весьма простым соотношениям (2.58), однако в процессе его применения может возникнуть ряд трудностей, графическая иллюстрация которых приведена на рис. 2.13, а–в. Безусловно, хорошим рецептом, гарантирующим сходимость, является выбор начального приближения, удовлетворяющего условиям сформулированной выше теоремы. Однако, как было сказано

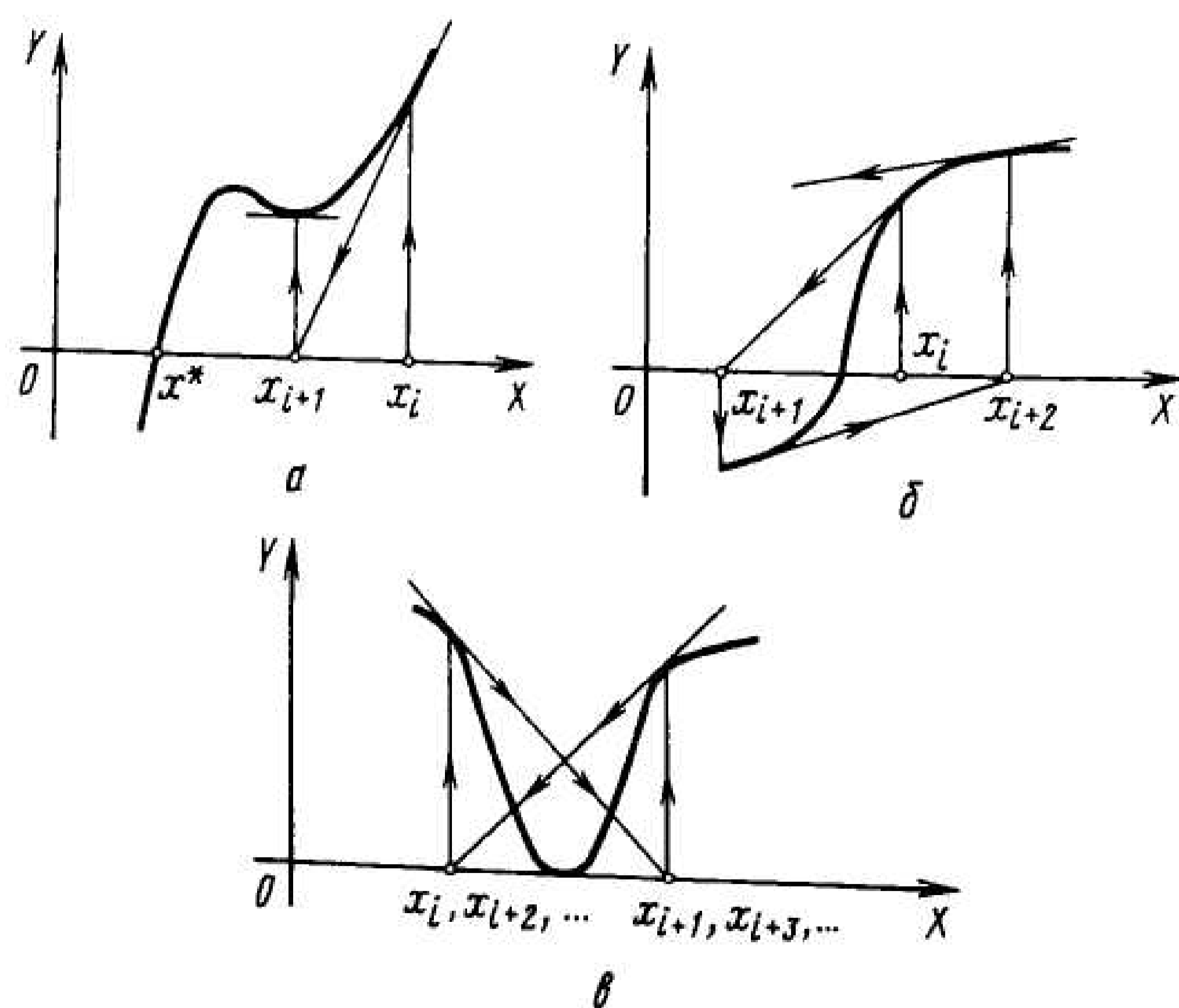


Рис. 2.13. Иллюстрация расходимости итерационного процесса: а — не существует $1/\varphi'(x_{i+1})$; б — $\{x_i\}$ расходится; в — заикливание

ранее, обратные задачи связаны с управлением манипулятором, и в условиях режима on-line воспользоваться этой рекомендацией крайне затруднительно. Вместе с тем, можно так организовать процедуру решения обратной задачи, что начальное приближение q_0 будет близко к q^* . Этого можно добиться, например, выбрав конечную последовательность $\{s^i\}$, $i = 0, 1, 2, \dots, L$ так, чтобы $s^0 = f(q_0)$, $s^L = s^*$ и расстояние $\|s^{i+1} - s^i\|$ между соседними элементами последовательности s^{i+1} и s^i было небольшим. Тогда, решая для каждого s_i обратную задачу и используя в качестве начального приближения полученное на предыдущем шаге приближение q^{i-1} (кроме первого шага, где $q^0 = q_0$), можно обезопасить себя от возникновения сингулярности. Этим подходом мы воспользуемся ниже, когда будем обсуждать вопросы, связанные с управлением.

Контрольные вопросы и задания

1. Как формулируется прямая задача о положении? Что понимают под положением звена?
2. Какова последовательность движений, необходимых для совмещения систем координат двух соседних звеньев, если они построены в соответствии с алгоритмом Денавита — Хартенберга.
3. Получите выражение для матрицы перехода от $(i-1)$ -й к i -й системе координат.
4. Сравните вычислительную сложность решения прямой задачи о положении в замкнутой и рекуррентной формах (см. примеры 2.2, 2.3).
5. Дайте определение рабочего пространства манипулятора и приведите примеры конфигурации рабочего пространства для известных Вам кинематических схем манипуляторов.
6. Систематизируйте показатели качества манипуляторов, связанные с понятием рабочего пространства. В соответствии с этими показателями проведите сравнительный анализ манипуляторов, рассмотренных в предыдущем задании.
7. Дайте определение понятий «коэффициент сервиса» и «сервис» манипулятора. Проведите анализ этих показателей для манипулятора RM-01 и для руки человека.
8. Как формулируется обратная задача о положении?

9. Сколько конфигураций манипулятора PUMA возможно при фиксированном положении его схвата (при условии, что координаты схвата принадлежат области достижимости)?

10. Определите основные действия над блочными матрицами и векторами с помощью известных Вам действий с обычными матрицами и векторами. Определите обратную к квадратной блочную матрицу.

11. Для каких классов кинематических схем манипуляторов возможно получить аналитическое решение обратной задачи о положении?

12. Выведите формулу (2.58) решения обратной позиционной задачи методом Ньютона.

13. Каким образом можно обеспечить быструю (за несколько шагов) сходимость итерационного алгоритма решения обратной позиционной задачи методом Ньютона?

3. СКОРОСТИ И УСКОРЕНИЯ ЗВЕНЬЕВ МАНИПУЛЯТОРА

В этой главе представлены решения задач о скорости и описаны соотношения между скоростями изменения обобщенных координат (обобщенными скоростями сочленений) и скоростью схвата (либо другого произвольного звена). При этом скорость схвата определяется шестеркой чисел, из которых первая тройка представляет собой компоненты вектора угловой скорости, а вторая — компоненты вектора линейной скорости. В отличие от положения (его также задают шестеркой чисел) скорость схвата представляет собой вектор. Кроме того, в данной главе рассмотрены малые перемещения схвата, так называемые дифференциальные перемещения. Задачи о скорости широко применяют при разработке методов управления манипуляторами в полуавтоматических режимах, когда сигналы, поступающие с рукоятки, интерпретируются как некоторые компоненты командного вектора обобщенной скорости схвата.

3.1. Соотношения для скоростей и ускорений

В предыдущих главах были рассмотрены задачи о положении и ориентации звеньев манипулятора либо в декартовом пространстве, либо в пространстве обобщенных координат. Ясно, что для управления манипулятором необходимо научиться находить скорости и ускорения звеньев, иначе кинематическая модель манипулятора будет неполной. В этой главе мы займемся решением задачи, связанной с получением соотношений между скоростями и ускорениями звеньев манипулятора. Но прежде мы напомним некоторые соотношения из теоретической механики.

3.1.1. Скорости и ускорения в относительном движении

Пусть имеется две системы координат, одна из которых $O_0 X_0 Y_0 Z_0$ неподвижна, а движение второй системы $OXYZ$ относительно первой задано векторами v (линейная скорость) и ω (угловая скорость). Предположим, что положение некоторой точки P задается векторами r_0 и r в системах координат $O_0 X_0 Y_0 Z_0$ и $OXYZ$ соответственно (рис. 3.1).

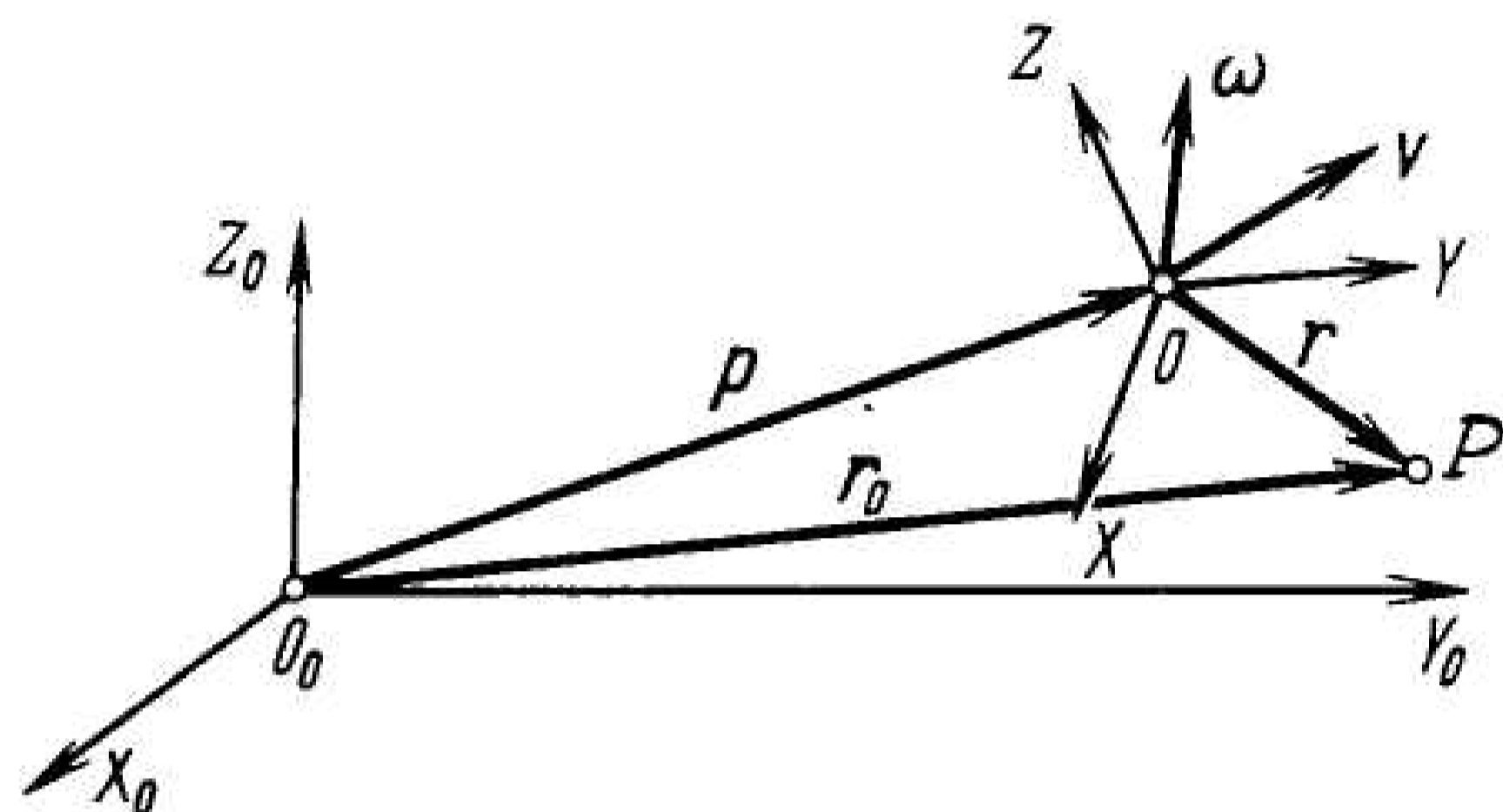


Рис. 3.1. Неподвижная и подвижная системы координат

Обозначим

$$A = \begin{pmatrix} R & p \\ 000 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

матрицу перехода от подвижной системы координат к неподвижной. Тогда в терминах однородных векторов и преобразований имеет место соотношение

$$\rho_0 = A\rho, \quad (3.2)$$

где ρ_0 и ρ — однородные векторы, соответствующие векторам r_0 и r . Согласно известной теореме механики об относительном движении, соотношения для скоростей в подвижной и неподвижной системах координат будут иметь вид

$$\frac{dr_0}{dt} = v + \omega \times r + \frac{d^*r}{dt}, \quad (3.3)$$

где $\frac{dr_0}{dt}$ — скорость точки P в неподвижной системе координат $O_0 X_0 Y_0 Z_0$; $\frac{d^*r}{dt}$ — скорость точки P в подвижной системе координат $OXYZ$.

Заметим, что сумма векторов

$$\omega \times r + \frac{d^*r}{dt} = \frac{dr}{dt}$$

определяет скорость точки P в подвижной системе координат. Для ускорений точки P в подвижной и неподвижной системах координат запишем следующее соотношение (в механике его называют теоремой Кориолиса):

$$\frac{d^2 r_0}{dt^2} = \frac{d^{*2} r_0}{dt^2} + 2\omega \times \frac{d^* r}{dt} + \omega \times (\omega \times r) + \frac{d\omega}{dt} \times r + \frac{dv}{dt}, \quad (3.4)$$

где $\frac{d^2 r_0}{dt^2}$ — ускорение точки P в неподвижной системе координат;

$\frac{d^{*2} r_0}{dt^2}$ — ускорение точки P в подвижной системе координат;

$2\omega \times \frac{d^* r}{dt}$ — кориолисово ускорение; $\omega \times (\omega \times r)$ — центростремитель-

ное ускорение; $\frac{d\omega}{dt} \times r$ — тангенциальное ускорение.

Таким образом, соотношения (3.3) и (3.4) позволяют найти скорость и ускорение точки, находящейся в сложном движении.

3.1.2. Определение скоростей и ускорений звеньев манипулятора методом прямой рекурсии

Для нахождения скоростей и ускорений звеньев манипулятора применим полученные выше соотношения. Напомним, что системы координат звеньев были построены (см. § 1.4) таким образом, что с каждым i -м звеном связывалась система координат, начало которой располагалось в $(i+1)$ -м сочленении (рис. 3.2). При этом кинематические параметры звена манипулятора задавались соответствующими параметрами связанной с ним системы координат.

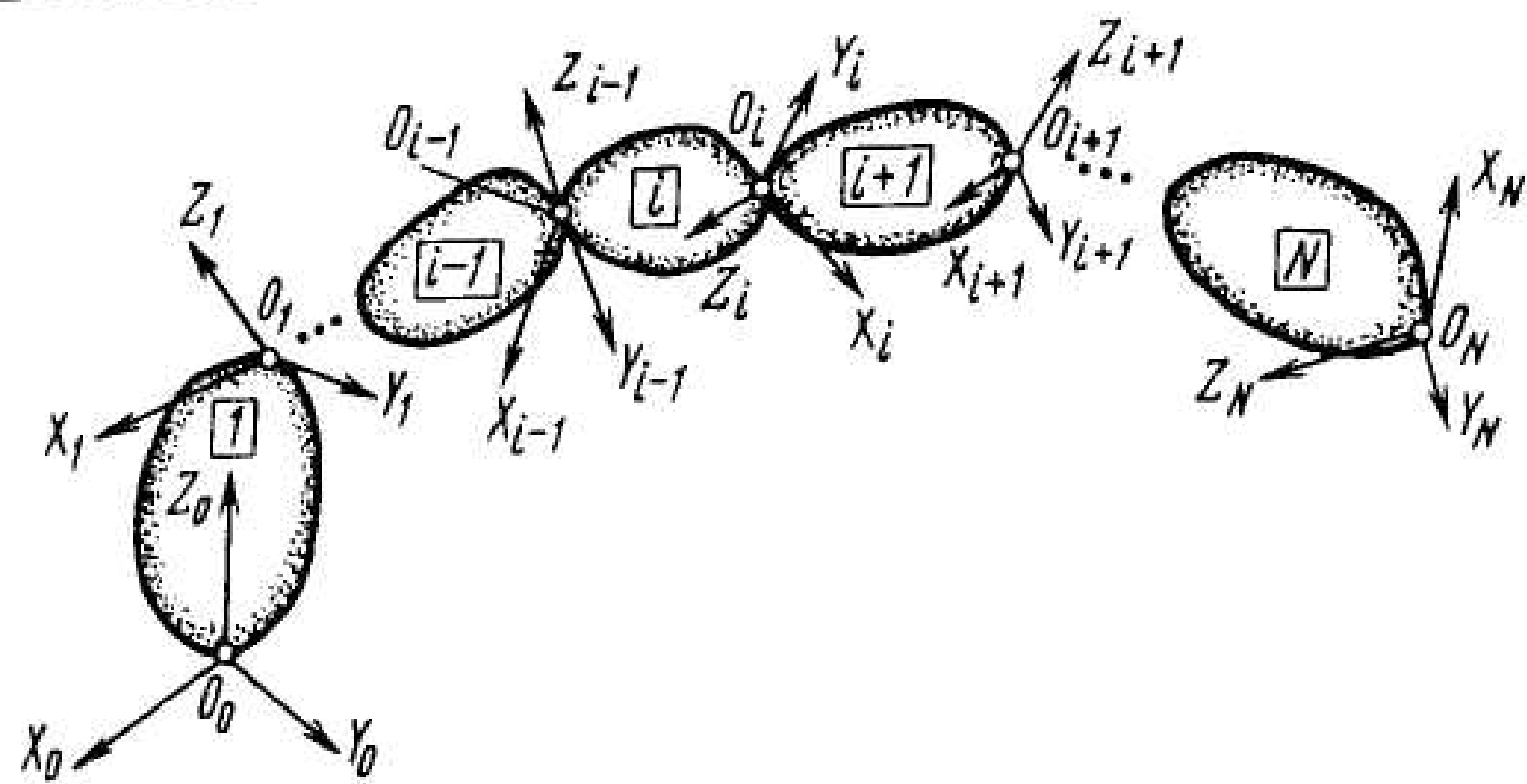


Рис. 3.2. Системы координат N-звенного манипулятора

Для двух соседних звеньев (i-1)-го и i-го (рис. 3.3) интерпретируем систему координат следующим образом:

$O_0 X_0 Y_0 Z_0$ — базовая система координат;

$O_{i-1} X_{i-1} Y_{i-1} Z_{i-1}$ — подвижная система координат;

$O_i X_i Y_i Z_i$ — система координат, связанная с точкой P (см. рис. 3.1).

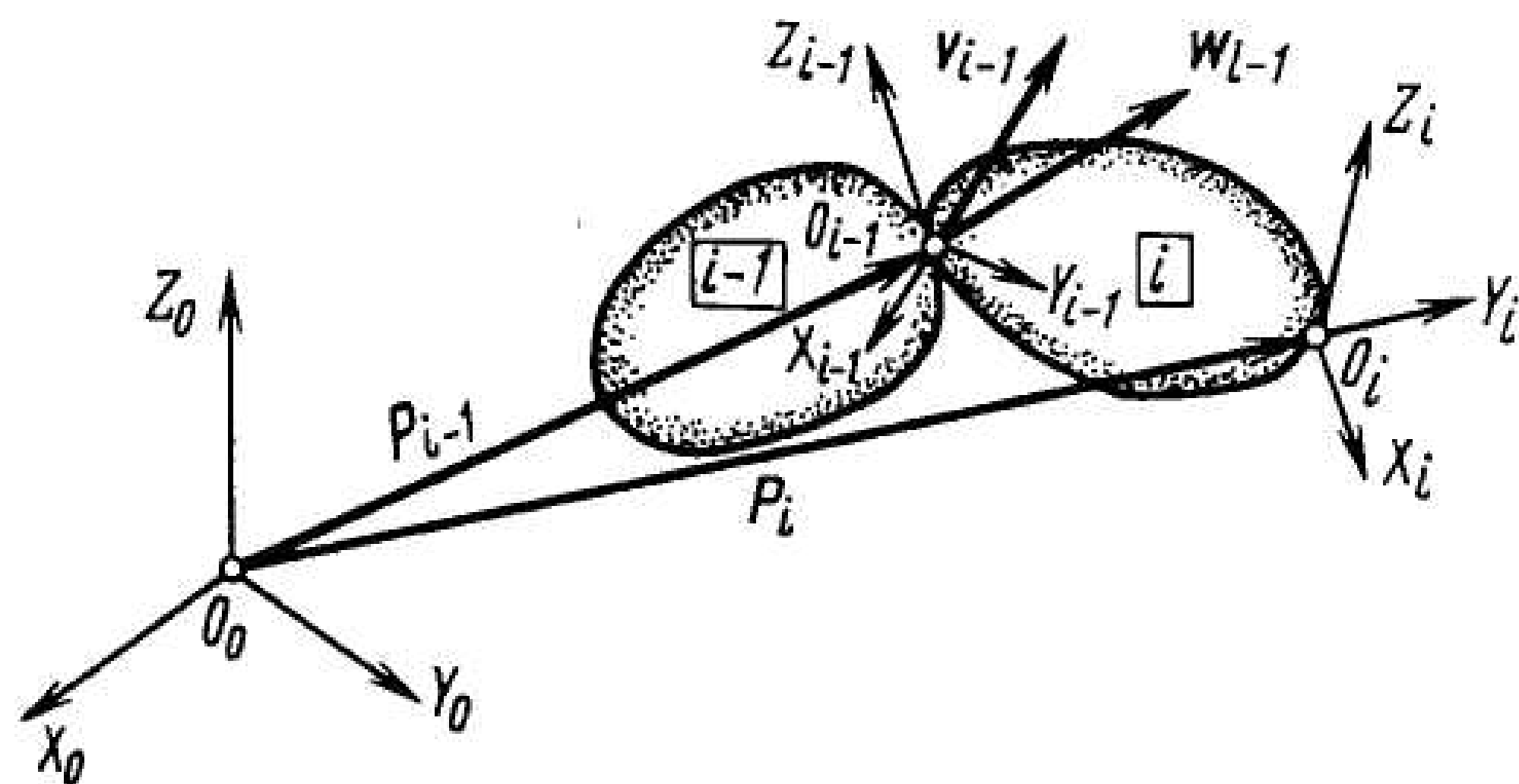


Рис. 3.3. Системы координат двух соседних звеньев

Пусть v_{i-1} и ω_{i-1} — линейная и угловая скорости подвижной системы координат, $P_{i-1,i} = P_i - P_{i-1}$ — вектор, характеризующий расположение начала i-й системы координат относительно (i-1)-й. Тогда в соответствии с соотношениями (3.3) можно записать

$$v_i = v_{i-1} + \omega_{i-1} \times P_{i-1,i} + \frac{d^* p_{i-1,i}}{dt}, \quad (3.5)$$

где $\frac{d^* p_{i-1,i}}{dt}$ — скорость, вычисленная в подвижной системе координат.

Кроме того, нетрудно заметить, что для угловых скоростей справедливо соотношение

$$\omega_i = \omega_{i-1} + \omega_i^{\prime-1}, \quad (3.6)$$

где $\omega_i^{\prime-1}$ — угловая скорость вращения системы координат $O_i X_i Y_i Z_i$ относительно $O_{i-1} X_{i-1} Y_{i-1} Z_{i-1}$. Поскольку системы координат звеньев выбраны так, что ось $O_i Z_i$ совпадает с осью вращения (для вращательных шарниров) или с направлением перемещения (для телескопических шарниров) (i-1)-го сочленения, имеет место соотношение

$$\omega_i^{\prime-1} = \begin{cases} z_{i-1} \dot{q}_i & \text{— для вращательного сочленения,} \\ 0 & \text{— для поступательного сочленения,} \end{cases} \quad (3.7)$$

где \dot{q}_i — угловая скорость вращения i-го звена относительно подвижной системы координат.

Аналогично можно найти линейные и угловые ускорения точки. При той же интерпретации систем координат, используя формулу (4.4), получаем

$$\dot{v}_i = \dot{v}_{i-1} + \omega_{i-1} \times (\omega_{i-1} \times P_{i-1,i}) + 2\omega_{i-1} \times \frac{d^* p_{i-1,i}}{dt} + \frac{d^{*2} p_{i-1,i}}{dt^2}. \quad (3.8)$$

Из соотношения (3.6) следует, что

$$\dot{\omega}_i = \dot{\omega}_{i-1} + \dot{\omega}_i^{\prime-1}, \quad (3.9)$$

$$\text{где } \dot{\omega}_i^{\prime-1} = \frac{d^* \omega_i^{\prime-1}}{dt} + \omega_{i-1} \times \omega_i^{\prime-1}. \quad (3.10)$$

В соответствии с соотношением (3.7) имеем

$$\frac{d^* \omega_i^{\prime-1}}{dt} = \begin{cases} z_{i-1} \ddot{q}_i & \text{— для вращательного сочленения,} \\ 0 & \text{— для телескопического сочленения.} \end{cases} \quad (3.11)$$

С учетом равенств (3.5)–(3.11) окончательно получаем выражения для линейных скоростей и ускорений i-го звена относительно базовой системы координат:

$$v_i = \begin{cases} v_{i-1} + \omega_i \times P_{i-1,i} & \text{— для вращательного сочленения,} \\ v_{i-1} + \omega_i \times P_{i-1,i} + z_{i-1} \dot{q}_i & \text{— для телескопического сочленения;} \end{cases} \quad (3.12)$$

$$\dot{v}_i = \begin{cases} \dot{v}_{i-1} + \omega_i \times (\omega_i \times p_{i-1,i}) + \dot{\omega}_i \times p_{i-1,i} & \text{— для вращательного сочленения,} \\ \dot{v}_{i-1} + \omega_i \times (\omega_i \times p_{i-1,i} + 2\omega_i \times (z_{i-1}\dot{q}_i)) + & \text{— для телескопического} \\ + \dot{\omega}_i \times p_{i-1,i} + z_{i-1}\ddot{q}_i & \text{сочленения.} \end{cases} \quad (3.13)$$

Аналогично для угловых скоростей и ускорений i -го звена относительно базовой системы координат запишем следующие соотношения:

$$\omega_i = \begin{cases} \omega_{i-1} + z_{i-1}\dot{q}_i & \text{— для вращательного сочленения,} \\ \omega_{i-1} & \text{— для телескопического сочленения;} \end{cases} \quad (3.14)$$

$$\dot{\omega}_i = \begin{cases} \dot{\omega}_{i-1} + z_{i-1}\ddot{q}_i + \omega_{i-1} \times (z_{i-1}\dot{q}_i) & \text{— для вращательного сочленения,} \\ \dot{\omega}_{i-1} & \text{— для телескопического сочленения.} \end{cases} \quad (3.15)$$

В соотношениях (3.12)–(3.15) индекс i пробегает значения от 1 до N (N — число звеньев манипулятора), при этом стандартные начальные условия (при неподвижном основании) имеют вид $\omega_0 = \dot{\omega}_0 = v_0 = 0$, $\dot{v}_0 = g$, где g — вектор ускорения свободного падения. Соотношения (3.12), (3.13) позволяют последовательно найти скорости и ускорения звеньев, начиная от основания в направлении к схвату (так называемая прямая рекурсия).

Таким образом, соотношения (3.12)–(3.15) являются рекуррентными. Однако можно без труда получить и конечные зависимости линейных и угловых скоростей как функцию угловых скоростей и обобщенных координат. Зафиксируем k -е звено; тогда в соответствии с (3.14), (3.15) имеем

$$\omega_k = \omega_{k-1} + z_{k-1}\dot{q}_k = \omega_{k-2} + z_{k-2}\dot{q}_{k-1} + z_{k-1}\dot{q}_k.$$

Отсюда вытекает соотношение для вектора угловой скорости k -го звена:

$$\omega_k = z_0\dot{q}_1 + z_1\dot{q}_2 + \dots + z_{k-1}\dot{q}_k. \quad (3.16)$$

Аналогично получаем соотношение для вектора скорости поступательного движения, используя выражение (3.12) с учетом (3.14),

$$v_k = v_{k-1} + \omega_k \times p_{k-1,k} = v_{k-2} + \omega_{k-1} \times p_{k-2,k-1} + (\omega_{k-1} + z_{k-2}\dot{q}_{k-1}) \times p_{k-1,k} = \\ = v_{k-2} + \omega_{k-1} \times (p_{k-1,k} + p_{k-2,k-1}) + z_{k-1} \times p_{k-1,k} \dot{q}_k.$$

Поскольку

$$p_{k-2,k-1} + p_{k-1,k} = p_{k-2,k},$$

окончательно находим

$$v_k = v_{k-2} + \omega_{k-1} \times p_{k-2,k} + z_{k-1} \times p_{k-1,k} \dot{q}_k = \\ = v_{k-2} + (\omega_{k-2} + z_{k-2}\dot{q}_{k-1}) \times p_{k-2,k} + z_{k-1} \times p_{k-1,k} \dot{q}_k = \\ = v_{k-2} + \omega_{k-2} \times p_{k-2,k} + z_{k-2} \times p_{k-2,k} \dot{q}_{k-1} + z_{k-1} \times p_{k-1,k} \dot{q}_k.$$

Продолжая этот итерационный процесс, нетрудно получить выражение для вектора линейной скорости k -го звена манипулятора с вращающимися шарнирами:

$$v_k = z_0 \times p_{0,k} \dot{q}_1 + z_1 \times p_{1,k} \dot{q}_2 + \dots + z_{k-1} \times p_{k-1,k} \dot{q}_k. \quad (3.17)$$

Заметим, что в выражениях (3.12)–(3.15) все векторы, описывающие движение механизма, заданы в базовой системе координат. Это не всегда удобно, особенно при выводе динамических уравнений манипулятора, когда, например, момент инерции звена, вычисленный относительно неподвижной системы координат, зависит от положения этого звена. Поэтому целесообразно получить эти соотношения для линейных \tilde{v}_i и угловых $\tilde{\omega}_i$ скоростей, а также линейных $\tilde{\dot{v}}_i$ и угловых $\tilde{\dot{\omega}}_i$ ускорений, заданных в системах координат соответствующих звеньев. Такие соотношения весьма удобны с вычислительной точки зрения.

Пусть, как и ранее, матрица перехода от системы координат i -го звена $O_i X_i Y_i Z_i$ к системе координат $(i-1)$ -го звена $O_{i-1} X_{i-1} Y_{i-1} Z_{i-1}$

$$A_i = \left(\begin{array}{c|c} R_i & p_i \\ \hline 000 & 1 \end{array} \right). \quad (3.18)$$

Приведем без вывода следующие соотношения:

для линейных скоростей и ускорений

$$\tilde{v}_i = \begin{cases} R_i^T \tilde{v}_{i-1} + \tilde{\omega}_i \times \tilde{p}_{i-1,i} & \text{— для вращательного сочленения,} \\ R_i^T \tilde{v}_{i-1} + \tilde{\omega}_i \times \tilde{p}_{i-1,i} + R_i^T z_0 \dot{q}_i & \text{— для поступательного сочленения;} \end{cases} \quad (3.19)$$

для линейных ускорений

$$\tilde{\dot{v}}_i = \begin{cases} R_i^T \tilde{\dot{v}}_{i-1} + \tilde{\omega}_i \times (\tilde{\omega}_i \times \tilde{p}_{i-1,i}) + \tilde{\dot{\omega}}_i \times \tilde{p}_{i-1,i} & \text{— для вращательного сочленения,} \\ R_i^T \tilde{\dot{v}}_{i-1} + \tilde{\omega}_i \times (\tilde{\omega}_i \times \tilde{p}_{i-1,i}) + 2\tilde{\omega}_i \times (R_i^T z_0 \dot{q}_i) + & \text{— для поступательного} \\ + \tilde{\dot{\omega}}_i \times p_{i-1,i} + R_i^T z_0 \ddot{q}_i & \text{сочленения;} \end{cases} \quad (3.20)$$

для угловых скоростей

$$\tilde{\omega}_i = \begin{cases} R_i^T \tilde{\omega}_{i-1} + R_i^T z_0 \dot{q}_i & \text{— для вращательного сочленения,} \\ R_i^T \tilde{\omega}_{i-1} & \text{— для поступательного сочленения;} \end{cases} \quad (3.21)$$

для угловых ускорений

$$\dot{\tilde{\omega}}_i = \begin{cases} R_i^T \dot{\tilde{\omega}}_{i-1} + R_i^T z_0 \ddot{q}_i + R_i^T \tilde{\omega}_{i-1} \times z_0 \dot{q}_i & \text{— для вращательного сочленения,} \\ R_i^T \dot{\tilde{\omega}}_{i-1} & \text{— для поступательного сочленения.} \end{cases} \quad (3.22)$$

В выражениях (3.19), (3.20) $P_{i-1,i}$ — вектор положения системы $O_{i-1}X_{i-1}Y_{i-1}Z_{i-1}$ в проекциях на оси системы координат $O_iX_iY_iZ_i$; $z_0 = (0, 0, 1)^T$.

3.1.3. Запись основных кинематических соотношений с помощью блочных матриц

Для анализа кинематики и динамики манипуляционных механизмов полученные ранее выражения для линейных и угловых скоростей и ускорений звеньев манипулятора целесообразно записывать через производные его обобщенных координат. Это может быть достигнуто с использованием аппарата блочных матриц [33, 35].

Блочными называют такие матрицы (векторы), компонентами которых также являются матрицы (векторы). Для блочных матриц и векторов сохраняются правила выполнения операций над обычными матрицами и векторами. Так, для $n \times n$ -блочной матрицы $B = [b_{ij}]$, $i, j = 1, \dots, n$ (b_{ij} — $m \times m$ -матрицы), и блочного вектора $a = [a_1, \dots, a_n]^T$ (a_i — $m \times 1$ -векторы) справедливо равенство

$$Ba = c,$$

где

$$c = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n b_{1j} a_j \\ \dots \\ \sum_{j=1}^n b_{nj} a_j \end{pmatrix}^T$$

$n \times 1$ -блочный вектор, фактический размер которого $mn \times 1$.

Умножая $n \times n$ -блочную матрицу B на $n \times 1$ -вектор $c = [c_1, \dots, c_n]^T$, получаем блочную $n \times 1$ -матрицу $Bc = \sum_{j=1}^n b_{ij} c_j$, размер которой, как обычной матрицы равен $nm \times m$.

Для блочных матриц $B = [b_{ij}]$ размеров $n \times r$ и $C = [c_{ij}]$ размеров $r \times n$ произведение представляет собой $n \times n$ -блочную матрицу

$$D = BC = \left(\sum_{j=1}^r b_{ij} c_{jk} \right).$$

При этом необходимо, чтобы размеры матриц b_{ij} и c_{jk} допускали их попарное перемножение.

С учетом сказанного, запишем с помощью блочных матриц соотношения (3.16), (3.17), (3.19) и (3.21), определяющие угловые и линейные скорости движения звеньев манипулятора в неподвижной системе координат.

Введем блочный $N \times 1$ -вектор угловых скоростей ω и диагональную $N \times N$ -блочную матрицу z , состоящую из ортов осей кинематических пар — 3×1 -векторов z_i :

$$\omega = (\omega_1 \ \omega_2 \ \dots \ \omega_N)^T, \quad z = \text{diag}(z_0 \ z_1 \ \dots \ z_{N-1}),$$

а также $N \times N$ -матрицу $\sigma = \text{diag}(\sigma_1 \ \sigma_2 \ \dots \ \sigma_N)$. Тогда систему равенств (3.16) при $k = 1, \dots, N$ можно записать как одно матричное равенство

$$\omega = Uz\sigma\dot{q} = B_\omega(q)\dot{q}, \quad (3.23)$$

где

$$U = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & \dots & 0 \\ E & E & 0 & \dots & 0 \\ E & E & E & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ E & E & E & \dots & E \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_\omega(q) = Uz\sigma.$$

Аналогично для блочного вектора

$$\tilde{\omega} = (\tilde{\omega}_1 \ \tilde{\omega}_2 \ \dots \ \tilde{\omega}_N)^T,$$

описывающего угловую скорость в системах координат, связанных со звеньями манипулятора, систему равенств (3.21) можно представить в виде

$$\tilde{\omega} = \Omega^T v \sigma \dot{q}, \quad (3.24)$$

где Ω^T , v — блочные матрицы:

$$\Omega^T = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \Omega_{21}^T & E & 0 & \dots & 0 \\ \Omega_{31}^T & \Omega_{32}^T & E & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Omega_{N1}^T & \Omega_{N2}^T & \Omega_{N3}^T & \dots & E \end{pmatrix},$$

$$v = \text{diag}(v_1 \ v_2 \ \dots \ v_N).$$

Для того чтобы получить матричные выражения, описывающие линейные скорости звеньев (3.17), (3.19), условимся векторное произведение $a \times b$ записывать в виде $\lambda(a)b$, где $\lambda(a)$ — кососимметрическая матрица:

$$\lambda(a) = \begin{pmatrix} 0 & -a_z & a_y \\ a_z & 0 & -a_x \\ -a_y & a_x & 0 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что в силу свойств векторного произведения

$$\lambda(a)b = -\lambda(b)a = \lambda^T(b)a.$$

Введем теперь блочную матрицу

$$\Lambda(\omega) = \text{diag}(\lambda(\omega_1) \ \lambda(\omega_2) \ \dots \ \lambda(\omega_N))$$

и блочные векторы

$$P = (p_{10} \ p_{21} \ \dots \ p_{NN-1})^T, \quad V = (v_1 \ v_2 \ \dots \ v_N)^T.$$

Тогда систему равенств (3.17) при $k=1, 2, \dots, N$ можно представить в виде одного матричного уравнения

$$V = Uz(E - \sigma)\dot{q} + U\Lambda(\omega)P. \quad (3.25)$$

Подставляя в правую часть этого равенства выражение для ω из соотношения (3.23), второе слагаемое записываем в виде

$$U\Lambda(\omega)P = U\Lambda^T(P)\omega = U\Lambda^T(P)Uz\sigma\dot{q} = \tilde{\Lambda}^T(P)Uz\sigma\dot{q},$$

где

$$\tilde{\Lambda}^T(P) = \begin{pmatrix} \lambda^T(p_{10}) & 0 & \dots & 0 \\ \lambda^T(p_{10}) & \lambda^T(p_{21}) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda^T(p_{10}) & \lambda^T(p_{21}) & \dots & \lambda^T(p_{NN-1}) \end{pmatrix}.$$

Таким образом, система равенств (3.17) соответствует матричному соотношению

$$V = Uz(E - \sigma)\dot{q} + \tilde{\Lambda}^T(P)Uz\sigma\dot{q} = B_1\dot{q}, \quad (3.26)$$

где $B_1 = Uz(E - \sigma) + \tilde{\Lambda}^T(P)Uz\sigma$.

Непосредственно перемножая матрицы $\tilde{\Lambda}^T(P)$ и Uz , можно представить матрицу $\tilde{\Lambda}^T(P)Uz$ в правой части этого выражения в виде

$$\tilde{\Lambda}^T(P)Uz = \begin{pmatrix} \lambda(z_0)p_{10} & 0 & \dots & 0 \\ \lambda(z_0)p_{20} & \lambda(z_1)p_{21} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda(z_0)p_{N0} & \lambda(z_1)p_{N1} & \dots & \lambda(z_{N-1})p_{NN-1} \end{pmatrix}.$$

откуда следует эквивалентность равенств (3.17) и (3.26).

Аналогичное равенство для блочного вектора линейных скоростей

$$\tilde{V} = (\tilde{v}_1 \ \tilde{v}_2 \ \dots \ \tilde{v}_N)^T,$$

заданных в связанных со звеньями системах координат (см.(3.19)), имеет вид

$$\tilde{V} = \Omega^T v (E - \sigma)\dot{q} + \Omega^T \Lambda(\tilde{\omega})\tilde{P}. \quad (3.27)$$

где

$$\Lambda(\tilde{\omega}) = \text{diag}(\lambda(\tilde{\omega}_1) \ \dots \ \lambda(\tilde{\omega}_N)),$$

$$\tilde{P} = (\tilde{p}_{10} \ \tilde{p}_{21} \ \dots \ \tilde{p}_{NN-1}).$$

Напомним, что элементы этих матриц $\tilde{\omega}_i$, \tilde{v}_i , \tilde{p}_{i-1} заданы в i -й системе координат.

Подставляя в правую часть равенства (3.27) выражение для $\tilde{\omega}$ из (3.24), окончательно получаем

$$\tilde{V} = \Omega^T v (E - \sigma)\dot{q} + \Omega^T \tilde{\Lambda}^T(\tilde{P})\Omega v \sigma \dot{q}. \quad (3.28)$$

Непосредственно перемножая матрицы, стоящие в правой части этого выражения, находим расчетные формулы для определения ком-

понент вектора \tilde{V} в функции от \dot{q} . При этом для второго слагаемого имеем

$$\Omega^T \tilde{\Lambda}^T (\tilde{P}) \Omega v = \begin{pmatrix} \lambda(v_1) \tilde{p}_{10} & 0 & \dots & 0 \\ \Omega_{21}^T \lambda(v_1) \tilde{p}_{10} + \lambda(\Omega_{21} v_1) \tilde{p}_{21} & \lambda(v_2) \tilde{p}_{21} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Omega_{N1}^T \lambda(v_1) \tilde{p}_{10} + \dots & \Omega_{N2}^T \lambda(v_2) \tilde{p}_{21} + \dots & \dots & \dots \\ + \Omega_{N2} \lambda(\Omega_{21} v_1) \tilde{p}_{21} + \dots & + \Omega_{N3} \lambda(\Omega_{32} v_2) \tilde{p}_{32} + \dots & \dots & \lambda(v_N) \tilde{p}_{NN} \\ + \dots + \Omega_{NN-1} \lambda(\Omega_{N1} v_1) \tilde{p}_{NN-1} & + \dots + \Omega_{NN-1} \lambda(\Omega_{N2} v_2) \tilde{p}_{NN-1} & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

В силу ортогональности матриц Ω_i можно записать

$$\lambda(\Omega_i^T a) b = \Omega_i^T \lambda(a) \Omega_i b.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \Omega_{21}^T \lambda(v_1) \tilde{p}_{10} + \lambda(\Omega_{21} v_1) \tilde{p}_{21} &= \Omega_{21}^T \lambda(v_1) \tilde{p}_{10} + \Omega_{21}^T \lambda(v_1) \Omega_{21} \tilde{p}_{21} = \\ &= \Omega_{21}^T \lambda(v_1) [\tilde{p}_{10} + \Omega_{21} \tilde{p}_{21}] = \Omega_{21}^T \lambda(v_1) \tilde{p}_{20}, \end{aligned}$$

где \tilde{p}_{20} — вектор, заданный в i -й системе координат.

Далее, выполняя аналогичные преобразования, выражение $\Omega^T \tilde{\Lambda}^T (\tilde{P}) \Omega v \sigma \dot{q}$, стоящее в правой части выражения (3.28), запишем в виде

$$\Omega^T \tilde{\Lambda}^T (\tilde{P}) \Omega v \sigma \dot{q} = \begin{pmatrix} \lambda(v_1) \tilde{p}_{10} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \Omega_{21} \lambda(v_1) \tilde{p}_{20} & \lambda(v_2) \tilde{p}_{21} & 0 & \dots & 0 \\ \Omega_{31} \lambda(v_1) \tilde{p}_{30} & \Omega_{32} \lambda(v_2) \tilde{p}_{31} & \lambda(v_3) \tilde{p}_{32} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Omega_{N1} \lambda(v_1) \tilde{p}_{N0} & \Omega_{N2} \lambda(v_2) \tilde{p}_{N1} & \Omega_{N3} \lambda(v_3) \tilde{p}_{N2} & \dots & \lambda(v_N) \tilde{p}_{NN-1} \end{pmatrix}, \quad (3.29)$$

наиболее удобном для практических вычислений.

Преимущество полученных формул заключается в том, что они содержат информацию о линейных и угловых скоростях для всех звеньев манипулятора. В частности, для N -го звена (схвата) манипулятора можно записать следующие равенства, определяющие вектор угловой скорости в абсолютной и связанной с N -м звеном системах координат:

$$\omega_N = J_v \dot{q}, \quad (3.30)$$

где

$$J_v = z^T \sigma, \quad z^T = (z_0^T \ z_1^T \ \dots \ z_{N-1}^T).$$

Заметим, что вектор z можно получить, умножая матрицу z на $N \times 1$ -единичный вектор $e_N = [1 \ \dots \ 1]^T$, $z = z e_N$.

Аналогично

$$\tilde{\omega}_N = \tilde{J}_v \dot{q}, \quad (3.31)$$

где

$$\tilde{J}_v = \tilde{\Omega}^T v \sigma,$$

$$\tilde{\Omega}^T = (\Omega_{N1}^T \ \dots \ \Omega_{NN-1}^T \ E).$$

Для линейной скорости N -го звена будем иметь

$$v_N = J_v \dot{q}, \quad (3.32)$$

где

$$J_v = [\Lambda(z) P_N]^T \sigma + z^T (E - \sigma),$$

$$P_N = (p_{N0} \ p_{N1} \ \dots \ p_{NN-1})^T$$

и

$$\tilde{v}_N = \tilde{J}_v \dot{q}, \quad (3.33)$$

где обозначено

$$\tilde{J}_v = \tilde{\Omega}^T (v(E - \sigma) + \Lambda(v \tilde{P}_N) \sigma),$$

$$\tilde{P}_N = (\tilde{p}_{N0} \ \tilde{p}_{N1} \ \dots \ \tilde{p}_{NN-1})^T.$$

Формулы для определения линейных и угловых ускорений звеньев манипулятора получаем непосредственным дифференцированием по времени соотношений (3.30)–(3.33). Определим угловые и линейные ускорения в неподвижной системе координат.

Предварительно рассмотрим несколько вспомогательных соотношений. Заметим, что в соответствии с принятыми обозначениями

$$z_i = \Omega_{i0}^T z_0 = \Omega_{i-1,0}^T \Omega_i^T z_0 = \Omega_{i-1,0} v_i, \quad (3.34)$$

или

$$z = \Omega_0^T v,$$

где $\Omega_0^T = \text{diag}(E \ \Omega_{10}^T \ \dots \ \Omega_{N-1,0}^T)$.

Нетрудно проверить, что

$$\dot{\Omega}_{i0} = \Omega_{i0} \lambda(\tilde{\omega}_i),$$

Отсюда

$$\dot{\Omega}_0 = \Omega_0 \Lambda(\tilde{\omega}).$$

Таким образом, получаем

$$\dot{z}_i = \lambda(\omega_i) z_i,$$

или в матричной форме

$$\dot{z} = \Lambda(\omega) z. \quad (3.35)$$

Теперь определим угловые ускорения ε звеньев в неподвижной системе координат. Дифференцируя обе части равенства (3.23), получаем

$$\begin{aligned} \dot{\omega} &= B_\omega(q)\ddot{q} + \dot{B}_\omega(q, \dot{q})\dot{q} = Uz\sigma\ddot{q} + U\dot{z}\sigma\dot{q} = \\ &= Uz\sigma\ddot{q} + U\Lambda(\omega)z\sigma\dot{q} = U\Omega_0^T v\sigma\ddot{q} + U\Lambda(\omega)\Omega_0^T v\sigma\dot{q}. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Выразив в последнем слагаемом ω по формуле (3.23), окончательно запишем это равенство в виде

$$\varepsilon = \dot{\omega} = U\Omega_0^T v\sigma\ddot{q} + U\Lambda(Uz\sigma\dot{q})\Omega_0^T v\sigma\dot{q}. \quad (3.37)$$

Заметим, что второе слагаемое содержит произведения скоростей относительного движения звеньев \dot{q}_i .

Дифференцируя равенство (3.26), характеризующее линейные скорости звеньев в неподвижной системе координат, получаем

$$\begin{aligned} \dot{V} &= B_v(q)\ddot{q} + \dot{B}_v(q, \dot{q})\dot{q} = U\dot{z}(E - \sigma)\dot{q} + Uz(E - \sigma)\ddot{q} + \\ &+ \Lambda^T(\dot{P})Uz\sigma\dot{q} + \Lambda^T(P)U\dot{z}\sigma\dot{q} + \Lambda^T(P)Uz\sigma\ddot{q}. \end{aligned}$$

Здесь, как и выше,

$$P = \Omega_0^T \tilde{P}, \text{ а } \tilde{P} = (\tilde{p}_{10} \dots \tilde{p}_{NN-1})^T \text{ —}$$

вектор, компоненты которого заданы в системах координат, связанных со звеньями.

Таким образом,

$$\dot{P} = \dot{\Omega}_0^T \tilde{P} + \Omega_0^T \dot{\tilde{P}} = \Lambda(\omega)P + \Omega_0^T v(E - \sigma)\dot{q}.$$

С учетом этих формул находим вектор ускорения

$$\begin{aligned} w = \dot{v} &= (Uz(E - \sigma) + \Lambda^T(P)Uz\sigma)\ddot{q} + [U\Lambda(\omega)z(E - \sigma) + \Lambda^T(\Lambda(\omega)P)Uz\sigma + \\ &+ \Lambda^T(P)\Lambda(\omega)z\sigma + \Lambda^T(\Omega_0^T v(E - \sigma)\dot{q})Uz\sigma]\dot{q}. \end{aligned}$$

Подставляя сюда выражения для z и ω из (3.34), (3.23), окончательно получаем

$$\begin{aligned} w &= B_v(q)\ddot{q} + \dot{B}_v(q, \dot{q})\dot{q} = [U(E - \sigma) + \Lambda^T(P)U\sigma]\Omega_0 v\ddot{q} + \\ &+ [\Lambda^T(P)\Lambda(U\Omega_0 v\sigma\dot{q})\sigma + \Lambda^T(\Lambda(U\Omega_0 v\sigma\dot{q})P)U\sigma + 2\Lambda^T(U\Omega_0 v\sigma\dot{q})(E - \sigma)]\dot{q}. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Последнее слагаемое в правой части этого выражения определяет кориолисово ускорение, возникающее при угловом вращении поступательно движущихся тел. Если механизм не содержит поступательных пар ($\sigma = E$), то это слагаемое равно нулю.

Выражения (3.37), (3.38) описывают угловые и линейные ускорения всех звеньев манипулятора в неподвижной системе координат. В частности, получаем выражение для углового ускорения схвата манипулятора

$$\dot{\omega}_N = \varepsilon_N = J_\omega(q)\ddot{q} + \dot{J}_\omega(q, \dot{q})\dot{q}, \quad (3.39)$$

где

$$\dot{J}_\omega(q, \dot{q}) = \tilde{\Omega}_0^T \Lambda(\omega) v\sigma\dot{q},$$

$$\tilde{\Omega}_0^T = [E \ \Omega_{10}^T \ \Omega_{20}^T \ \dots \ \Omega_{N-1,0}^T].$$

Аналогично запишем соотношение для линейного ускорения схвата

$$w_N = \dot{v}_N = J_v(q)\ddot{q} + \dot{J}_v(q, \dot{q})\dot{q}. \quad (3.40)$$

Выражение $\dot{J}_v(q, \dot{q})$ можно легко определить из (3.38) как сомножитель при \dot{q} для N -й строки вектора w .

Полученные соотношения характеризуют зависимость скоростей и ускорений звеньев манипулятора от производных обобщенных координат, использование которых, в частности, необходимо при выводе и исследовании уравнений динамики манипуляторов (см. далее гл. 5). Полученные соотношения можно использовать при компьютерном моделировании манипуляционных систем [33; 45]. Однако при решении задач управления возникают жесткие ограничения по времени, поэтому более предпочтительными являются рекуррентные формулы (см. п. 3.1.2).

3.1.4. Уравнения для скоростей и ускорений в однородных координатах

Получим аналогичные соотношения для скоростей и ускорений звеньев манипулятора, воспользовавшись аппаратом однородных координат.

Пусть $\rho = (x', y', z', 1)$ — вектор однородных координат точки твердого тела в связанной системе координат $O'X'Y'Z'$ и T — матрица перехода к неподвижной системе $OXYZ$. Тогда нетрудно увидеть, что имеют место следующие соотношения:

$$r = T\rho, \quad \dot{r} = \dot{T}\rho, \quad \ddot{r} = \ddot{T}\rho, \quad (3.41)$$

где $r = (x, y, z, 1)^T$, $\dot{r} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, 0)^T$, $\ddot{r} = (\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}, 0)^T$ — однородные векторы положения, скорости и ускорения точки твердого тела в неподвижной системе координат, а \dot{T} , \ddot{T} — матрицы, элементами которых являются первые и вторые производные соответствующих элементов матрицы T .

Пусть теперь мы имеем N -звенный манипулятор, кинематика которого задана однородными матрицами A_1, A_2, \dots, A_N , построенными по схеме Денавита — Хартенберга (см. § 1.4), т.е.

$$A_i = \begin{pmatrix} c_i & -c_{ai}s_i & s_{ai}s_i & a_i c_i \\ s_i & c_{ai}c_i & -s_{ai}c_i & a_i s_i \\ 0 & s_{ai} & c_{ai} & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.42)$$

Тогда для k -го звена получаем

$$r = T_k \rho, \quad T_k = A_1 A_2 \dots A_k, \quad (3.43)$$

где r и ρ — однородные векторы точки в системах координат $O_0 X_0 Y_0 Z_0$ и $O_k X_k Y_k Z_k$ соответственно. Обозначим через \dot{q}_i скорости изменения обобщенных координат сочленений. Тогда, согласно (3.43), имеем

$$\dot{r} = \dot{T}_k(q_1, q_2, \dots, q_k) \dot{\rho}, \quad (3.44)$$

где

$$\dot{T}_k = \sum_{i=1}^k \frac{\partial T_k}{\partial q_i} \dot{q}_i = \sum_{i=1}^k A_1 A_2 \dots A_{i-1} \frac{\partial A_i}{\partial q_i} A_{i+1} \dots A_k \dot{q}_i. \quad (3.45)$$

Непосредственной проверкой нетрудно убедиться в справедливости следующего правила дифференцирования матриц A_i :

$$\frac{\partial A_i}{\partial q_i} = \theta_i A_i.$$

Здесь

$$\theta_i = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{— для вращательного сочленения} \quad (3.46)$$

или

$$\theta_i = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{— для призматического сочленения.} \quad (3.47)$$

Окончательно получаем

$$\dot{T}_k = \sum_{i=1}^k U_{ki} \dot{q}_i, \quad (3.48)$$

где

$$U_{ki} = \begin{cases} A_1 A_2 \dots A_{i-1} \theta_i A_i A_{i+1} \dots A_k, & i \leq k, \\ 0, & i > k, \end{cases} \quad k = 1, 2, \dots, N. \quad (3.49)$$

Скорость \dot{r} любой точки k -го звена, заданной в системе координат звена однородным вектором ρ , определяем следующим образом:

$$\dot{r} = \left(\sum_{i=1}^k U_{ki} \dot{q}_i \right) \rho. \quad (3.50)$$

Аналогично можно получить соотношение для ускорения k -го звена:

$$\ddot{T}_k = \sum_{i=1}^k U_{ki} \ddot{q}_i + \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k U_{kij} \dot{q}_i \dot{q}_j, \quad (3.51)$$

где

$$U_{kij} = \begin{cases} A_1 A_2 \dots A_{i-1} \theta_i A_i A_{i+1} \dots A_{j-1} \theta_j A_j A_{j+1} \dots A_k, & i \leq j \leq k, \\ A_1 A_2 \dots A_{j-1} \theta_j A_j A_{j+1} \dots A_{i-1} \theta_i A_i A_{i+1} \dots A_k, & j \leq i \leq k, \\ 0, & k < i, \\ 0, & k < j. \end{cases} \quad (3.52)$$

Ускорение \ddot{r} любой точки k -го звена, заданной однородным вектором ρ , легко найти, если воспользоваться соотношением (3.23):

$$\ddot{r} = \ddot{T}_k \rho, \quad (3.53)$$

где \ddot{T}_k определяется соотношениями (3.51), (3.52).

Таким образом, скорости и ускорения звеньев, выраженные через скорости обобщенных координат, задаются соотношениями (3.48)–(3.53). Эти соотношения не являются рекуррентными, однако их нетрудно получить, если воспользоваться соотношением, связывающим положение k -го и $(k-1)$ -го звена:

$$T_k = T_{k-1} A_k, \quad k = 1, 2, \dots, N, \\ T_0 = E.$$

Действительно, при дифференцировании этих соотношений по времени можно получить следующие рекуррентные уравнения для скоростей и ускорений:

$$\dot{T}_k = \dot{T}_{k-1} A_k + B_k \dot{q}_k, \quad (3.54)$$

$$\ddot{T}_k = \ddot{T}_{k-1} A_k + B_k \ddot{q}_k + C_k, \quad (3.55)$$

где

$$B_k = T_{k-1} \theta_k A_k, \\ C_k = 2\dot{T}_{k-1} \theta_k A_k \dot{q}_k + T_{k-1} \theta_k^2 A_k \dot{q}_k^2. \quad (3.56)$$

Заметим, что уравнения (3.54)–(3.56) эквивалентны уравнениям (3.12)–(3.15). Покажем это для линейных \mathbf{v}_k и угловых $\boldsymbol{\omega}_k$ скоростей в случае вращательного соединения. Пусть

$$T_k = \begin{pmatrix} R_k & \mathbf{p}_k \\ 000 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_k = \begin{pmatrix} O_k & \mathbf{r}_k \\ 000 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.57)$$

В силу системы уравнений (3.46) имеем

$$\dot{A}_k = \theta_k A_k \dot{q}_k, \quad (3.58)$$

где

$$\theta_k = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & & 0 \\ & \Omega_{001} & & 0 \\ & & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

и кососимметрическая матрица Ω_{001} задает вращение вокруг оси с ортом $\mathbf{z}_k^k = (0, 0, 1)^T$.

Используя соотношение (3.54) с учетом (3.57) и (3.58), находим

$$\dot{R}_k = \dot{R}_{k-1} O_k + R_{k-1} \dot{O}_k, \quad (3.59)$$

$$\mathbf{p}_k = \mathbf{p}_{k-1} + \dot{R}_{k-1} \mathbf{r}_k + R_{k-1} \Omega_{001} \mathbf{r}_k. \quad (3.60)$$

Рассмотрим сначала соотношение (3.59). В соответствии с известным соотношением $\dot{R} = \Omega_{\omega} R$ имеем

$$\Omega_{\omega_k} R_k = \Omega_{\omega_{k-1}} R_{k-1} O_k + R_{k-1} \Omega_{001} O_k \dot{q}_k = \Omega_{\omega_{k-1}} R_k + R_{k-1} \Omega_{001} R_{k-1}^T R_{k-1} O_k \dot{q}_k = \\ = \Omega_{\omega_{k-1}} R_k + \Omega_{R_{k-1}(0,0,1)^T} R_k \dot{q}_k.$$

Матрица R_k невырожденная, следовательно,

$$\Omega_{\omega_k} = \Omega_{\omega_{k-1}} + \Omega_{\mathbf{z}_{k-1}} \dot{q}_k.$$

Таким образом,

$$\boldsymbol{\omega}_k = \boldsymbol{\omega}_{k-1} + \mathbf{z}_{k-1} \dot{q}_k,$$

что совпадает с выражением (3.14) для вращательного сочленения.

Аналогично получим рекуррентную формулу для линейных скоростей. Имеем

$$\mathbf{v}_k = \mathbf{v}_{k-1} + \Omega_{\omega_{k-1}} R_{k-1} \mathbf{r}_k + R_{k-1} \Omega_{001} R_{k-1}^T R_{k-1} \mathbf{r}_k = \\ = \mathbf{v}_{k-1} + \Omega_{\omega_{k-1}} \mathbf{p}_{k-1,k} + \Omega_{R_{k-1}(0,0,1)^T} \mathbf{p}_{k-1,k} \dot{q}_k = \mathbf{v}_{k-1} + (\Omega_{\omega_{k-1}} + \Omega_{\mathbf{z}_{k-1}} \dot{q}_k) \mathbf{p}_{k-1,k} = \\ = \mathbf{v}_{k-1} + \Omega_{\omega_k} \mathbf{p}_{k-1,k} = \mathbf{v}_{k-1} + \boldsymbol{\omega}_k \times \mathbf{p}_{k-1,k},$$

что совпадает с формулой (3.12) для вращательного сочленения.

3.2. Дифференциальные преобразования

В предыдущем параграфе были получены выражения для скоростей и ускорений звеньев, обусловленных скоростями и ускорениями в подвижных сочленениях. Здесь рассмотрим важную задачу, аналогичную описанной ранее, а именно: как сказываются малые приращения одних кинематических параметров манипулятора на другие. Этот анализ используют при изучении динамики многосвязных механизмов, а также при построении алгоритмов управления.

3.2.1. Вращение твердого тела

Подход, используемый в данной книге для описания дифференциальных преобразований, отличается от представленного в работах [60; 63]. Как показано в этих работах, дифференциальные вращения осуществляются вокруг оси, проходящей через начало абсолютной системы

координат, что, естественно, приводит к перемещению начала связанной системы координат. Это перемещение необходимо далее специальным образом учитывать при вычислении полной линейной скорости схвата, что является весьма неудобным. Приведенные здесь результаты лишены указанного недостатка.

Пусть \mathbf{r} — вектор, вращающийся в абсолютной системе координат с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)^T$. Тогда имеет место соотношение

$$\dot{\mathbf{r}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \quad (3.61)$$

или

$$\dot{\mathbf{r}} = \Omega_{\boldsymbol{\omega}} \mathbf{r}, \quad (3.62)$$

где $\Omega_{\boldsymbol{\omega}}$ — кососимметрическая матрица:

$$\Omega_{\boldsymbol{\omega}} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.63)$$

Заметим, что $\det \Omega_{\boldsymbol{\omega}} = 0$.

Предположим, что твердое тело вращается с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$ вокруг оси, проходящей через начало неподвижной системы координат $O_0 X_0 Y_0 Z_0$. Свяжем с телом систему координат $O_1 X_1 Y_1 Z_1$, положение которой относительно $O_0 X_0 Y_0 Z_0$ задано матрицей R , а начало O_1 совпадает с O_0 . Пусть \mathbf{r}' и \mathbf{r} — векторы, задающие положение произвольной точки тела в связанной и абсолютной системах координат соответственно:

$$\mathbf{r} = R\mathbf{r}'. \quad (3.64)$$

Дифференцируя (3.64) с учетом (3.61), (3.62), получаем

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{R}\mathbf{r}' = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = \boldsymbol{\omega} \times (R\mathbf{r}') = \Omega_{\boldsymbol{\omega}} R\mathbf{r}'. \quad (3.65)$$

Поскольку \mathbf{r}' — произвольный вектор, то в соответствии с (3.65) имеем

$$\dot{R} = \Omega_{\boldsymbol{\omega}} R. \quad (3.66)$$

Допустим, что вектор $\boldsymbol{\omega}$ задан в некоторой системе координат $O_0 X' Y' Z'$ (начала у всех систем координат совпадают) с матрицей перехода U :

$$\boldsymbol{\omega} = U\boldsymbol{\omega}'. \quad (3.67)$$

Найдем матрицу $\Omega_{\boldsymbol{\omega}}$. Для этого воспользуемся следующим утверждением. Если A — матрица ортогонального преобразования, то имеем

$$A(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = A\mathbf{a} \times A\mathbf{b}. \quad (3.68)$$

Согласно соотношениям (3.67), (3.68), получаем

$$\begin{aligned} \Omega_{\boldsymbol{\omega}} \mathbf{r} &= \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = (U\boldsymbol{\omega}') \times \mathbf{r} = (U\boldsymbol{\omega}') \times (UU^{-1}\mathbf{r}) = (U\boldsymbol{\omega}') \times (U(U^{-1}\mathbf{r})) = \\ &= U(\boldsymbol{\omega}' \times U^{-1}\mathbf{r}) = U\Omega_{\boldsymbol{\omega}'}U^{-1}\mathbf{r}, \end{aligned}$$

откуда в силу произвольного выбора \mathbf{r} следует, что

$$\Omega_{\boldsymbol{\omega}} = U\Omega_{\boldsymbol{\omega}'}U^{-1} \quad (3.69)$$

или

$$\Omega_{\boldsymbol{\omega}'} = U^{-1}\Omega_{\boldsymbol{\omega}}U, \quad (3.70)$$

где $\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{\omega}'$ связаны соотношением (3.67).

Ясно, что полученная матрица $\Omega_{\boldsymbol{\omega}}$ также является кососимметрической, что легко проверить, используя соотношение (3.70). Нетрудно показать, что для ортогональной матрицы A имеет место равенство

$$\Omega_{A\mathbf{a}+\mathbf{b}} = A\Omega_{\mathbf{a}}A^T + \Omega_{\mathbf{b}}.$$

Пусть теперь ось вращения твердого тела не проходит через начало координат абсолютной системы $O_0 X_0 Y_0 Z_0$. При этом связанная система $O' X' Y' Z'$ выбрана так, что ее начало лежит в произвольной точке на оси вращения (рис. 3.4). Тогда скорость \mathbf{v} любой точки M тела, заданной вектором \mathbf{r} , имеет вид

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r} - \mathbf{p}). \quad (3.71)$$

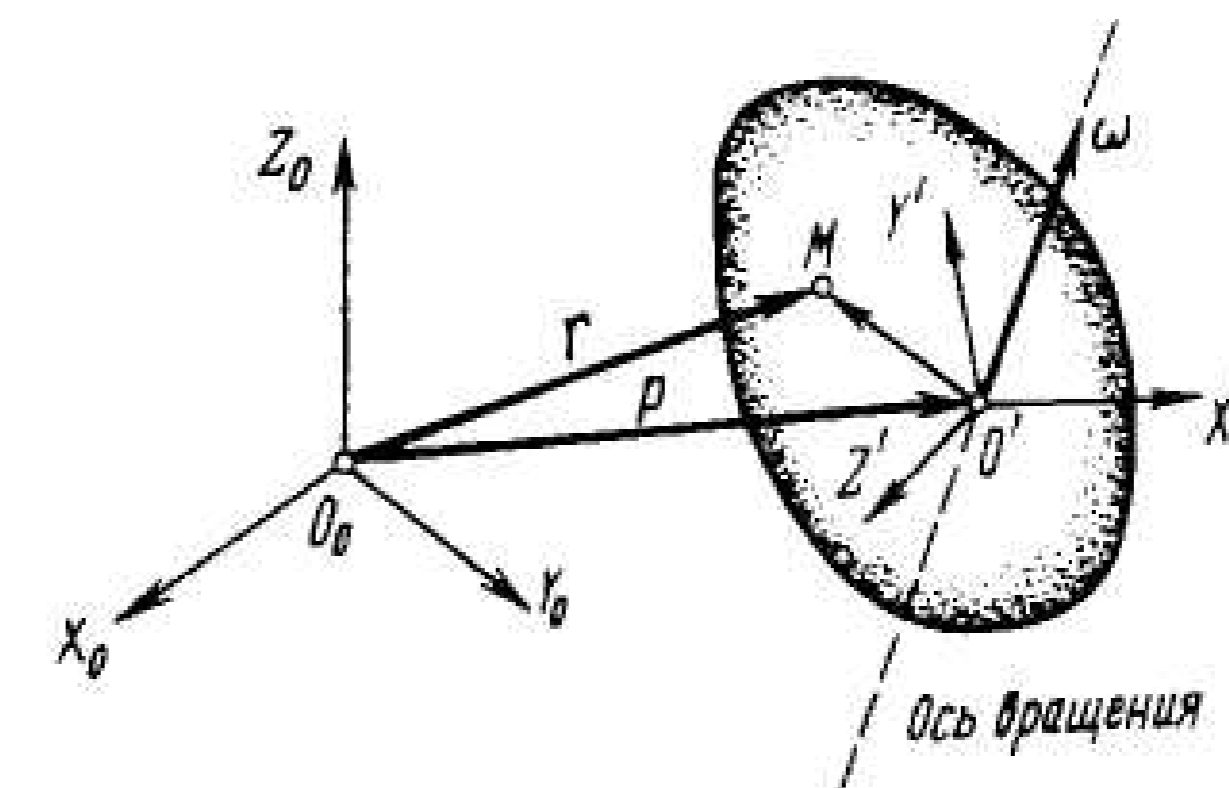


Рис. 3.4. Вращение твердого тела вокруг оси, не проходящей через начало координат

Для векторов \mathbf{r}' и \mathbf{r} в связанной и абсолютной системах координат имеет место соотношение

$$\mathbf{r} = R\mathbf{r}' + \mathbf{p}. \quad (3.72)$$

Тогда, согласно (3.64), (3.65), имеем

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{R}\mathbf{r}' = \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r} - \mathbf{p}) = \boldsymbol{\omega} \times (R\mathbf{r}' + \mathbf{p} - \mathbf{p}) = \boldsymbol{\omega} \times R\mathbf{r}' = \Omega_{\omega} R\mathbf{r}',$$

откуда следует соотношение

$$\dot{R} = \Omega_{\omega} R, \quad (3.73)$$

аналогичное (3.66).

Получим теперь те же соотношения для однородных векторов и преобразований. Пусть по-прежнему тело вращается с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega} = (\boldsymbol{\omega}^T, 0)^T$ вокруг оси, не проходящей через начало системы координат $O_0X_0Y_0Z_0$ (см. рис. 3.4). Положение тела (т.е. связанной системы координат $O'X'Y'Z'$) задано матрицей

$$T = \left(\begin{array}{c|c} R & \mathbf{p} \\ \hline 000 & 1 \end{array} \right). \quad (3.74)$$

Запишем для \dot{T} соотношение, аналогичное (3.73):

$$\dot{T} = W_{\omega, \mathbf{p}} T. \quad (3.75)$$

Согласно выражениям (3.74) и (3.75), находим

$$W_{\omega, \mathbf{p}} = \dot{T}T^{-1} = \left(\begin{array}{cc} \dot{R} & \dot{\mathbf{p}} \\ 000 & 0 \end{array} \right) T^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} \Omega_{\omega} R & \dot{\mathbf{p}} \\ \hline 000 & 1 \end{array} \right) T^{-1},$$

откуда получаем

$$W_{\omega, \mathbf{p}} = \left(\begin{array}{c|c} \Omega_{\omega} & -\Omega_{\omega} \mathbf{p} \\ \hline 000 & 0 \end{array} \right). \quad (3.76)$$

Заметим, что матрица $W_{\omega, \mathbf{p}}$ в отличие от Ω_{ω} не является кососимметрической (хотя по-прежнему является вырожденной).

Интерпретация соотношения, содержащего матрицу (3.76), в связи с равенством

$$\boldsymbol{\rho}_1 \times \boldsymbol{\rho}_2 = W_{\boldsymbol{\rho}_1} \boldsymbol{\rho}_2,$$

где $\boldsymbol{\rho}_1$ и $\boldsymbol{\rho}_2$ — однородные векторы, является весьма интересной, но выходит за рамки обсуждаемой проблемы управления роботами.

3.2.2. Дифференциальное перемещение

Как было сказано, любое движение твердого тела можно задать как плоское перемещение вместе с некоторым центром и вращение вокруг оси, проходящей через этот центр. Дифференциальное перемещение задается вектором

$$ds = \begin{pmatrix} \delta\boldsymbol{\varphi} \\ d\mathbf{r} \end{pmatrix}, \quad (3.77)$$

где

$$\delta\boldsymbol{\varphi} = (\delta x, \delta y, \delta z)^T \quad (3.78)$$

вектор дифференциального вращения, компоненты которого бесконечно малые углы поворота вокруг осей координат;

$$d\mathbf{r} = (dx, dy, dz)^T \quad (3.79)$$

вектор дифференциального переноса, компоненты которого бесконечно малые перемещения (с сохранением ориентации) вдоль осей координат.

Далее будут рассмотрены проекции этих векторов на оси разных систем координат.

Свяжем, как и прежде, систему координат с твердым телом, положение которого задано матрицей

$$T = \left(\begin{array}{c|c} R & \mathbf{p} \\ \hline 000 & 1 \end{array} \right).$$

Пусть твердое тело совершает дифференциальное перемещение, т.е. дифференциальный перенос

$$d\mathbf{r}_T = (dx_T, dy_T, dz_T)^T,$$

и затем дифференциальное вращение

$$\delta\boldsymbol{\varphi}_T = (\delta x_T, \delta y_T, \delta z_T)^T$$

вдоль оси, проходящей через начало связанной с телом системы координат (рис. 3.5) (векторы $d\mathbf{r}_T$ и $\delta\boldsymbol{\varphi}_T$ заданы проекциями на оси связанной системы координат).

Тогда новое значение матрицы T принимает вид

$$T'(d\mathbf{r}_T, \delta\boldsymbol{\varphi}_T) = TL(d\mathbf{r}_T) \text{Rot}(\delta\boldsymbol{\varphi}_T) = TL_T \text{Rot}_T. \quad (3.80)$$

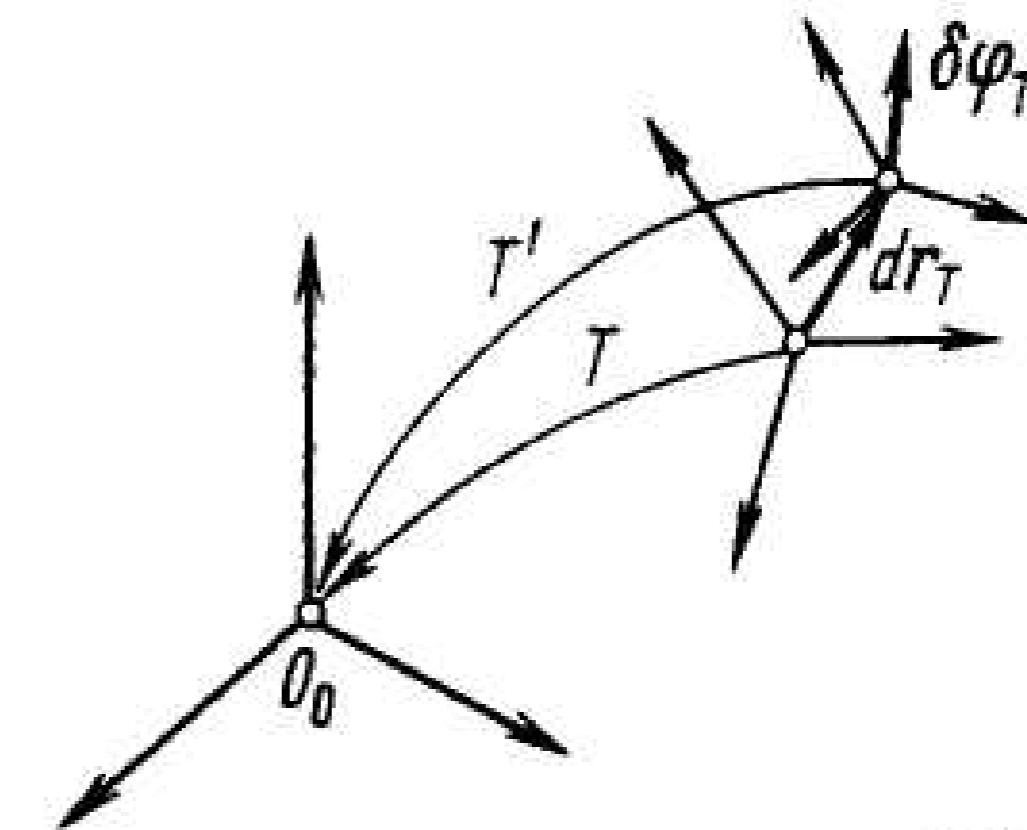


Рис. 3.5. Дифференциальное перемещение

В соответствии с выражением (1.31) матрица $L(dr_T) = L_T$ равна

$$L_T = \left(\begin{array}{c|c} E & dr_T \\ \hline 000 & 1 \end{array} \right). \quad (3.81)$$

Найдем матрицу Rot_T . Воспользуемся выражениями (1.9)–(1.11) для нахождения матриц, описывающих элементарные вращения. Учтывая, что компоненты вектора (3.78) бесконечно малы, получаем

$$Rot_{x, \delta x} = \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\delta x & 0 \\ 0 & \delta x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right), \quad (3.82)$$

$$Rot_{y, \delta y} = \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & \delta y & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\delta y & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right), \quad (3.83)$$

$$Rot_{z, \delta z} = \left(\begin{array}{cccc} 1 & -\delta z & 0 & 0 \\ \delta z & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right). \quad (3.84)$$

Нетрудно проверить, что суммарное вращение не зависит от порядка вращений вокруг координат (поэтому будем считать $\delta\phi$ вектором) и, следовательно,

$$Rot(\delta\phi_T) = Rot_T = \left(\begin{array}{cccc} 1 & -\delta z_T & \delta y_T & 0 \\ \delta z_T & 1 & -\delta x_T & 0 \\ -\delta y_T & \delta x_T & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right). \quad (3.85)$$

С учетом выражений (3.81), (3.85) находим

$$L_T Rot_T = \left(\begin{array}{cccc} 1 & -\delta z_T & \delta y_T & \delta x_T \\ \delta z_T & 1 & -\delta x_T & \delta y_T \\ -\delta y_T & \delta x_T & 1 & \delta z_T \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right). \quad (3.86)$$

Пусть теперь компоненты дифференциального перемещения заданы в абсолютной системе координат, т.е.

$$\begin{aligned} \delta\phi_0 &= R\delta\phi_T, \\ dr_0 &= Rdr_T. \end{aligned} \quad (3.87)$$

Тогда для матрицы переноса получаем следующее выражение:

$$TL_T = \left(\begin{array}{cc|c} R & p & E \ dr_T \\ \hline 000 & 1 & 0 \ 1 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc|c} R & p + dr_T & \\ \hline 0 & 1 & \end{array} \right) = L_0 T. \quad (3.88)$$

Рассмотрим теперь матрицу дифференциального вращения (3.85). Вращение тела осуществляется вокруг оси, проходящей через начало связанной системы координат с матрицей перехода $U = TL_T$. Ясно, что

$$Rot_T = E + W_{\delta\phi_0}, \quad (3.89)$$

где в соответствии с соотношением (3.76)

$$W_{\delta\phi_0} = \left(\begin{array}{c|c} \Omega_{\delta\phi_0} & 0 \\ \hline 000 & 0 \end{array} \right). \quad (3.90)$$

Аналогично (3.70) находим

$$W_{\delta\phi_0} = U^{-1} W_{\delta\phi_0} U. \quad (3.91)$$

Подставляя выражение (3.91) в (3.89), получаем

$$Rot_T = E + U^{-1} W_{\delta\phi_0} U = U^{-1} (E + W_{\delta\phi_0}) U = U^{-1} Rot_0 U,$$

где

$$Rot_0 = E + \left(\begin{array}{c|c} \Omega_{\delta\phi_0} & -\Omega_{\delta\phi_0} p \\ \hline 000 & 1 \end{array} \right). \quad (3.92)$$

С учетом равенства $U = TL_T$ имеем

$$Rot_T = L_T^{-1} T^{-1} Rot_0 TL_T, \quad (3.93)$$

и окончательно

$$T'(dr_0, \delta\phi_0) = Rot_0 L_0 T, \quad (3.94)$$

где

$$L_0 = \left(\begin{array}{c|c} E & dr_0 \\ \hline 000 & 1 \end{array} \right), \quad (3.95)$$

$$Rot_0 = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\delta z_0 & \delta y_0 & \\ \delta z_0 & 1 & -\delta x_0 & -\Omega_{\delta\phi_0} p \\ -\delta y_0 & \delta x_0 & 1 & \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right). \quad (3.96)$$

Таким образом, соотношения (3.80), (3.81), (3.85) и (3.94)–(3.96) определяют положение связанной системы координат после осуществления дифференциальных преобразований, заданных в связанной и абсолютной системах координат.

3.2.3. Матрица дифференциальных преобразований

Представим матрицу T' в виде (рис. 3.6)

$$T' = T + dT. \quad (3.97)$$

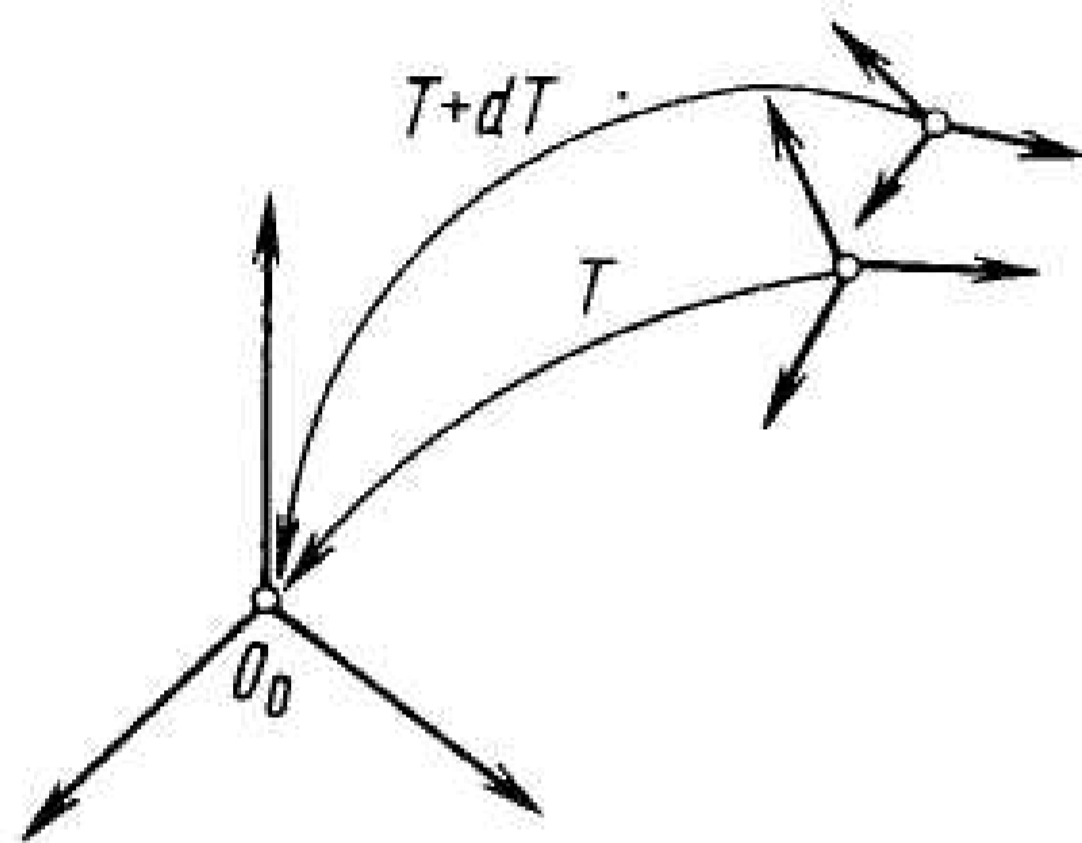


Рис. 3.6. Изменение матрицы положения в результате дифференциального преобразования

Тогда для дифференциальных преобразований, заданных в связанной системе координат, имеем

$$dT_T = T'(dr_T, \delta\varphi_T) - T = T(L_T \text{Rot}_T - E)$$

или

$$dT_T = T\Delta_T = \begin{pmatrix} R\Omega_T & Rdr_T \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.98)$$

где

$$\Delta_T = \begin{pmatrix} 0 & -\delta z_T & \delta y_T & dx_T \\ \delta z_T & 0 & -\delta x_T & dy_T \\ -\delta y_T & \delta x_T & 0 & dz_T \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Omega_{\delta\varphi_T} & dr_T \\ 000 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.99)$$

Для тех же дифференциальных преобразований, заданных в неподвижной системе координат, получаем

$$dT_0 = T'(dr_0, \delta\varphi_0) - T = (\text{Rot}_0 L_0 - E)T$$

или

$$dT_0 = \Delta_0 T_0 = \begin{pmatrix} \Omega_0 R & dr_0 \\ 000 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.100)$$

где

$$\text{Rot}_0 = \begin{pmatrix} 0 & -\delta z_0 & \delta y_0 & dr_0 - \Omega_{\delta\varphi_0} p \\ \delta z_0 & 0 & -\delta x_0 & \\ -\delta y_0 & \delta x_0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Omega_{\delta\varphi_0} & dr_0 - \Omega_{\delta\varphi_0} p \\ 000 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.101)$$

Матрицы Δ_T и Δ_0 называют матрицами дифференциальных преобразований, соответствующих дифференциальному переносу и вращению. Поскольку, согласно построению $dT_0 = dT_T$ (см. (3.97)), имеем

$$\Delta_0 T = T\Delta_T \quad (3.102)$$

и, следовательно,

$$\Delta_T = T^{-1} \Delta_0 T. \quad (3.103)$$

Получим еще один результат, который используем далее при изучении вопросов, связанных с управлением. Сформулируем задачу в известном смысле обратную по отношению к только что рассмотренной.

Предположим, что положения тела в моменты времени t_1 и t_2 , причем разность $t_1 - t_2$ мала, характеризуются в базовой системе координат матрицами

$$T_1 = \begin{pmatrix} R_1 & p_1 \\ 000 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & p_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.104)$$

$$T_2 = \begin{pmatrix} R_2 & p_2 \\ 000 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 & y_2 & z_2 & p_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = T_1 + dT. \quad (3.105)$$

Требуется найти дифференциальные перемещения (δx , δy , δz , $\delta\varphi$, $\delta\psi$, $\delta\omega$) и матрицу, переводящую T_1 в T_2 в базовой системе координат. Напомним, что подобная задача рассматривалась в п. 1.2.4, однако там не учитывалась малость перемещений, необходимых для совмещения T_1 с T_2 .

Имеем

$$dT = T_2 - T_1 = \Delta_0 T_1 = \left(\begin{array}{c|c} \Omega_{\delta\varphi} R_1 & dr \\ \hline 000 & 1 \end{array} \right),$$

откуда

$$dr = p_2 - p_1, \quad (3.106)$$

$$\Omega_{\delta\varphi} R_1 = R_2 - R_1 \quad (3.107)$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1 + \delta\varphi \times x_1, \\ y_2 &= y_1 + \delta\varphi \times y_1, \\ z_2 &= z_1 + \delta\varphi \times z_1. \end{aligned} \quad (3.108)$$

Умножая векторно слева (3.108) последовательно на x_1 , y_1 , z_1 , после элементарных преобразований получаем

$$\delta\varphi = \frac{1}{2}(x_1 \times x_2 + y_1 \times y_2 + z_1 \times z_2). \quad (3.109)$$

Таким образом, чтобы переместить твердое тело из некоторого положения, заданного матрицей T_1 , в близкое положение, заданное матрицей T_2 , необходимо переместить его на вектор dr (3.106) и повернуть вокруг оси, проходящей через начало связанной системы и определяемой вектором $\delta\varphi$ (3.109). При этом все векторы заданы в абсолютной системе координат.

3.3. Прямая и обратная задачи о скорости

Выше мы рассматривали прямую и обратную задачи о положении, имея в виду нахождение зависимости между обобщенными координатами механизма и положением схвата. Аналогично сформулируем и задачу о скорости, играющую большую роль при построении алгоритмов управления движением манипулятора.

Пусть положение схвата N -звенного манипулятора характеризуется шестью числами: тремя координатами начала связанной со схватом системы координат и тремя углами, определяющими ее ориентацию. Обозначим, как и раньше (см. § 1.4), эти параметры через s . Пусть $q = (q_1, q_2, \dots, q_N)^T$ — вектор обобщенных координат, $\dot{q} = (\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_N)^T$ — вектор скоростей обобщенных координат, v и

ω — линейная и угловая скорости схвата (т.е. системы координат $O_N X_N Y_N Z_N$, связанной со схватом) соответственно. Положение схвата однозначно определяется его обобщенными координатами

$$s = f(q). \quad (3.110)$$

Дифференцируя (3.110) по времени, получаем

$$\dot{s} = J(q)\dot{q}, \quad (3.111)$$

где \dot{s} — 6×1 -вектор обобщенной скорости схвата:

$$\dot{s} = (\omega^T, v^T)^T;$$

$J(q)$ — $6 \times N$ -матрица Якоби для преобразования f :

$$J(q) = \frac{\partial f}{\partial q}.$$

Соотношение (3.111) показывает, что вектор обобщенной скорости схвата линейно зависит от вектора скоростей обобщенных координат. Заметим, что при $N=6$ матрица Якоби становится квадратной, и для нее можно вычислить определитель $\det J(q)$, который называют якобианом преобразования f .

Сформулируем прямую и обратную задачи о скорости.

Прямая: по заданному вектору скоростей обобщенных координат \dot{q} найти вектор обобщенной скорости схвата \dot{s} .

Обратная: по заданному вектору обобщенной скорости схвата \dot{s} найти скорости в сочленениях \dot{q} .

Рассмотрим сначала прямую скоростную задачу.

3.3.1. Прямая задача о скорости

Пусть задана скорость изменения обобщенных координат \dot{q} , требуется найти угловую ω и линейную v скорости схвата. Используя соотношения (3.12), (3.14), заметим, что если матрицу Якоби записать следующим образом:

$$J(q) = (j_1, j_2, \dots, j_N), \quad (3.112)$$

то 6 -мерный вектор j_k будет определяться выражением

$$j_k = \begin{pmatrix} z_{k-1} \\ z_{k-1} \times p_{k-1,N} \end{pmatrix} \text{ — для вращательного сочленения,}$$

либо

$$j_k = \begin{pmatrix} 0 \\ z_{k-1} \end{pmatrix} \quad \text{для телескопического сочленения.}$$

Таким образом, соотношение для скоростей

$$\begin{pmatrix} \omega \\ v \end{pmatrix} = J(q)\dot{q}, \quad (3.113)$$

где матрица Якоби $J(q)$ определяется выражением (3.112), является решением прямой задачи о скорости.

Покажем теперь, как можно получить матрицу Якоби, используя дифференциальные преобразования. Найдем k -й столбец матрицы Якоби j_k . Пусть k -е звено манипулятора совершает движение, вызванное малым изменением соответствующей обобщенной координаты. Изменение матрицы положения манипулятора обозначим $d_k T$.

Тогда в соответствии с выражениями (3.45)–(3.49) имеем

$$d_k T = A_1 A_2 \dots A_{k-1} \theta_k dq_k A_{k+1} \dots A_{N-1} A_N, \quad (3.114)$$

где θ_k задается равенством (3.46) или (3.47) в зависимости от типа сочленения.

Кроме того, в соответствии с выражением (3.68) можно записать:

$$d_k T = \Delta_{\theta_k} T. \quad (3.115)$$

Тогда, используя (3.85), (3.86), получаем

$$\Delta_{\theta_k} = (d_k T)T^{-1} = (A_1 A_2 \dots A_{k-1} \theta_k dq_k A_k A_{k+1} \dots A_{N-1} A_N)(A_N^{-1} A_{N-1}^{-1} \dots A_2^{-1} A_1^{-1}). \quad (3.116)$$

Если, как и прежде, через T_{k-1} обозначить матрицу, задающую положение и ориентацию системы координат $(k-1)$ -го звена в абсолютной системе координат:

$$T_{k-1} = A_1 A_2 \dots A_{k-1},$$

то получим

$$\Delta_{\theta_k} = T_{k-1} \theta_k T_{k-1}^{-1} dq_k. \quad (3.117)$$

Пусть матрица T_{k-1} имеет вид

$$T_{k-1} = \begin{pmatrix} R_{k-1} & P_{k-1} \\ 000 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{k-1} & y_{k-1} & z_{k-1} & P_{k-1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.118)$$

Тогда в соответствии с (1.40)

$$T_{k-1}^{-1} = \begin{pmatrix} R_{k-1}^T & -R_{k-1}^T P_{k-1} \\ 000 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.119)$$

Обозначим через $\delta\varphi_N$ и dr_N искомые дифференциальные перемещения схвата. Если в (3.117) выполнить все необходимые операции, то получим для вращательного сочленения следующее выражение:

$$\begin{pmatrix} \Omega_{\delta\varphi_N} & dr_N - \Omega_{\delta\varphi_N} P_N \\ 000 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{k-1} \Omega_{\delta\varphi_k} R_{k-1}^T & -R_{k-1} \Omega_{\delta\varphi_k} R_{k-1}^T P_{k-1} \\ 000 & 0 \end{pmatrix} dq_k.$$

Откуда

$$\Omega_{\delta\varphi_N} = R_{k-1} \Omega_{\delta\varphi_k} R_{k-1}^T dq_k, \quad (3.120)$$

$$dr_N = \Omega_{\delta\varphi_N} P_N - R_{k-1} \Omega_{\delta\varphi_k} R_{k-1}^T P_{k-1} dq_k. \quad (3.121)$$

Здесь Ω_{001} — матрица вращения вокруг вектора $(0, 0, 1)^T$.

Поскольку

$$R_{k-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = z_{k-1},$$

в силу (3.68) из (3.120), (3.121) имеем

$$\Omega_{\delta\varphi_N} = \Omega_{z_{k-1}} dq_k,$$

$$dr_N = \Omega_{z_{k-1}} (P_N - P_{k-1}) dq_k,$$

отсюда

$$\delta\varphi_N = z_{k-1} dq_k, \quad (3.122)$$

$$dr_N = z_{k-1} \times (P_N - P_{k-1}) dq_k, \quad (3.123)$$

что совпадает с выражением (3.112) для вращательного сочленения. Для поступательного сочленения вывод аналогичен.

Пусть теперь угловая и линейная скорости заданы в системе координат схвата $O_N X_N Y_N Z_N$. Тогда в соответствии с выражением (3.89) вместо соотношения (3.115) запишем

$$d_k T = T \Delta_T. \quad (3.124)$$

Следовательно,

$$\Delta T_k = T^{-1} d_k T = (A_k A_{k+1} \dots A_N)^{-1} \theta_k dq_k (A_k A_{k+1} \dots A_N). \quad (3.125)$$

Введем матрицу

$$U_i = A_{i+1} A_{i+2} \dots A_{N-1} A_N, \quad (3.126)$$

определяющую положение и ориентацию схвата в i -й системе координат. Кроме того, для этой матрицы можно легко получить следующие рекуррентные соотношения:

$$U_{i-1} = A_i U_i, \quad i = N, N-1, \dots, 1, \quad (3.127)$$

где $U_N = E$.

Соотношение (3.125) можно записать в виде

$$\Delta_{T_i} = U_{k-1}^{-1} \theta_k dq_k U_{k-1}.$$

Обозначая

$$U_i = \left(\begin{array}{ccc|c} x_i & y_i & z_i & p_i \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right),$$

после несложных преобразований получаем для вращательного сочленения соотношения, аналогичные (3.122), (3.123),

$$\delta\varphi_{N_i} = (x_{k-1}, y_{k-1}, z_{k-1})^T dq_k, \quad (3.128)$$

$$dr_{N_i} = (x_{k-1}, p_{k-1}, -x_{k-1}, p_{k-1}, y_{k-1}, p_{k-1}, -y_{k-1}, p_{k-1}, z_{k-1}, p_{k-1}, -z_{k-1}, p_{k-1})^T.$$

Обсудим некоторые аспекты, связанные с вычислением матрицы Якоби (3.112). Обозначая

$$J = \begin{pmatrix} J_\omega \\ J_v \end{pmatrix},$$

имеем

$$\omega = J_\omega \dot{q},$$

$$v = J_v \dot{q}.$$

Тогда, как видно из (3.122), вычисление матрицы J_ω не представляет труда, поскольку векторы z_i являются компонентами матрицы

$$T_i = \left(\begin{array}{ccc|c} x_i & y_i & z_i & p_i \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

Что же касается вычисления $J_v = (a_0, a_1, \dots, a_{N-1})$, то здесь возникают трудности, связанные с вычислением векторных произведений $a_i = z_i \times p_{i,N}$, при этом $z_i = z_i(q_1, q_2, \dots, q_i)$, $p_{i,N} = p_{i,N}(q_1, q_2, \dots, q_N)$.

Получим еще одну форму представления матрицы J_v , в какой-то степени упрощающую процедуру ее вычисления. Для этого несколько расширим понятие векторного произведения.

Пусть B — матрица, столбцами которой являются векторы b_1, b_2, \dots, b_m :

$$B = (b_1, b_2, \dots, b_m). \quad (3.129)$$

Векторное произведение вектора и матрицы представим в виде

$$C = a \times B = (a \times b_1, a \times b_2, \dots, a \times b_m), \quad (3.130)$$

где a — $n \times 1$ -вектор; B — $n \times m$ -матрица; C — $n \times m$ -матрица.

Нетрудно доказать следующие свойства введенной операции:

$$1. a \times B = \Omega_a B. \quad (3.131)$$

$$2. B \Omega_a = B_a \times B. \quad (3.132)$$

$$3. a \times E = \Omega_a. \quad (3.133)$$

$$4. (U \times Vb)^T = (U^T Vb) \times U^T. \quad (3.134)$$

$$5. (R \times Rb)^T = b \times R^T. \quad (3.135)$$

$$6. (R \times a)^T = (R^T a) \times R^T. \quad (3.136)$$

$$7. (Rb) \times a = (R \times a)b. \quad (3.137)$$

Рассмотрим элемент матрицы Якоби, имеющий вид

$$a_k = z_k \times p_{k,N}. \quad (3.138)$$

Пусть матрицы

$$T_k = \left(\begin{array}{c|c} R_k & p_k \\ \hline 000 & 1 \end{array} \right), \quad (3.139)$$

$$A_k = \left(\begin{array}{c|c} O_k & r_k \\ \hline 000 & 1 \end{array} \right) \quad (3.140)$$

задают положение и ориентацию k -го звена манипулятора в абсолютной и относительной системах координат соответственно.

Тогда соотношение (3.138) преобразуется к виду

$$a_k = z_k \times p_{k,N} = (R_k e_z) \times (R_k p_{k,N}^k) = R_k (e_z \times p_{k,N}^k), \quad (3.141)$$

где $e_z = (0, 0, 1)^T$; $p_{k,N}^k$ — вектор, соединяющий начала систем координат $O_k X_k Y_k Z_k$ и $O_N X_N Y_N Z_N$, заданный в системе $O_k X_k Y_k Z_k$.

Введем вместо вектора $a_k = e_z \times p_{k,N}^k$, входящего в соотношение (3.141), матрицу

$$Y_k = E \times p_{k,N}^k, \quad (3.142)$$

где операция векторного умножения выполняется в том смысле, в каком она введена выше соотношением (3.130). Нетрудно увидеть, что

$$e_z \times p_{k,N}^k = Y_k e_z. \quad (3.143)$$

В силу свойства (3.133) имеем

$$Y_k = -p_{k,N}^k \times E = -\Omega_{p_{k,N}^k} = \Omega_{p_{k,N}^k}^T. \quad (3.144)$$

Заметим, что при использовании полученных соотношений (3.141), (3.143), а также того очевидного факта, что

$$z_k = R_k e_z,$$

матрицу Якоби (для вращательных сочленений) можно представить следующим образом:

$$\begin{aligned} J &= \begin{pmatrix} z_0 & z_1 & \dots & z_{N-1} \\ z_0 \times p_{0,N} & z_1 \times p_{1,N} & \dots & z_{N-1} \times p_{N-1,N} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} R_0 e_z & R_1 e_z & \dots & R_{N-1} e_z \\ R_0 (e_z \times p_{0,N}^0) & R_1 (e_z \times p_{1,N}^1) & \dots & R_{N-1} (e_z \times p_{N-1,N}^{N-1}) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} R_0 e_z & R_1 e_z & \dots & R_{N-1} e_z \\ R_0 Y_0 e_z & R_1 Y_1 e_z & \dots & R_{N-1} Y_{N-1} e_z \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Найдем зависимость между Y_k и Y_{k-1} . Имеем

$$Y_{k-1} = \Omega_{p_{k-1,N}^{k-1}}^T. \quad (3.145)$$

Из рис. 3.7 ясно, что

$$p_{k-1,N}^{k-1} = r_k + O_k p_{k,N}^k.$$

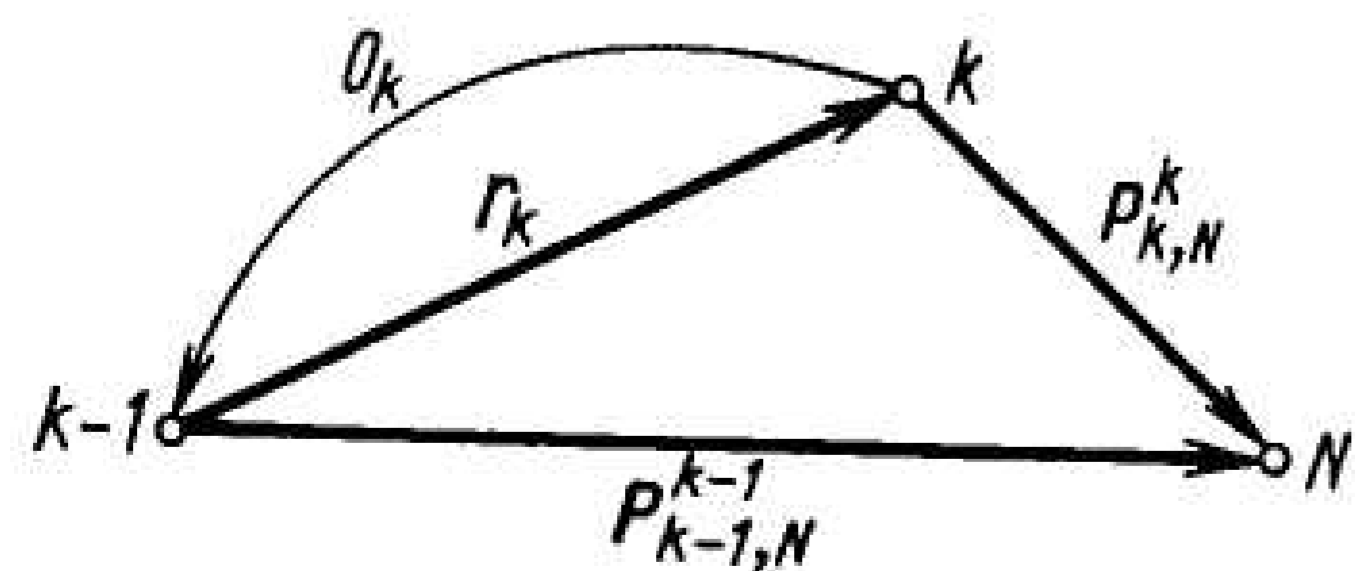


Рис. 3.7. Связь $k-1$ -й и k -й систем координат

Тогда

$$Y_{k-1} = \Omega_{O_k p_{k,N}^k + r_k}^T = (O_k \Omega_{p_{k,N}^k} O_k^T + \Omega_{r_k})^T = O_k^T \Omega_{p_{k,N}^k}^T O_k + \Omega_{r_k}^T.$$

Учитывая свойство (3.144), получаем следующие рекуррентные соотношения:

$$Y_{k-1} = O_k Y_k O_k^T - \Omega_{r_k}, \quad k = N, N-1, \dots, 1, \quad (3.146)$$

$$Y_N = e_z \times p_{N,N}^N = 0.$$

Рассмотрим матрицу

$$W_k = R_k Y_k. \quad (3.147)$$

Ясно, что по-прежнему компонента матрицы Якоби

$$a_k = W_k e_z. \quad (3.148)$$

Тогда

$$\begin{aligned} W_{k-1} &= R_{k-1} Y_{k-1} = R_{k-1} (O_k Y_k O_k^T - \Omega_{r_k}) = R_{k-1} O_k Y_k O_k^T - R_{k-1} \Omega_{r_k} = \\ &= R_k Y_k O_k^T - R_{k-1} \Omega_{r_k} = W_k O_k^T - R_{k-1} \Omega_{r_k}. \end{aligned}$$

Рассмотрим теперь член $R_{k-1} \Omega_{r_k}$. В соответствии с выражениями (3.131)–(3.137) имеем

$$R_{k-1} \Omega_{r_k} = R_k O_k^T \Omega_{r_k} = -R_k (O_k^T \Omega_{r_k}^T) = -R_k (\Omega_{r_k} O_k)^T = -R_k (r_k \times O_k)^T = -R_k L_k^T.$$

Окончательно получаем

$$\begin{aligned} W_{k-1} &= W_k O_k^T + R_k L_k^T, \quad k = N, N-1, \dots, 1, \\ W_N &= 0, \end{aligned} \quad (3.149)$$

где

$$L_k = (r_k \times O_k). \quad (3.150)$$

Таким образом, определение компонент подматрицы Якоби

$$J_v = (W_0 e_z \quad W_1 e_z \quad \dots \quad W_{N-1} e_z) \quad (3.151)$$

заключается в выполнении следующих шагов.

1. Вычисление матриц L_i , $i = 1, 2, \dots, N$ в соответствии с (3.150). Заметим, что эти матрицы, как правило, весьма просты, и, более того, поскольку A_i задается равенством (2.8), то нетрудно увидеть, что

$$L_i = r_i \times O_i = \begin{pmatrix} -d_i s_i & a_i s_i s_{a_i} - d_i c_i c_{a_i} & a_i s_i c_{a_i} - d_i s_{a_i} \\ d_i c_i & -a_i c_i s_{a_i} - d_i s_i c_{a_i} & -a_i c_i c_{a_i} \\ 0 & a_i c_{a_i} & a_i c_i s_{a_i} \end{pmatrix}.$$

2. Вычисление W_i , $i = N-1, N-1, \dots, 0$, в соответствии с (3.149) и нахождение компонент a_i матрицы J_v как третьего столбца матриц W_i .

Пример 3.1. Решить прямую задачу о скорости для двухзвенного манипулятора (рис.3.8).

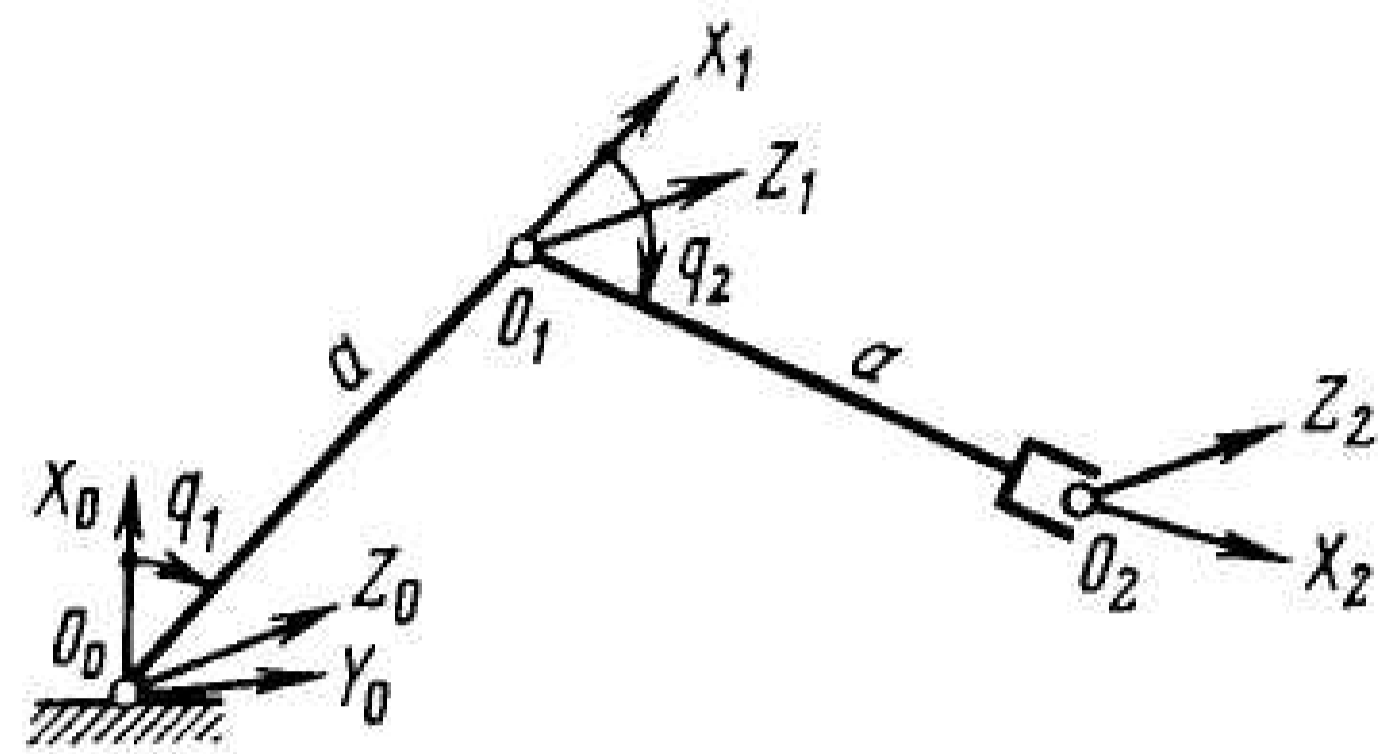


Рис. 3.8. Двухзвенный плоский манипулятор

Решение. Матрицы положения звеньев задаются следующим образом:

$$A_i = \begin{pmatrix} c_i & -s_i & 0 & ac_i \\ s_i & c_i & 0 & as_i \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} O_i & \mathbf{r}_i \\ \hline 000 & 1 \end{array} \right), \quad i=1, 2;$$

$$T_1 = A_1 = \left(\begin{array}{c|c} R_1 & \mathbf{p}_1 \\ \hline 000 & 1 \end{array} \right);$$

$$T_2 = \begin{pmatrix} c_{12} & -s_{12} & 0 & a(c_1 + c_{12}) \\ s_{12} & c_{12} & 0 & a(s_1 + s_{12}) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} R_2 & \mathbf{p}_2 \\ \hline 000 & 1 \end{array} \right).$$

Проиллюстрируем оба описанных выше способа вычисления матрицы Якоби.

В соответствии с первым способом матрица Якоби имеет вид

$$J = \begin{pmatrix} \mathbf{z}_0 & \mathbf{z}_1 \\ \mathbf{z}_0 \times \mathbf{p}_{0,2} & \mathbf{z}_1 \times \mathbf{p}_{1,2} \end{pmatrix},$$

где $\mathbf{z}_0 = \mathbf{z}_1 = (0, 0, 1)^T$.

Заметим, что

$$\mathbf{p}_{0,2} = \mathbf{p}_2 = (a(c_1 + c_{12}), a(s_1 + s_{12}), 0)^T,$$

$$\mathbf{p}_{1,2} = \mathbf{p}_{0,2} - \mathbf{p}_{0,1} = \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1 = (ac_{12}, as_{12}, 0)^T.$$

Тогда

$$\mathbf{z}_0 \times \mathbf{p}_{0,2} = \begin{pmatrix} -a(s_1 + s_{12}) \\ a(c_1 + c_{12}) \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{z}_0 \times \mathbf{p}_{0,2} = \begin{pmatrix} -a(s_1 + s_{12}) \\ a(c_1 + c_{12}) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

И окончательно получаем

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ -a(s_1 + s_{12}) & -as_{12} \\ a(c_1 + c_{12}) & ac_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Получим теперь матрицу Якоби с помощью рекуррентной процедуры.

Согласно второму способу, имеем

$$L_1 = \mathbf{r}_1 \times O_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & as_1 \\ 0 & 0 & -ac_1 \\ 0 & a & 0 \end{pmatrix},$$

$$L_2 = \mathbf{r}_2 \times O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & as_2 \\ 0 & 0 & -ac_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$W_1 = R_2 L_2^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -as_{12} \\ 0 & 0 & ac_{12} \\ as_2 & -ac_2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$W_0 = W_1 O_1^T + R_1 L_1^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -a(s_{12} + c_1) \\ 0 & 0 & a(c_{12} + c_1) \\ a(s_{12} + s_1) & -a(c_{12} + c_1) & 0 \end{pmatrix}.$$

Подставляя третьи столбцы W_0 и W_1 в матрицу Якоби, получаем тот же результат, что и в предыдущем случае.

В рассматриваемом примере элементы матрицы J_v можно получить непосредственным дифференцированием вектора p_2 матрицы T_2 . Действительно,

$$(x_2, y_2)^T = p_2 = (a(c_1 + c_{12}), a(s_1 + s_{12}))^T,$$

тогда

$$\dot{x}_2 = -as_1\dot{q}_1 - as_{12}(\dot{q}_1 + \dot{q}_2),$$

$$\dot{y}_2 = -ac_1\dot{q}_1 - ac_{12}(\dot{q}_1 + \dot{q}_2),$$

т.е.

$$v = \begin{pmatrix} \dot{x}_2 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a(s_1 + s_{12}) & -as_{12} \\ a(c_1 + c_{12}) & ac_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{pmatrix},$$

что соответствует соотношению для матрицы J_v .

3.3.2. Обратная задача о скорости

Перейдем теперь к решению обратной задачи о скорости. Пусть, как и прежде, вектор $\dot{s} = (\omega^T, v^T)^T$ задает линейную и угловую скорости схвата. Требуется найти скорости в подвижных сочленениях \dot{q} , с которыми движется схват со скоростью \dot{s} . В этом случае соотношение

$$J(q)\dot{q} = \dot{s} \quad (3.152)$$

следует рассматривать как линейную систему шести уравнений с N неизвестными $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_N$.

Известно, что система линейных уравнений

$$Ax = b, \quad (3.153)$$

где A — известная матрица $m \times n$; x — неизвестный вектор $n \times 1$, b — заданный вектор $m \times 1$, имеет решение тогда и только тогда, когда

$$r = \text{rank}(A) = \text{rank}(A, b), \quad (3.154)$$

где (A, b) — расширенная матрица $m \times (n+1)$, получаемая из матрицы A путем добавления вектора b в качестве $(n+1)$ -го столбца. Если $r = m = n$, то существует единственное решение. Если соотношение (3.154) выполняется и $r < m$, то $m-r$ уравнений можно выразить в виде линейной комбинации r независимых уравнений и им удовлетворяют решения r уравнений.

В терминах решаемой задачи это означает следующее.

1. Если число степеней подвижности манипулятора $N = 6$, т.е. матрица Якоби является квадратной, то необходимо рассмотреть два случая.

Пусть при некотором q выполнено условие $\det J(q) \neq 0$, т.е. матрица Якоби невырожденная, тогда обратная скоростная задача имеет в качестве решения единственный вектор

$$\dot{q} = J^{-1}(q)\dot{s}. \quad (3.155)$$

Если при некотором q выполнено условие $\det J(q) = 0$, (т.е. $r = \text{rank}(J) < 6$), то обратная скоростная задача либо имеет бесконечно много решений, если выполняется условие

$$\text{rank}(J) = \text{rank}(J, \dot{s}), \quad (3.156)$$

либо не имеет ни одного, если условие (3.156) не выполняется. Такие конфигурации манипулятора q^* , при которых $\det J(q^*) = 0$, называют вырожденными. Таким образом, вырожденная конфигурация характеризуется тем, что для нее либо существует бесконечно много способов реализовать движение схвата с заданной скоростью, либо не существует ни одного способа.

2. Если число степеней подвижности $N > 6$, то решений обратной скоростной задачи либо бесконечно много, либо не существует вовсе. Манипуляторы с числом степеней подвижности $N > 6$ называют избыточными. Их применяют обычно при выполнении различных операций в загроможденном пространстве, когда требуется избежать столкновений с препятствиями в рабочей зоне. В данном случае используется способность манипулятора при одном и том же положении схвата принимать различные конфигурации. Заметим, что управление такими манипуляторами существенно сложнее, чем манипуляторами с числом степеней подвижности $N \leq 6$.

3. Если $N < 6$, то возможна любая из перечисленных выше ситуаций: отсутствие решения, единственное решение и бесконечное множество решений. Обычно манипуляторы с числом степеней подвижности $N < 6$ применяют для выполнения простых транспортных операций (загрузка — разгрузка станков, обслуживание конвейеров), т.е. когда не требуется обеспечивать перемещение схвата в любую точку рабочего пространства с любой ориентацией.

Пример 3.2. Пусть имеется двухзвенный плоский манипулятор (см. рис. 3.8). Рассмотрим только линейные скорости схвата. Из соотношения (3.151) имеем

$$\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = J \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{pmatrix},$$

где

$$J = J(q_1, q_2) = \begin{pmatrix} -a(s_1 + s_{12}) & -as_{12} \\ a(c_1 + c_{12}) & ac_{12} \end{pmatrix}.$$

Поскольку матрица Якоби квадратная (2×2), то

$$\det J = s_2$$

и, следовательно,

$$\det J(q_1, \pi n) = 0,$$

что соответствует либо полностью вытянутой (рис. 3.9, а), либо сложенной (рис. 3.9, б) «руке». Нетрудно видеть, что в вырожденных положениях имеют место следующие равенства:

для вытянутой «руки» ($q_2 = 2\pi k$)

$$J = \begin{pmatrix} -2as_1 & -as_1 \\ 2ac_1 & ac_1 \end{pmatrix};$$

для сложенной «руки» ($q_2 = 2\pi(k+1)$)

$$J = \begin{pmatrix} 0 & as_1 \\ 0 & -ac_1 \end{pmatrix}.$$

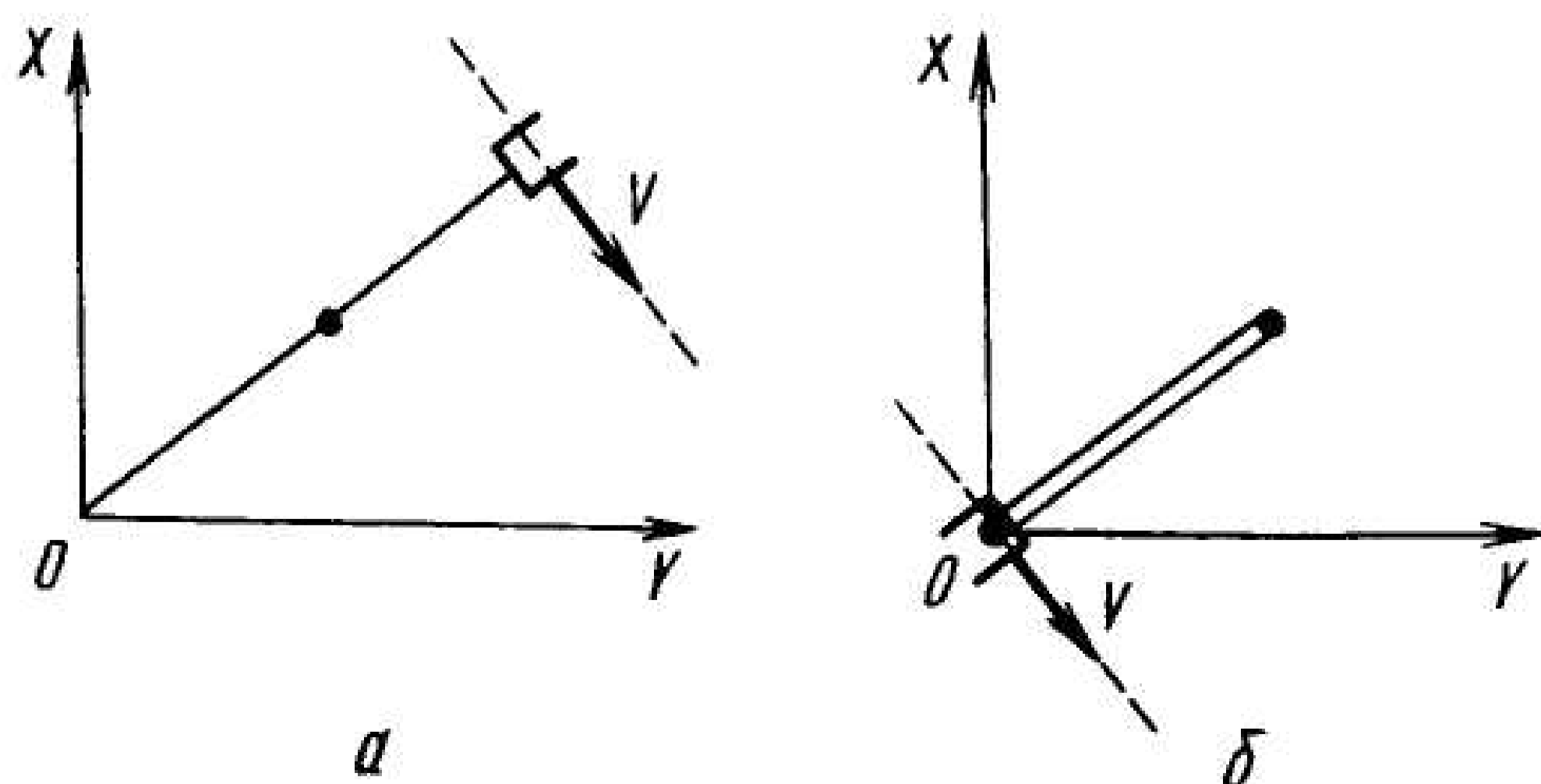


Рис. 3.9. Вырожденные конфигурации для плоского манипулятора

В обоих случаях развиваемая скорость схвата v не является произвольной, но удовлетворяет соотношению

$$v^T \begin{pmatrix} c_1 \\ -s_1 \end{pmatrix} = 0,$$

т.е. перпендикулярна «руке», либо вообще равна нулю при $2\dot{q}_1 + \dot{q}_2 = 0$.

Таким образом, при $q_2 \neq \pi n$ обратная задача о скорости имеет единственное решение. При $q_2 = \pi n$

1) не имеет решения, если командный вектор скорости $v = (v_x, v_y)$ не удовлетворяет соотношению

$$v_x c_1 - v_y s_1 = 0;$$

2) имеет бесконечно много решений, если вектор скорости удовлетворяет указанному соотношению, и их можно представить в виде

$$\begin{aligned} \dot{q}_1 &= t, \\ \dot{q}_2 &= -2t - |v|/a, \end{aligned}$$

где t — любое действительное число.

Безусловно, что в случае практической реализации необходимо учитывать ограничения

$$|\dot{q}_1| \leq \dot{q}_{1\max}, \quad |\dot{q}_2| \leq \dot{q}_{2\max}.$$

Процедура поиска решения уравнения (3.152) часто является одной из компонент алгоритма управления манипуляторами, и, более того, вычислительная сложность процедуры обращения матрицы Якоби определяет эффективность алгоритма управления в целом. Очевидно, что наиболее эффективный результат можно достигнуть, если удастся получить аналитическое решение системы (3.152) в виде

$$\dot{q}_i = a_i^T(q)\omega + b_i^T(q)v, \quad i=1, 2, \dots, N.$$

Несмотря на то, что для шестизвенных манипуляторов возможно обращение функциональной матрицы $J(q)$ размеров 6×6 , однако вычислительная сложность этой процедуры чрезвычайно высока: по крайней мере, в настоящее время не существует представления матрицы $J^{-1}(q)$ в замкнутой форме для манипулятора с произвольной кинематической схемой. К счастью, существует довольно широкий класс манипуляторов, для которых возможно получить аналитическое представление обратной матрицы Якоби.

3.3.3. Манипуляторы с тремя пересекающимися осями сочленений

Пусть оси вращения z_k, z_l, z_m трех шарниров манипулятора с N степенями подвижности пересекаются в одной точке O (рис. 3.10). В соответствии с (3.112) уравнения, связывающие скорости, имеют вид

$$z_0 \dot{q}_1 + \dots + z_k \dot{q}_{k+1} + \dots + z_l \dot{q}_{l+1} + \dots + z_m \dot{q}_{m+1} + \dots + z_{N-1} \dot{q}_N = \omega, \quad (3.157)$$

$$(z_0 \times p_{0,N}) \dot{q}_1 + \dots + (z_k \times p_{k,N}) \dot{q}_{k+1} + \dots + (z_l \times p_{l,N}) \dot{q}_{l+1} + \dots + (z_m \times p_{m,N}) \dot{q}_{l+1} + \dots + (z_{N-1} \times p_{N-1,N}) \dot{q}_N = v. \quad (3.158)$$

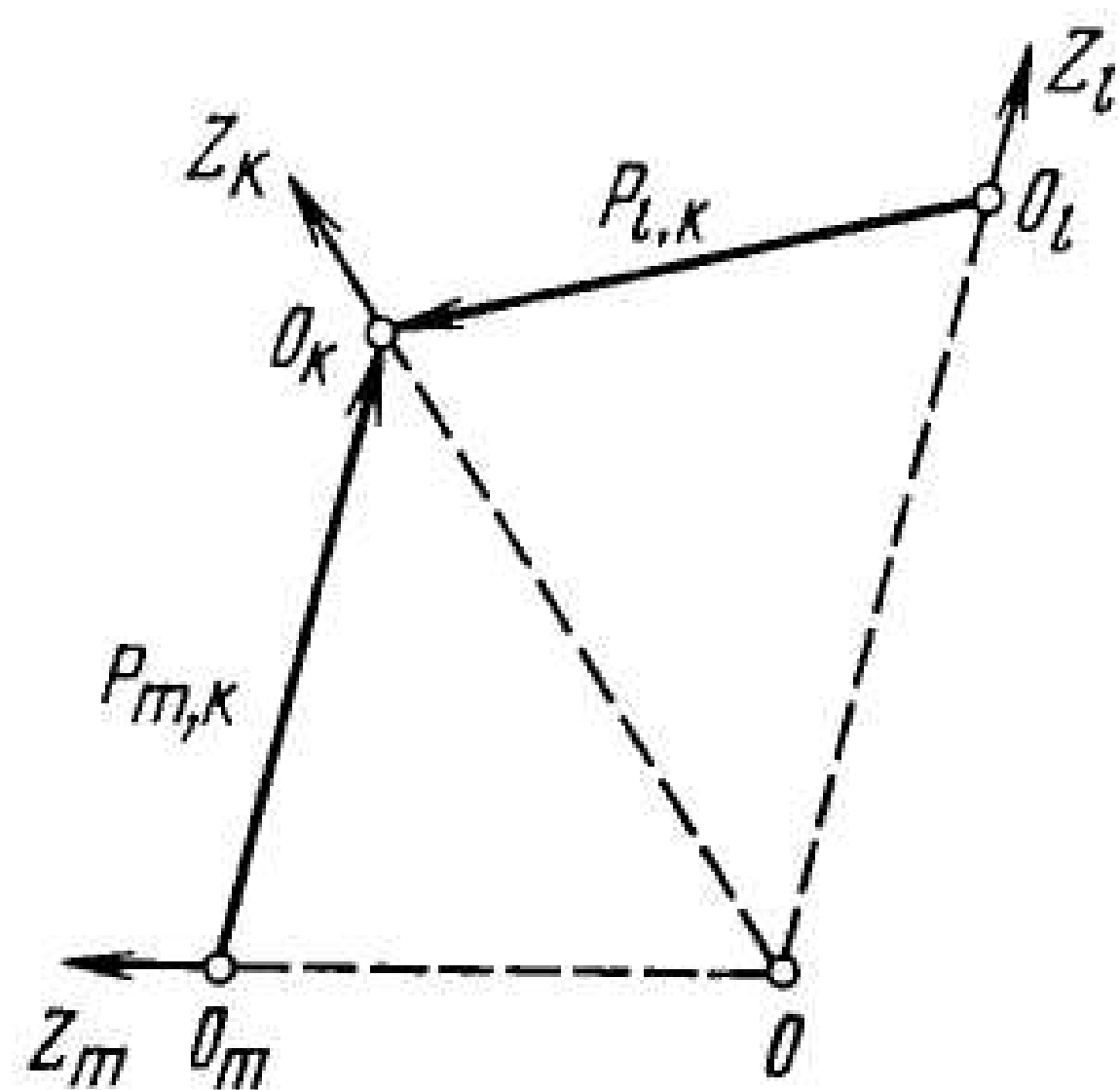


Рис. 3.10. Пересечение осей вращения трех шарниров

Умножая уравнение (3.157) векторно на $p_{k,N}$ и вычитая из (3.158), получаем

$$(z_0 \times p_{0,k}) \dot{q}_1 + \dots + (z_k \times p_{k,k}) \dot{q}_{k+1} + \dots + (z_l \times p_{l,k}) \dot{q}_{l+1} + \dots + (z_m \times p_{m,k}) \dot{q}_{l+1} + \dots + (z_{N-1} \times p_{N-1,k}) \dot{q}_N = v - \omega \times p_{k,N} = v_k. \quad (3.159)$$

Заметим, что если начало координат $O_k X_k Y_k Z_k$ лежит в точке O пересечения осей, то $p_{l,k} = \lambda_l z_l, p_{m,k} = \lambda_m z_m$ и, следовательно,

$$z_l \times p_{l,k} = z_m \times p_{m,k} = 0.$$

Тогда уравнение (3.159) содержит в качестве неизвестных $N-3$ скорости (линейных или угловых) в сочленениях. Что касается требования совпадения начала координат O_k и O (см. рис. 3.10), то оно не является очень сильным, поскольку при построении систем координат

по Денавиту — Хартенбергу (см. § 1.4) начало координат сочленений можно выбирать в любой точке оси вращения.

Таким образом, можно утверждать следующее: если оси вращений трех сочленений N -звенного манипулятора пересекаются в одной точке, то уравнение для скоростей можно декомпозировать:

$$\begin{pmatrix} J_{11} & 0 \\ J_{21} & J_{22} \end{pmatrix} \dot{\tilde{q}} = v, \quad (3.160)$$

где J_{21}, J_{22} — матрицы $3 \times (N-3)$; J_{11} — матрица 3×3 ; \tilde{q} отличается от q лишь нумерацией обобщенных координат.

Отметим, что аналогичный результат можно получить для произвольного числа пересекающихся осей.

Рассмотрим случай $N=6$. Тогда в уравнении (3.160) все матрицы имеют размеры 3×3 и их можно представить в виде

$$J_{11} \dot{q}^1 = \tilde{v}_1, \quad (3.161)$$

$$J_{22} \dot{q}^2 = \tilde{v}_2 - J_{21} \dot{q}^1, \quad (3.162)$$

где $\dot{\tilde{q}} = \begin{pmatrix} \dot{q}^1 \\ \dot{q}^2 \end{pmatrix}$ — искомые скорости в сочленениях.

Следовательно, решение обратной задачи о скорости состоит сначала в нахождении вектора \dot{q}^1 из (3.161), т.е. в обращении матрицы J_{11} размера 3×3 , и далее — в нахождении \dot{q}^2 из (3.162). Итак, оба уравнения (3.161), (3.162) имеют вид

$$ax + by + cz = d, \quad (3.163)$$

где a, b, c, d — известные векторы; x, y, z — компоненты искомого вектора \dot{q}^1 или \dot{q}^2 . Решение уравнения (3.163) имеет вид

$$x = \frac{[d \ b \ c]}{[a \ b \ c]}, \quad y = \frac{[a \ d \ c]}{[a \ b \ c]}, \quad z = \frac{[a \ b \ d]}{[a \ b \ c]}, \quad (3.164)$$

где через $[u \ v \ w]$ обозначено смешанное произведение:

$$[u \ v \ w] = u(v \times w). \quad (3.165)$$

Напомним основные свойства смешанного произведения, которые могут быть полезны для решения различных прикладных задач:

$$[u \ v \ w] = [v \ w \ u] = [w \ u \ v] = -[v \ u \ w], \quad (3.166)$$

$$[u \ v \ w] = \det(u \ v \ w). \quad (3.167)$$

В заключение заметим, что аналитическое обращение матрицы Якоби возможно также в том случае, если механизм содержит три по-ступательных шарнира.

Продemonстрируем этот подход для решения обратной задачи о скорости для манипулятора PUMA.

Пример 3.3. Решим обратную скоростную задачу для манипулятора PUMA (см. рис. 1.22). Поскольку все сочленения вращательные, то в соответствии с выражением (3.112) имеем следующие уравнения для скоростей:

$$z_0 \dot{q}_1 + z_1 \dot{q}_2 + z_2 \dot{q}_3 + z_3 \dot{q}_4 + z_4 \dot{q}_5 + z_5 \dot{q}_6 = \omega, \quad (3.168)$$

$$(z_0 \times p_{0,6}) \dot{q}_1 + (z_1 \times p_{1,6}) \dot{q}_2 + (z_2 \times p_{2,6}) \dot{q}_3 + (z_3 \times p_{3,6}) \dot{q}_4 + (z_4 \times p_{4,6}) \dot{q}_5 + (z_5 \times p_{5,6}) \dot{q}_6 = v. \quad (3.169)$$

Заметим, что кинематическая схема манипулятора такова, что оси z_3 , z_4 , z_5 трех шарниров пересекаются в одной точке (O_4 , O_5) (см. рис. 1.22), следовательно, можно воспользоваться подходом, описанным выше. Умножая уравнение (3.168) векторно на $p_{4,6}$ и вычитая его из (3.169), в силу коллинеарности $p_{3,4}$ и z_3 , $p_{4,5} = 0$, получаем

$$(z_0 \times p_{0,4}) \dot{q}_1 + (z_1 \times p_{1,4}) \dot{q}_2 + (z_2 \times p_{2,4}) \dot{q}_3 = v - \omega \times p_{0,4} = v_4. \quad (3.170)$$

В соответствии с (3.163), (3.164) имеем

$$\dot{q}_1 = \frac{[v_4 (z_1 \times p_{1,4}) (z_2 \times p_{2,4})]}{D_{123}}, \quad (3.171)$$

$$\dot{q}_2 = \frac{[(z_0 \times p_{0,4}) v_4 (z_2 \times p_{2,4})]}{D_{123}}, \quad (3.172)$$

$$\dot{q}_3 = \frac{[(z_0 \times p_{0,4}) (z_1 \times p_{1,4}) v_4]}{D_{123}}, \quad (3.173)$$

где $D_{123} = [(z_0 \times p_{0,4}) (z_1 \times p_{1,4}) (z_2 \times p_{2,4})]$ — детерминант системы уравнений (3.170).

Упростим теперь соотношения (3.171)–(3.173), используя полученное в § 2.1 решение прямой задачи кинематики в рекуррентной форме (см. пример 2.2).

Вычислим сначала D . В соответствии с (3.164)

$$D_{123} = (z_0 \times p_{0,4}) [(z_1 \times p_{1,4}) \times (z_2 \times p_{2,4})]. \quad (3.174)$$

Учитывая, что

$$p_{0,4} = d_2 z_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + d_4 z_3,$$

получаем

$$z_0 \times p_{0,4} = d_2 (z_0 \times z_1) + a_2 (z_0 \times x_2) + a_3 (z_0 \times x_3) + d_4 (z_0 \times z_3).$$

Для векторных произведений ортов связанных систем координат имеем

$$z_0 \times z_1 = -x_1, \quad z_0 \times x_2 = c_2 z_1, \quad z_0 \times x_3 = -s_2 z_1, \quad z_0 \times z_3 = c_{23} z_1.$$

Тогда

$$z_0 \times p_{0,4} = -d_2 x_1 + (a_2 c_2 + a_3 c_{23} + d_4 s_{23}) z_1. \quad (3.175)$$

Далее вычислим $z_1 \times p_{1,4}$. Поскольку $p_{1,4} = p_{0,4}$,

$$z_1 \times p_{1,4} = a_2 (z_1 \times x_2) + a_3 (z_1 \times x_3) + d_4 (z_1 \times z_3), \quad (3.176)$$

где соответствующие векторные произведения:

$$z_1 \times x_2 = z_2 \times x_2 = y_2, \quad z_1 \times x_3 = y_3 \times x_3 = -z_3, \quad z_1 \times z_3 = y_3 \times z_3 = x_3.$$

Следовательно,

$$z_1 \times p_{1,4} = a_2 y_2 + d_4 x_3 - a_3 z_3. \quad (3.177)$$

Найдем теперь $z_2 \times p_{2,4}$. Воспользуемся следующими очевидными соотношениями:

$$z_2 \times p_{2,4} = z_1 \times (p_{1,4} - p_{1,2}) = z_1 \times p_{1,4} - z_1 \times a_2 x_2 = z_1 \times p_{1,4} - a_2 y_2,$$

т.е.

$$z_2 \times p_{2,4} = d_4 x_3 - a_3 z_3. \quad (3.178)$$

Вычислим $(z_1 \times p_{1,4}) \times (z_2 \times p_{2,4})$:

$$(z_1 \times p_{1,4}) \times (z_2 \times p_{2,4}) = (a_2 y_2 + (d_4 x_3 - a_3 z_3)) \times (d_4 x_3 - a_3 z_3) = a_2 y_2 \times (d_4 x_3 - a_3 z_3).$$

Поскольку

$$y_2 \times x_3 = -c_3 z_2,$$

$$y_2 \times z_3 = -s_3 z_2,$$

то

$$(z_1 \times p_{1,4}) \times (z_2 \times p_{2,4}) = a_2 (a_3 s_3 - d_4 c_3) z_2. \quad (3.179)$$

Осталось умножить скалярно (3.176) на (3.179). Так как

$$x_1 z_2 = 0,$$

$$z_1 z_2 = 1,$$

окончательно получаем выражение для детерминанта:

$$D_{123} = a_2(a_3s_3 - d_4c_3)(a_2c_2 + a_3c_{23} + d_4s_{23}). \quad (3.180)$$

Заметим, что для входящих в детерминант сомножителей имеют место следующие соотношения:

$$\begin{aligned} a_3s_3 - d_4c_3 &= p_{3,4_{r_2}}, \\ a_2c_2 + a_3c_{23} + d_4s_{23} &= p_{1,4_{x_1}}, \end{aligned}$$

где $p_{3,4_{r_2}}$ — проекция вектора, соединяющего начало координат O_3 с O_4 , на ось Y_2 системы координат $O_2X_2Y_2Z_2$; $p_{1,4_{x_1}}$ — проекция вектора, соединяющего начало координат O_1 (или O_0) с O_4 , на ось X_1 системы координат $O_1X_1Y_1Z_1$.

В этом легко убедиться, если вычислить матрицы A_3A_4 и $A_2A_3A_4$ и рассмотреть их последние столбцы. С учетом сказанного имеем

$$D_{123} = a_2y_{34}x_{14}, \quad (3.181)$$

где обозначено

$$y_{34} = p_{3,4_{r_2}}, \quad (3.182)$$

$$x_{14} = p_{1,4_{x_1}}. \quad (3.183)$$

Вычислим скорость в первом сочленении \dot{q}_1 . В соответствии с (3.171) числитель выражения (3.181) имеет вид

$$[v_4(z_1 \times p_{1,4})(z_2 \times p_{2,4})] = v_4[(z_1 \times p_{1,4}) \times (z_2 \times p_{2,4})].$$

Подставляя сюда (3.179), получаем при $y_{34} \neq 0$

$$\dot{q}_1 = \frac{v_4 z_2}{x_{14}}. \quad (3.184)$$

Если

$$y_{34}c_3 = 0, \quad (3.185)$$

то \dot{q}_1 может принимать любое значение. Уравнение (3.185) задает множество вырожденных конфигураций манипулятора. Геометрически соотношения (3.185) означают (с учетом того, что $a_3 < 0$), что направление вектора, соединяющего O_2 и O_4 (или O_5) совпадает с направлением второго звена (см. рис. 1.22). Еще одно множество вырожденных конфигураций манипулятора задается соотношением

$$x_{14} = 0. \quad (3.186)$$

Это такие конфигурации, при которых точка O_4 (или O_5) лежит в вертикальной плоскости, проходящей через оси Y_1, Z_1 (или Z_0, Z_4).

Найдем теперь \dot{q}_2 . В соответствии с выражениями (3.175), (3.176) имеем

$$[(z_0 \times p_{0,4})v_4(z_2 \times p_{2,4})] = -v_4(z_0 \times p_{0,4}) \times (z_2 \times p_{2,4}),$$

где $(z_0 \times p_{0,4})$ и $(z_2 \times p_{2,4})$ задаются равенствами (3.171), (3.178) соответственно.

Учитывая, что

$$x_1 \times x_3 = s_{23}z_1, \quad x_1 \times z_3 = -c_{23}z_1, \quad z_1 \times x_3 = -z_3, \quad z_1 \times z_3 = x_3,$$

получаем

$$(z_0 \times p_{0,4}) \times (z_2 \times p_{2,4}) = -d_2(d_4s_{23} + a_3c_{23})z_1 - x_{14}a_3x_3 - x_{14}d_4z_3.$$

Тогда для \dot{q}_2 можно записать соотношение

$$\dot{q}_2 = \frac{v_4((a_3c_{23} + d_4s_{23})z_1 + x_{14}a_3x_3 + x_{14}d_4z_3)}{a_2y_{24}x_{14}}. \quad (3.187)$$

Найдем q_3 . В соответствии с (3.175), (3.176), используя равенство (3.164), получаем

$$[(z_0 \times p_{0,4})(z_1 \times p_{1,4})v_4] = v_4[(z_0 \times p_{0,4}) \times (z_1 \times p_{1,4})].$$

Учитывая соотношения (3.175), (3.177), а также равенства

$$\begin{aligned} x_1 \times y_2 &= c_2z_1, \quad x_1 \times x_3 = s_{23}z_1, \quad x_1 \times z_3 = -c_{23}z_1, \\ z_1 \times y_2 &= -x_2, \quad z_1 \times x_3 = -z_3, \quad z_1 \times z_3 = x_3, \end{aligned}$$

имеем

$$[(z_0 \times p_{0,4}) \times (z_1 \times p_{1,4})] = -x_{14}(d_2z_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + d_4z_3).$$

Так как в последнем равенстве слева стоит $p_{0,4}$, то получаем при $x_{14} \neq 0$

$$\dot{q}_3 = -\frac{v_4 p_{0,4}}{a_2 y_{34}}. \quad (3.188)$$

Если $x_{14} = 0$, то \dot{q}_3 является любым действительным числом.

Перейдем теперь к нахождению угловых скоростей в четвертом, пятом и шестом сочленениях. В силу (3.148) имеем

$$z_3\dot{q}_4 + z_4\dot{q}_5 + z_5\dot{q}_6 = \Omega, \quad (3.189)$$

где

$$\Omega = \omega - z_0\dot{q}_1 - z_1\dot{q}_2 - z_2\dot{q}_3 \quad (3.190)$$

известный (после нахождения $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3$) вектор. Систему уравнений (3.189) решим аналогично (3.170). Имеем

$$\dot{q}_4 = \frac{[\Omega \ z_4 \ z_5]}{D_{456}}, \quad (3.191)$$

$$\dot{q}_5 = \frac{[z_3 \ \Omega \ z_5]}{D_{456}}, \quad (3.192)$$

$$\dot{q}_6 = \frac{[z_3 \ z_4 \ \Omega]}{D_{456}}, \quad (3.193)$$

где

$$D_{456} = [z_3 \ z_4 \ z_5]. \quad (3.194)$$

Вычислим детерминант D_{456} :

$$D_{456} = z_3(z_4 \times z_5) = -s_5. \quad (3.195)$$

Тогда можно получить следующие соотношения:

$$[\Omega \ z_4 \ z_5] = \Omega x_5, \quad [z_3 \ \Omega \ z_5] = -\Omega s_5 z_4, \quad [z_3 \ z_4 \ \Omega] = -\Omega x_4.$$

Таким образом, выражения для скоростей в сочленениях имеют вид

$$\dot{q}_4 = -\frac{\Omega x_5}{s_5}, \quad (3.196)$$

$$\dot{q}_5 = \Omega z_4 \text{ при } s_5 = 0, \quad (3.197)$$

$$\dot{q}_6 = \frac{\Omega x_4}{s_5}. \quad (3.198)$$

Из выражений (3.195) ясно, что множество вырожденных конфигураций задается уравнением

$$s_5 = 0. \quad (3.199)$$

Геометрической интерпретацией решений уравнения (3.199) являются все конфигурации манипулятора, при которых «кисть» и «предплечье» (т.е. четвертое и пятое звенья) вытянуты в одну линию (см. рис. 1.22).

Итак, решение обратной скоростной задачи для манипулятора PUMA задается соотношениями (3.184), (3.187), (3.188), (3.191)–(3.193). При этом вырожденные конфигурации манипулятора определяются соотношениями (3.185), (3.186), (3.199).

3.3.4. Обратная задача о скорости как задача минимизации

В предыдущем параграфе было получено точное аналитическое решение обратной задачи о скорости для некоторого класса кинематических схем манипуляторов. Однако довольно часто возникают ситуации, когда не существует точного решения уравнения

$$J(q)\dot{q} = \dot{s} \quad (3.200)$$

либо решение не является единственным. Тогда естественно найти приближенное решение уравнения (3.200), сформулировав разумный критерий оценки степени приближения решения. Одним из наиболее распространенных способов оценки является метод наименьших квадратов.

Пусть линейная система m уравнений с n неизвестными имеет вид

$$Ax = \dot{b}, \quad (3.201)$$

где A — матрица $m \times n$; x — неизвестный вектор $n \times 1$; \dot{b} — известный вектор $m \times 1$.

Найдем такой вектор a , который удовлетворяет условию

$$\|Aa - \dot{b}\|^2 = \min_x \|Ax - \dot{b}\|^2, \quad (3.202)$$

где под нормой вектора $c = (c_1, c_2, \dots, c_n)^T$ понимают его длину, т.е. $\|c\|^2 = \sum c_i^2$ (хотя можно использовать и другие способы нормирования линейного пространства).

Тогда поставленная задача сводится к поиску минимума функции

$$f(x) = \|Ax - \dot{b}\|^2. \quad (3.203)$$

Представляя $f(x)$ в виде $f(x) = (Ax - \dot{b})^T (Ax - \dot{b})$ и используя необходимое условие экстремума, получаем следующее уравнение для нахождения вектора a , удовлетворяющего условию (3.202):

$$A^T A a = A^T \dot{b}. \quad (3.204)$$

Если квадратная симметрическая матрица $A^T A$ размеров $n \times n$ невырожденная, т.е.

$$\det(A^T A) \neq 0, \quad (3.205)$$

то искомый вектор

$$a = A^+ \dot{b}, \quad (3.206)$$

где

$$A^+ = (A^T A)^{-1} A^T, \quad (3.207)$$

называют *псевдообратной матрицей* по отношению к A . Нетрудно проверить, что если матрица A такова, что существует A^+ , то $A^+ = A^+$.

Необходимое и достаточное условие выполнения неравенства (3.205) состоит в том, чтобы матрица A имела максимально возможный ранг, т.е.

$$\text{rank}(A) = \min(m, n). \quad (3.208)$$

Если же условие (3.205) или (3.208) (что одно и то же) не выполняется, то уравнение (3.204) имеет бесчисленное множество решений, из которых следует выбрать то, которое нас устраивает в том или ином смысле. Один из подходов решения уравнения (3.204) состоит в следующем.

Пусть матрица A имеет ранг $r = \text{rank}(A) < \min(m, n)$, т.е. $\det(A^T A) = 0$. Тогда матрицу A можно представить в виде

$$A = LR, \quad (3.209)$$

где L — матрица $m \times r$; R — матрица $r \times n$.

В этом случае

$$\text{rank}(L) = \text{rank}(R) = r,$$

т.е. ранги матриц L и R максимально возможные. Представление матрицы в форме (3.209) называют скелетным разложением матрицы A . Нетрудно видеть, что скелетное разложение матрицы A не является единственным.

Потребуем теперь, чтобы существовали такие матрицы U и V , для которых строки и столбцы псевдообратной матрицы A^+ являются линейными комбинациями строк и столбцов матрицы A^T , т.е. выполняются соотношения

$$A^+ = UA^T = A^T V.$$

Тогда можно показать, что

$$A^+ = R^+ L^+,$$

где

$$L^+ = (L^T L)^{-1} L^T,$$

$$R^+ = R^T (R R^T)^{-1},$$

или окончательно

$$A^+ = R^T (R R^T)^{-1} (L^T L)^{-1} L^T. \quad (3.210)$$

Здесь L и R — матрицы скелетного разложения (3.209).

Аналогичное решение уравнения (3.204) в форме (3.210) можно получить, если среди всех векторов a , удовлетворяющих (3.202), можно найти тот, у которого норма минимальна.

Заметим, что если $\text{rank}(A) = 1$, то L и R являются матрицами размеров $m \times 1$ и $1 \times n$ соответственно. Тогда

$$(R R^T)^{-1} (L^T L)^{-1} = \alpha,$$

где α — скаляр, и, следовательно,

$$A^+ = \alpha R^T L^T = \alpha A^T,$$

т.е. псевдообратная матрица в этом случае совпадает с точностью до коэффициента пропорциональности с транспонированной матрицей. Этот факт иногда используют при управлении манипулятором, заменяя обратную матрицу Якоби на транспонированную во всех точках пространства обобщенных координат.

Еще одна алгебраическая интерпретация псевдообратной матрицы состоит в следующем: псевдообратная матрица A^+ является наилучшим (согласно методу наименьших квадратов) приближенным решением матричного уравнения

$$AX = E,$$

при этом норма матрицы $A = (a_{ij})$ может быть определена так:

$$\|A\|^2 = \sum_{i,j} a_{ij}^2.$$

Приведем без доказательства некоторые полезные в приложениях свойства псевдообратной матрицы (многие из них можно установить непосредственным использованием основного соотношения (3.210)):

- | | |
|------------------------|------------------------|
| 1) $AA^+A = A$; | 4) $(A^+A)^T = A^+A$; |
| 2) $(A^+)^+ = A$; | 5) $(AA^+)^2 = AA^+$; |
| 3) $(AA^+)^T = AA^+$; | 6) $(A^+A)^2 = A^+A$. |

Заметим, что если ранг матрицы A максимален, т.е. выполняется условие (3.204), обе формы представления псевдообратной матрицы A^+ , заданные соотношениями (3.206) и (3.209), совпадают, что легко можно проверить, если в скелетном разложении (3.208) принять $L = A$, $R = E$ либо $L = E$, $R = A$.

Одна из особенностей поиска псевдообратной матрицы $J^+(q)$ состоит в том, что ее ранг может быть разным в различных точках про-

пространства обобщенных координат, поскольку матрица $J(\mathbf{q})$ функциональная.

Все выведенные соотношения для псевдообратных матриц сохраняются и для случая, когда обрабатываемой матрицей A является матрица Якоби $J(\mathbf{q})$. Заметим, что если $J(\mathbf{q})$ — квадратная матрица и при некотором $\mathbf{q} = \mathbf{q}^*$ $\det J(\mathbf{q}^*) = 0$, то псевдообращение в форме (3.206) не является приемлемым, поскольку в этом случае

$$\det(J^+(\mathbf{q})J(\mathbf{q})) = (\det(J(\mathbf{q})))^2$$

и, следовательно, в точке $\mathbf{q} = \mathbf{q}^*$ матрицы J^+ и J вырождаются одновременно. В этом случае следует использовать представление для J^+ в форме (3.210).

Пример 3.4. Для двухзвенного плоского манипулятора (см. рис. 3.8) матрица Якоби $J(\mathbf{q})$ имеет вид

$$J(\mathbf{q}) = \begin{pmatrix} -a(s_1 + s_{12}) & -as_{12} \\ a(c_1 + c_{12}) & ac_{12} \end{pmatrix}$$

$$\det J = s_2.$$

Тогда обратная матрица Якоби $J^{-1}(q_1, q_2)$ существует во всех точках (q_1, q_2) , кроме точки (q_1, π) . Построим сначала псевдообратную матрицу в точках $(q_1, 2\pi n)$. Ее скелетное разложение имеет вид

$$J(q_1, 2\pi n) = \begin{pmatrix} -2as_2 & -as_1 \\ 2ac_1 & ac_1 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} -s_1 \\ c_1 \end{pmatrix} (2 \ 1) = LR.$$

Выполняя все необходимые операции, получаем

$$J^+(q_1, 2\pi k) = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -2as_1 & 2ac_1 \\ -as_1 & ac_1 \end{pmatrix}.$$

Аналогично можно найти псевдообратную матрицу $J^+(q, 2\pi(k+1))$:

$$J^+(q_1, 2\pi(k+1)) = - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -as_1 & ac_1 \end{pmatrix}.$$

Нетрудно заметить, что в сингулярных точках имеет место равенство

$$J^+ = \alpha J^T, \quad (3.211)$$

где $\alpha = \alpha(\mathbf{q})$ — скалярная функция.

Пример 3.5. Пусть имеется трехзвенный манипулятор, кинематика которого совпадает с кинематикой трех первых звеньев манипулятора PUMA (см. рис. 1.22). Для решения обратной позиционной задачи относительно линейных скоростей, воспользуемся соотношением (3.31), связывающим положение начала системы координат $O_4 X_4 Y_4 Z_4$ с обобщенными координатами q_1, q_2, q_3 . Полагая $a_3 = 0$, имеем

$$x = c_1(a_2c_2 + d_4s_{23}) - d_2s_1, \quad (3.212)$$

$$y = s_1(a_2c_2 + d_4s_{23}) + d_2c_1,$$

$$z = -a_2s_2 + d_4c_{23}.$$

Тогда, дифференцируя соотношение (3.212) по времени, получаем

$$\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = J(\mathbf{q}) \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{pmatrix},$$

где

$$J(\mathbf{q}) = \begin{pmatrix} -s_1(a_2c_2 + d_4s_{23}) - d_2c_1 & c_1(-a_2s_2 + d_4c_{23}) & c_1d_4c_{23} \\ c_1(a_2c_2 + d_4s_{23}) - d_2s_1 & s_1(-a_2s_2 + d_4c_{23}) & s_1d_4c_{23} \\ 0 & -a_2c_2 - d_4s_{23} & -d_4s_{23} \end{pmatrix}. \quad (3.213)$$

Вычислим определитель матрицы Якоби (3.213)

$$\det J(\mathbf{q}) = -a_2d_4c_3(a_2c_2 + d_4s_{23}).$$

Получим теперь псевдообратную матрицу $J^+(\mathbf{q})$ в точке $(q_1, q_2, \pi/2)$ при $q_2 \neq \pi/2 + \pi n$, что соответствует вытянутой «руке». В этой точке $c_3 = 0$, $c_2 \neq 0$, следовательно, $\det J(q_1, q_2, \pi/2) = 0$. Обозначая

$$J(q_1, q_2, \pi/2) = \tilde{J}$$

и полагая в выражении (3.213) $q_3 = \pi/2$, $a_2 + d_4 = l$, получаем

$$\tilde{J} = \begin{pmatrix} -ls_1c_2 - d_2c_1 & -lc_1s_2 & -d_4c_1s_2 \\ lc_1c_2 - d_2s_1 & -ls_1s_2 & -d_4s_1s_2 \\ 0 & -lc_2 & -d_4c_2 \end{pmatrix}. \quad (3.214)$$

Нетрудно заметить, что 2-й и 3-й столбцы матрицы \tilde{J} линейно зависимы и, следовательно, $\text{rank}(\tilde{J}) < 3$. Кроме того, определитель минора,

получаемого путем вычеркивания 2-й и 3-й строк и 1-го и 2-го столбцов при сделанных выше предположениях, отличен от нуля, и поэтому

$$\text{rank}(\tilde{J}) = 2.$$

Тогда скелетное разложение \tilde{J} имеет вид

$$\tilde{J} = LR,$$

где L — матрица 3×2 ; R — матрица 2×3 , и

$$\text{rank}(L) = \text{rank}(R) = 2. \quad (3.215)$$

Сформируем матрицу L из 1-го и 2-го столбцов \tilde{J} :

$$L = \begin{pmatrix} -ls_1c_2 - d_2c_1 & -lc_1s_2 \\ lc_1c_2 - d_2s_1 & -ls_1s_2 \\ 0 & -lc_2 \end{pmatrix}. \quad (3.216)$$

Тогда

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & d/l \end{pmatrix}. \quad (3.217)$$

Нетрудно видеть, что ранги матриц L и R удовлетворяют условию (3.215).

Прежде, чем приступить к нахождению псевдообратной матрицы $J^*(q)$, заметим, что матрицу L можно представить в виде

$$L = O_1 O_2 L', \quad (3.218)$$

где O_1 и O_2 — матрицы поворота, являющиеся компонентами матриц A_1 и A_2 (см. пример 3.2), задающих положение и ориентацию первого и второго звеньев соответственно:

$$O_1 = \begin{pmatrix} c_1 & 0 & -s_1 \\ s_1 & 0 & c_1 \\ 0 & -l & 0 \end{pmatrix}, \quad O_2 = \begin{pmatrix} c_2 & -s_2 & 0 \\ s_2 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & l \end{pmatrix}, \quad (3.219)$$

и

$$L' = \begin{pmatrix} -d_2c_2 & 0 \\ d_2s_2 & l \\ lc_2 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.220)$$

Это наблюдение существенно упрощает поиск псевдообратной матрицы. Действительно, если имеет место разложение

$$L = OL',$$

где O — ортогональная матрица, то в соответствии с выражением (3.210) получаем

$$\tilde{J}^+ = (LR)^+ = R^+ (RR^+)^{-1} (L'^+ L')^{-1} L'^+ O. \quad (3.221)$$

В этом случае трудоемкую в вычислительном плане операцию обращения матрицы $L' L$ можно заменить на операцию обращения матрицы более простой структуры $L'^+ L'$.

Выполняя все операции в выражении (3.221), где матрицы R и L' заданы соотношениями (3.231) и (3.220), матрица $O = O_1 O_2$ и O_1 и O_2 заданы выражениями (3.219), получаем окончательно

$$\tilde{J}^+(q) = \frac{1}{c_2 (r_2 r_4)^2} \begin{pmatrix} -r_4^2 (ls_1 + d_2 c_1 c_2) & r_4^2 (lc_1 - d_2 s_1 c_2) & r_4^2 d_2 s_2 \\ l^2 s_2 (d_2 s_1 - x_{14} c_1) & -ls_2^2 (d_2 c_1 + x_{14} s_1) & -l(d_2^2 + x_{14}^2) \\ ld_4 s_2 (d_2 s_1 - x_{14} c_1) & -d_4 ls_2 (d_2 c_1 + x_{14} s_1) & -d_4 (d_4^2 + x_{14}^2) \end{pmatrix}. \quad (3.222)$$

где

$$l = a_2 + d_4, \quad x_{14} = lc_2, \quad r_2^2 = d_2^2 + l^2, \quad r_4^2 = d_4^2 + l^2.$$

Заметим, что матрица $\tilde{J}^+(q)$ — вырожденная, поскольку ее 2-я и 3-я строки линейно зависимы.

3.4. Кинематические свойства манипулятора

3.4.1. Распределение допустимых скоростей в рабочем пространстве

При планировании движений манипулятора необходимо иметь информацию о том, какие линейные и угловые скорости объекта манипулирования могут быть развиты в процессе движения в каждой точке рабочего пространства. Эти скорости зависят от кинематической схемы механизма, а также от ограничений, обусловленных возможностями приводов степеней подвижности манипулятора.

Пусть скорости относительного перемещения в степенях подвижности, т.е. производные обобщенных координат, ограничены по модулю известными константами C_i :

$$|\dot{q}_i| \leq C_i, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (3.223)$$

Соотношения (3.223) задают область допустимых скоростей \dot{S}_q в пространстве обобщенных координат.

Соответствующие скорости перемещения объекта, удерживаемого в схвате манипулятора, определяют по формуле

$$v_N = J_v(q)\dot{q}, \quad (3.224)$$

где $J_v(q)$ — якобиева матрица преобразования, связывающего абсолютные координаты характерной точки объекта с обобщенными координатами манипулятора. Эта матрица может быть вычислена для каждого значения q , принадлежащего области \dot{S}_q , по формулам, приведенным выше.

Формула (3.224) определяет отображение области допустимых скоростей изменения обобщенных координат \dot{S}_q в трехмерную область Γ_v допустимых значений скоростей v_N , которую можно построить для каждой точки рабочего пространства.

Совокупность областей $\Gamma_v(q)$ определяет распределение допустимых скоростей объекта манипулирования в рабочем пространстве.

При анализе такого распределения на практике обычно бывает достаточно знать оценку сверху и снизу значений скорости v_N в рабочей зоне. Ее можно легко получить, используя соотношение (3.224). Определим для этого евклидову норму вектора v_N :

$$\|v_N\| = (v_N^T v_N)^{1/2} = (\dot{q}^T J_v^T(q) J_v(q) \dot{q})^{1/2}. \quad (3.225)$$

Это выражение представляет собой квадратичную форму по отношению к вектору \dot{q} . Обозначим $\lambda_*(q)$ — минимальное, а $\lambda^*(q)$ — максимальное из характеристических чисел симметрической матрицы $J_v^T(q) J_v(q)$. Тогда на основании известных свойств квадратичных форм* можно записать:

$$\lambda^*(q)\dot{q}^T \dot{q} \geq \dot{q}^T J_v^T(q) J_v(q) \dot{q} \geq \lambda_*(q)\dot{q}^T \dot{q},$$

или

$$\lambda^*(q)\|\dot{q}\|^2 \geq \|v_N\|^2 \geq \lambda_*(q)\|\dot{q}\|^2. \quad (3.226)$$

* Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М.: Наука, 1966. С. 286.

Если необходимо найти ограничение скоростей движения объекта манипулирования сверху, то можно записать окончательно следующую оценку:

$$\|v_N(q)\| \leq (\lambda^*(q))^{1/2} \|\dot{q}\| < (\lambda^*(q))^{1/2} C, \quad (3.227)$$

$$\text{где } C = \left(\sum_{i=1}^N C_i^2(q) \right)^{1/2}.$$

Геометрически это неравенство определяет сферу, радиус которой $(\lambda^*(q))^{1/2} C$ зависит от вектора обобщенных координат q , т.е. от конфигурации манипулятора.

Отметим, что матрица $J_v(q)$ в общем случае прямоугольная. Поэтому приведенные выше соображения справедливы только в том случае, когда ее ранг максимален. В частности, если матрица $J_v(q)$ квадратная, то полученная оценка (3.227) теряет смысл в особых точках q^* , для которых $\det J_v(q^*) = 0$. Поэтому такие точки должны быть заранее выделены в рабочем пространстве манипулятора. Кроме того, полученная оценка не имеет смысла на границах рабочей зоны, а лишь в ее внутренних точках, поскольку якобиева матрица $J_v(q)$ определена только строго внутри области S_q .

В остальных точках рабочего пространства могут быть построены сферы (3.227), совокупность которых характеризует распределение допустимых скоростей движения объекта манипулирования в рабочем пространстве.

Пример 3.6. Построить распределение допустимых скоростей для двухзвенного манипулятора (рис. 3.11), если длины звеньев одинаковы: $l_1 = l_2 = 1$, а ограничения на численные значения скоростей обобщенных координат составляют

$$|\dot{q}_1| \leq 0,1 \text{ рад/с}; \quad |\dot{q}_2| \leq 0,5 \text{ рад/с}.$$

Решение. Поскольку ограничения на численные значения обобщенных координат не заданы, то рабочее пространство представляет собой круг, границами которого являются окружность радиуса 2 и начало координат. Связь характерной точки (схвата) с обобщенными координатами определяется уравнениями

$$\begin{aligned} x &= c q_1 + c(q_1 - q_2), \\ y &= s q_1 + s(q_1 - q_2). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$J_v(q_1, q_2) = \begin{pmatrix} -sq_1 + s(q_1 - q_2) & -s(q_1 - q_2) \\ cq_1 + c(q_1 - q_2) & c(q_1 - q_2) \end{pmatrix},$$

$$J_v^T(q_1, q_2)J_v(q_1, q_2) = \begin{pmatrix} 2(1 + cq_2) & 1 + cq_2 \\ 1 + cq_2 & 1 \end{pmatrix}.$$

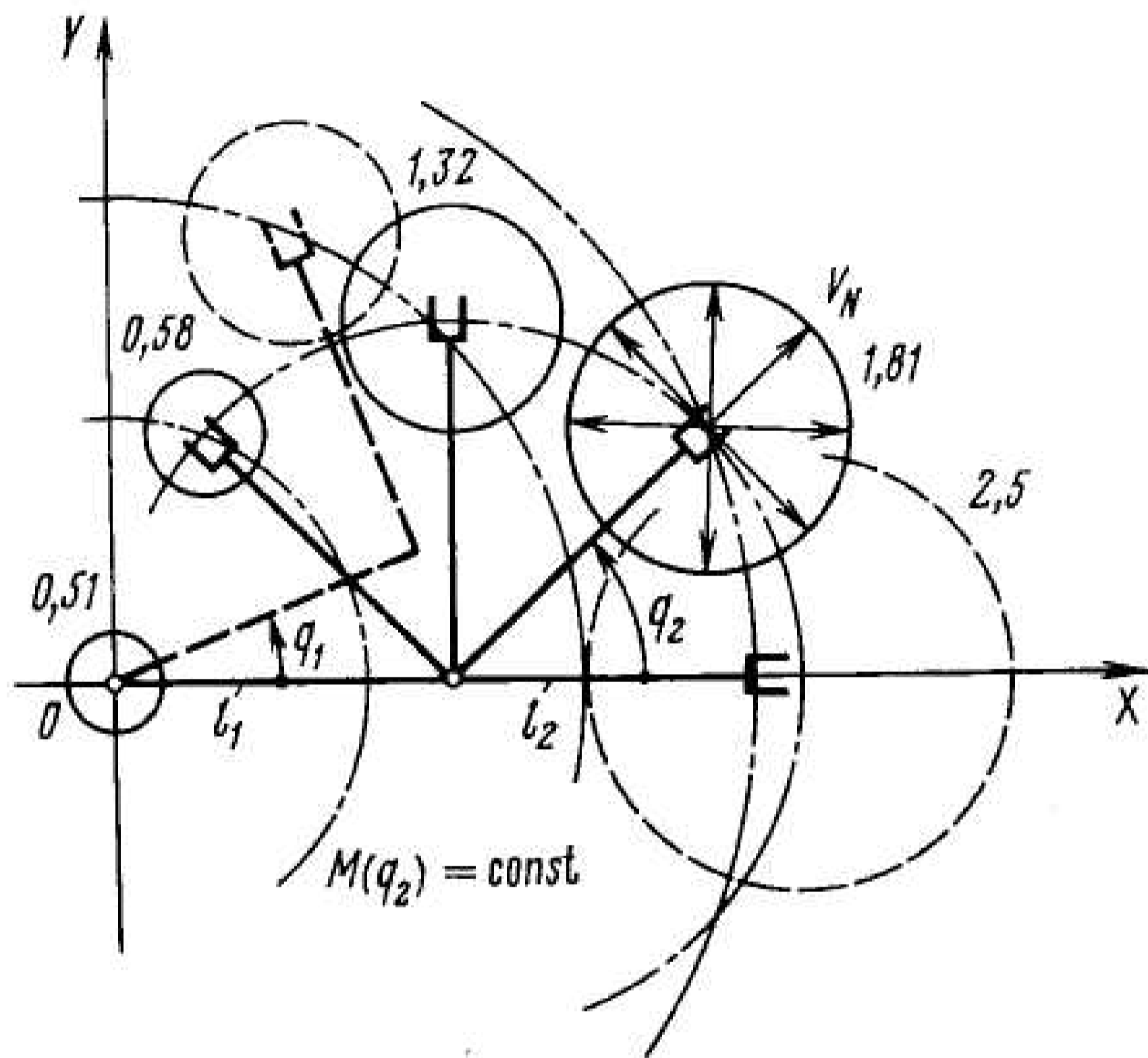


Рис. 3.11. Распределение допустимых скоростей для двухзвенного манипулятора

Характеристические числа последней матрицы, определяемые из уравнения

$$\det(J_v^T J_v - \lambda E) = 0,$$

равны

$$\lambda_{1,2} = (3 + 2cq_2 \pm (9 + 12cq_2 + 4c^2q_2^2)^{1/2})/2.$$

При изменении q_2 от 0 до π значение λ^* соответствует характеристическому числу со знаком плюс перед корнем.

На границе рабочей зоны, т.е. при $q_2 = 0$ и $q_2 = \pi$, как отмечалось, оценка (3.227) теряет смысл. В остальных точках рабочей зоны можно записать:

$$\|v_N\| \leq d(3 + 2cq_2 + (9 + 12cq_2 + 4c^2q_2^2)^{1/2})/2,$$

причем $d = 0,51$ рад/с.

Радиус этой окружности увеличивается при приближении к границе рабочей зоны. Поскольку λ^* не зависит от q_1 , то распределение скоростей v_N достаточно построить при фиксированном q_1 (см. рис. 3.11).

Полученная выше оценка скорости движения дает представление о распределении максимальных скоростей в рабочем пространстве, однако она недостаточна для планирования траекторий. В последнем случае необходимо более точно знать область, которой принадлежит вектор v_N в каждой точке рабочего пространства.

Вернемся в связи с этим к формуле (3.224). В том случае, когда матрица J_v квадратная*, т.е. размерности векторов v_N и \dot{q} совпадают, задача отображения области \dot{S}_q в Γ_v облегчается. Если известно суммарное ограничение скоростей обобщенных координат

$$\|\dot{q}\| \leq \left(\sum_{i=1}^N \dot{q}_i^2 \right)^{1/2} \leq C,$$

то можно записать неравенство

$$\|\dot{q}\|^2 = \dot{q}^T \dot{q} = v_N^T (J_v^{-1}(q))^T J_v^{-1}(q) v_N \leq C^2 \quad (3.228)$$

для любой точки q , в которой якобиева матрица $J_v(q)$ невырожденная.

Последнее неравенство определяет эллипсоид допустимых скоростей в рабочем пространстве. Оси этого эллипсоида совпадают с направлениями собственных векторов симметрической матрицы $(J_v^{-1})^T (J_v^{-1})$, а величины полуосей равны $C/\lambda_i^{1/2}$, $i = 1, 2, 3$, где λ_i — характеристические числа этой матрицы. Наибольшая и наименьшая оси при этом равны соответственно

$$\begin{aligned} v_{\max} &= C/\lambda_{\min}^{1/2}, \\ v_{\min} &= C/\lambda_{\max}^{1/2}. \end{aligned} \quad (3.229)$$

* Если матрица J_v не является квадратной, то все последующие рассуждения можно провести, заменяя обратную матрицу J_v^{-1} на матрицу J_v^* , полученную в результате псевдообращения (см. § 3.3)

В отличие от ранее рассмотренной оценки, в данном случае можно установить направления, в которых манипулятор развивает минимальную и максимальную скорости, а также найти оценки этих скоростей.

Еще более точное распределение скоростей дает непосредственный анализ формулы (3.224). Фиксируя значение $q = q^*$ и изменяя \dot{q} в области $|\dot{q}_i| \leq C_i, i = 1, \dots, N$, или полагая в более общем случае

$$\dot{q}_{i*} \leq \dot{q}_i \leq \dot{q}_i^*,$$

можно построить соответствующую область Γ_v в пространстве скоростей v_N . Поскольку (3.223) определяет параллелепипед и преобразование (3.224) линейно, то область допустимых скоростей представляет собой выпуклый многогранник или многоугольник, когда рассматриваемая область лежит в плоскости.

Пример 3.7. Построить многоугольник допустимых скоростей в примере 3.6 при $q_1 = 0, q_2 = \pi/2$.

Решение. В рассматриваемой точке уравнение (3.224) имеет вид

$$\begin{aligned} v_x &= \dot{q}_1 + \dot{q}_2, \\ v_y &= \dot{q}_1. \end{aligned}$$

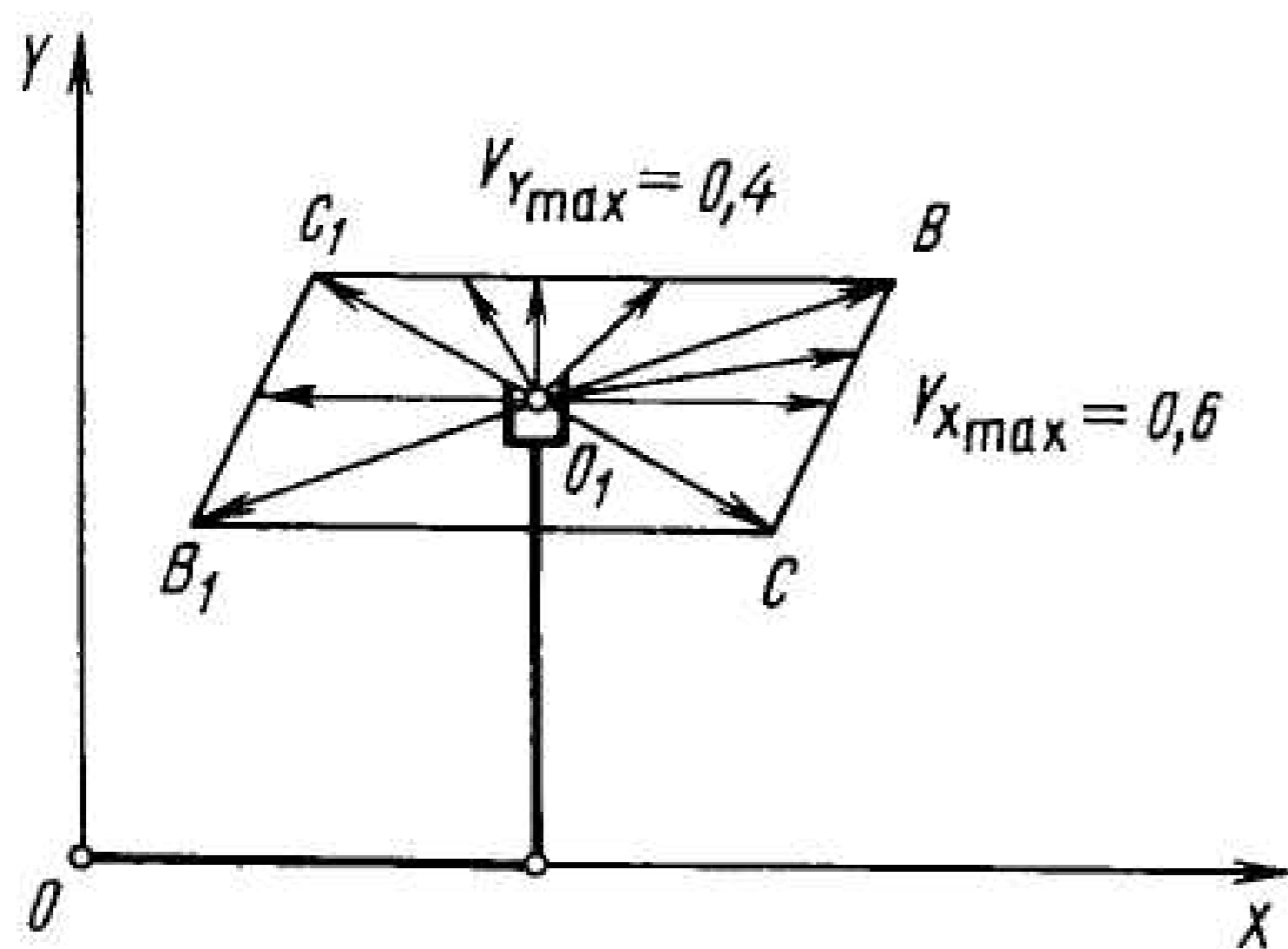


Рис. 3.12. Многоугольник допустимых скоростей

С учетом ограничений $|\dot{q}_1| \leq 0,1, |\dot{q}_2| \leq 0,5$ область допустимых значений скорости — это ромб с вершинами в точках $(1,6; 1,1); (1,4; 0,9); (0,6; 1,1); (0,4; 0,9)$ (рис. 3.12). Максимальная скорость достигается в

направлении диагонали O_1B и равна 0,62, а минимальная — в направлении оси Y и составляет 0,41.

Напомним, что длины звеньев единичные, поэтому они не присутствуют в формулах в явном виде, но влияют на размерность результатов. Если скорости обобщенных координат \dot{q} заданы в 1/с, а длины в метрах, то величина v будет иметь единицу измерения м/с.

В случае пространственной кинематической схемы такой способ значительно сложнее в вычислительном отношении, чем два предыдущих, но он позволяет получить гарантированные значения скоростей. Предыдущие же оценки оказываются завышенными.

3.4.2. Оценка мобильности манипулятора

Объем области допустимых скоростей, полученной выше, может служить численной характеристикой манипуляционного механизма. Ее называют *мобильностью манипулятора* $M(q)$ в данной точке рабочего пространства q , принадлежащей области S_q :

$$M(q) = \int_{\Gamma_v} dv. \quad (3.230)$$

В том случае, если область Γ_v лежит в плоскости, $M(q)$ является ее площадью. Мобильность характеризует возможность схвата манипулятора развить в данной точке рабочего пространства различные по величине и направлению скорости поступательного движения.

Приближенные оценки мобильности можно получить, если вычислить объемы эллипсоидов (3.228) или сфер (3.227). Во втором случае можно использовать приближенную оценку:

$$M(q) = \frac{4}{3} \pi [(\lambda^*(q))^{1/2} C]^3. \quad (3.231)$$

Анализируя изменение мобильности в рабочем пространстве, можно установить области наибольшей и наименьшей мобильности. Так, для примера 3.6 линии постоянной мобильности, вычисленные по последней формуле и представляющие собой концентрические окружности, показаны на рис. 3.11.

Читателю будет интересно ознакомиться с анализом мобильности руки человека, содержащимся в [26, с. 232].

Недостатком рассматриваемой интегральной оценки мобильности является то, что она не учитывает возможность развития скорости в нужном направлении ν . В связи с этим вводят также оценку *мобильности в данном направлении* как максимальное значение скорости в этом направлении с учетом заданных ограничений (3.223). В случае использования эллипсоида распределения скоростей (3.228) эту величину определяют как пересечение луча $\nu_N = r\nu$, проведенного в направлении вектора ν , с поверхностью эллипсоида, т.е. из решения следующего уравнения относительно параметра r :

$$r^2 \nu^\top (J_\nu^{-1})^\top J_\nu^{-1} \nu = C^2. \quad (3.232)$$

При построении многогранников допустимых скоростей определяется пересечение луча $\nu_N = r\nu$ с соответствующей плоскостью многогранника. Анализируя оценку мобильности по направлению, определяют область в рабочем пространстве, в которой следует планировать рабочую операцию, если скорость должна меняться, преимущественно, в заданном направлении.

В качестве оценки *относительной манипулятивности*, т.е. возможности развить скорость ν_N по отношению к норме скорости обобщенных координат \dot{q} , может служить показатель

$$R(q) = \|\nu_N\| / \|\dot{q}\|. \quad (3.233)$$

Из неравенства (3.26) следует оценка относительной манипулятивности снизу:

$$R(q) \geq \sqrt{\lambda_*(q)}. \quad (3.234)$$

Чем больше $R(q)$, тем шире диапазон изменения ν_N при изменении \dot{q} , т.е. тем больше относительная манипулятивность.

Итак, были рассмотрены оценки манипулятивности по отношению к скорости поступательного движения. Значительно реже такие оценки дают по отношению к угловой скорости. Тем не менее, при планировании некоторых технологических операций такие оценки также могут представлять интерес, например при захвате манипулятором объектов, имеющих собственную угловую скорость.

В соответствии с формулами, полученными в § 3.1, угловая скорость определяется выражением, аналогичным (3.224):

$$\omega_N = J_\omega(q)\dot{q}. \quad (3.235)$$

Напомним, что направление вектора ω_N определяет мгновенную ось вращения объекта, закрепленного в схвате (или самого объекта). Фиксируя положение манипулятора, т.е. вектора q , и изменяя скорости обобщенных координат \dot{q} , в соответствии с ограничениями (3.223), получаем множество допустимых мгновенных осей вращения. В частном случае, когда $J_\omega(q)$ — квадратная матрица и $\det J_\omega(q) \neq 0$, это множество образует конус, проходящий через начало координат $\omega_N = 0$.

Оценки сверху и снизу для значений угловой скорости можно получить так же, как и оценку для скорости поступательного движения:

$$\|\dot{q}\|^2 \lambda_{\omega_*}^{1/2} \leq \|\omega_N(q)\| \leq \lambda_{\omega^*}^{1/2} \|\dot{q}\|^2, \quad (3.236)$$

где λ_{ω^*} — максимальное, а λ_{ω_*} — минимальное характеристические числа симметрической матрицы $J_\omega^\top J_\omega$.

Если это неравенство удовлетворяется, т.е. значение угловой скорости, требуемое по условиям операции, может быть достигнуто, то проверка реализуемости допустимого направления сводится к выяснению существования для него решения уравнения, аналогичного (3.232), в пределах заданных ограничений.

3.4.3. Оценка приемистости

Еще большие трудности сопряжены с определением допустимых ускорений движения объекта. Рассмотрим эту задачу только по отношению к ускорению поступательного движения объекта манипулирования, которое, согласно (3.40), определяется по формуле

$$w_N = J_\nu(q)\ddot{q} + \dot{J}_\nu(q, \dot{q})\dot{q}. \quad (3.237)$$

Предположим, что не только скорости, но и ускорения угловых координат ограничены; эти ограничения известны заранее и имеют вид

$$|\ddot{q}_i| \leq b_i, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (3.238)$$

Ограничения для скоростей обобщенных координат по-прежнему имеют вид (3.223). Если обозначить $J_\nu = [J_{\nu,ij}]$; $\dot{J} = [b_{\nu,ij}]$, $i = 1, \dots, N$, $j = 1, \dots, M$, то оценка для каждой составляющей вектора ускорения примет вид

$$\|w_{Nj}\| \leq \sum_{i=1}^N |J_{\nu,ij}| \ddot{q}_i + \sum_{i=1}^N |b_{\nu,ij}| \dot{q}_i, \quad j = 1, \dots, M. \quad (3.239)$$

Если \dot{q}_i, \ddot{q}_i удовлетворяют условиям (3.223), (3.238), соответственно, то последнее неравенство описывает многогранник допустимых ускорений при данном положении манипулятора, т.е. при заданном векторе обобщенных координат q . Определение максимального ускорения и его направления при этом значительно сложнее в общем случае, чем в случае максимальной скорости.

Представляет практический интерес частный случай, когда происходит движение манипуляционного механизма из состояния покоя (разгон). При этом в исходном положении можно принять $\dot{q} = 0$ и формула (3.237) приобретает вид

$$w_N = J_v(q)\ddot{q}. \quad (3.240)$$

Способность манипуляционного механизма развивать из состояния покоя ускорение поступательного движения w_N определяется как *приемистость**. Для численной характеристики приемистости могут использоваться те же показатели, что и для характеристики мобильности. Прежде всего, это объем пространства D_w , занимаемый вектором возможных ускорений (в данной точке рабочего пространства) при ограничениях на ускорение обобщенных координат вида (3.238). Как и в случае скоростей, это — многогранник, являющийся линейным преобразованием параллелепипеда ограничений (3.238).

Если известны якобиева матрица $J_v(q)$ и матрица $B_v(q, \dot{q})$, то вычисление многогранника допустимых ускорений в соответствии с (3.239) не представляет трудностей. При этом можно ввести и показатель приемистости по направлению как максимальное допустимое значение вектора w_N в данном направлении. Это значение можно получить как длину вектора w_N , имеющего заданное направление и являющегося допустимым (т.е. лежащим в области D_w).

Для грубой оценки распределения приемистости по рабочему пространству манипулятора можно воспользоваться соотношением, аналогичным (3.226):

$$\lambda^*(q) \geq \|w_N\|^2 / \|\ddot{q}\|^2 \geq \lambda_*(q),$$

* См. более подробно в [26, с. 237].

где λ^* и λ_* — максимальное и минимальное из характеристических чисел симметрической матрицы $J_v^T(q)J_v(q)$.

Эти оценки не всегда удовлетворительно описывают качество манипулятора, которое мы назвали приемистостью. Как, впрочем, и оценки манипулятивности. Дело в том, что мы использовали только уравнения кинематики манипулятора, в то время как его движение подчиняется уравнениям динамики. Очевидно, что приемистость будет зависеть от моментов или сил, развиваемых двигателями степеней подвижности манипулятора, а также от его инерционных характеристик.

Степень влияния динамики манипулятора на его программное движение зависит от многих причин, к которым наряду с указанными относится мощность приводов, перемещаемые массы, развиваемые ускорения. Эти же факторы определяют и степень достоверности рассмотренных в этом параграфе оценок, особенно это относится к оценкам развиваемого ускорения. Поэтому вернемся к ним после описания динамики манипуляционных механизмов.

Контрольные вопросы и задания

1. Что такое линейные и угловые скорость и ускорение звена манипулятора?
2. Выведите соотношения (3.19), (3.20) для скоростей и ускорений звена в связанной системе координат.
3. Выведите соотношение для дифференцирования матриц относительно го положения звеньев A по обобщенной координате.
4. Исходя из соотношений (3.54)–(3.56), получите рекуррентные соотношения для векторов угловых и линейных скоростей для случая телескопических сочленений.
5. Выведите соотношения (3.68) для ортогонального преобразования векторного произведения.
6. Сформулируйте прямую задачу о скорости.
7. Получите выражение для дифференциальных перемещений в форме (3.122), (3.123) для случая телескопических сочленений.
8. Сформулируйте обратную задачу о скорости и прокомментируйте количество решений в зависимости от ранга матрицы Якоби.

9. Исследуйте решение обратной скоростной задачи для однозвенного манипулятора (математического маятника). В качестве командного вектора примите вектор линейной скорости.

10. Решите обратную задачу о скорости для манипулятора RAMP-2000 (см. гл. 1).

11. Получите выражение для псевдообратной матрицы в форме (3.207), если в качестве минимизируемой функции (3.203) используется

$$f(x) = (Ax - b)^T Q (Ax - b),$$

т.е. квадратичная форма вектора невязки $Ax - b$.

12. Объясните, почему для вырожденной квадратной матрицы Якоби $J(q)$ необходимо использовать представление псевдообратной матрицы в форме Мура — Пенроуза.

13. Для двухзвенного плоского манипулятора с вращательными сочленениями нарисуйте в пространстве $Q = q_1 \times q_2$ области, где конфигурация становится вырожденной, и пометьте каждую из областей соответствующим рангом матрицы Якоби. Решите ту же задачу для трехзвенного манипулятора.

4. КИНЕМАТИЧЕСКОЕ УПРАВЛЕНИЕ МАНИПУЛЯТОРОМ

В предыдущих главах обсуждались вопросы, связанные с построением кинематической модели манипулятора. Приступим теперь к решению проблемы управления кинематической моделью. Как было сказано выше, система управления робота является многоуровневой, иерархически организованной системой, при этом кинематический уровень — важная составляющая, обеспечивающая построение программных движений приводов сочленений манипулятора. *Кинематическим управлением* называют управление манипулятором, описываемым кинематической моделью. Как правило, полагают что система приводов идеальна в том смысле, что она совершенно точно воспроизводит программное движение. Конечно, это предположение нельзя считать вполне корректным: всегда существует различие между задаваемым программным движением и действительным движением степеней подвижности механизма, вызываемое неидеальной работой приводов в сочленениях. Для того чтобы это различие не было излишне большим, при построении кинематического управления необходимо учитывать и динамические свойства механизма. Это обстоятельство отражает тот факт, что разбиение на уровни представляет собой лишь удобный методический прием для работы со сложной системой, какой является робот.

В этой главе рассмотрены следующие вопросы:

- как переместить схват манипулятора из одной точки в другую?
- как провести схват манипулятора по точкам, заданным в пространстве обобщенных координат или в декартовом пространстве?
- как осуществить движение схвата по заданной траектории?

Кинематическое управление можно реализовать за два этапа. Первый этап состоит в планировании траектории, т.е. в предварительном

определении программного движения степеней подвижности $q^*(t)$ на некотором временном отрезке $t \in [t_0, t_1]$. Второй этап непосредственно заключается в отработке полученной программной траектории приводами подвижных сочленений. Такая многоэтапность присуща в основном системам позиционного управления, т.е. таким системам, где движение состоит в перечислении точек позиционирования, через которые должны пройти либо сочленения манипулятора (если точки заданы в пространстве обобщенных координат), либо его схват (если точки заданы в декартовом пространстве). Существуют, однако, методы, не связанные с предварительным планированием траектории. Эти методы используют преимущественно в системах контурного управления.

Отметим, что в этой главе представлено планирование именно траекторий, а не движения. Под планированием движения понимают процедуру получения основных характеристик траекторий, последовательное движение вдоль которых обеспечивает выполнение роботом сформулированного задания. Таким образом, если кинематическое управление представляет собой тактический уровень системы управления роботом, то планирование движения относится к стратегическому уровню.

4.1. Планирование траекторий в пространстве обобщенных координат

Как уже говорилось выше, под *планированием траектории* понимают процедуру получения программного движения звеньев манипулятора $q^*(t)$, $t \in [t_0, t_1]$, либо схвата $s^*(t)$, $t \in [t_0, t_1]$. Несмотря на то, что используемые при этом методы имеют много общего, тем не менее существующие различия заставляют рассмотреть эти методы отдельно.

4.1.1. Перевод из точки в точку. Режим разгона — торможения

Решим простую задачу. Пусть в пространстве обобщенных координат $Q = q_1 \times q_2 \times \dots \times q_N$, где N — число звеньев манипулятора, заданы две точки q^0 и q^1 . Предположим, что в момент времени t_0 манипулятор находился в точке q^0 . Необходимо найти такую функцию $q(t)$, при которой в момент времени t_1 манипулятор находился бы в точке

q^1 . Иными словами, задача состоит в определении $q = q(t)$, $t \in [t_0, t_1]$, с краевыми условиями

$$\begin{aligned} q(t_0) &= q^0, \\ q(t_1) &= q^1. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Ясно, что при такой формулировке задача может иметь сколь угодно много решений (рис. 4.1), если дополнительно не будут наложены никакие ограничения. Весьма привлекательным ввиду простоты реализации, на первый взгляд, является движение по прямой (в пространстве Q). В этом случае ее параметризация приводит к следующему результату:

$$\frac{q - q^0}{t - t_0} = \frac{q^1 - q^0}{t_1 - t_0}$$

или

$$q = q(t) = q^0 + v(t - t_0), \quad (4.2)$$

где

$$v = \frac{q^1 - q^0}{t_1 - t_0}. \quad (4.3)$$

Безусловно, необходимо позаботиться о том, чтобы компоненты полученного вектора скорости (4.3) не превышали (по модулю) максимальные скорости $\dot{q}_i^{\max} > 0$, которые могут развить приводы подвижных сочленений:

$$|v_i| \leq \dot{q}_i^{\max}.$$

Если это условие не выполняется, то единственным выходом из этого положения является увеличение времени t_1 . Эта проблема возникает, вообще говоря, всегда в процессе решения задач планирования, который приобретает итерационный характер. Во избежание этого можно не задавать время t_1 , а дополнительно к неравенству (4.1) добавить условие

$$\max_{t \in [t_0, t_1]} |\dot{q}(t)| = c,$$

где c — заданное число.

В этом случае t_1 является дополнительной неизвестной, которую находят в процессе решения задачи.

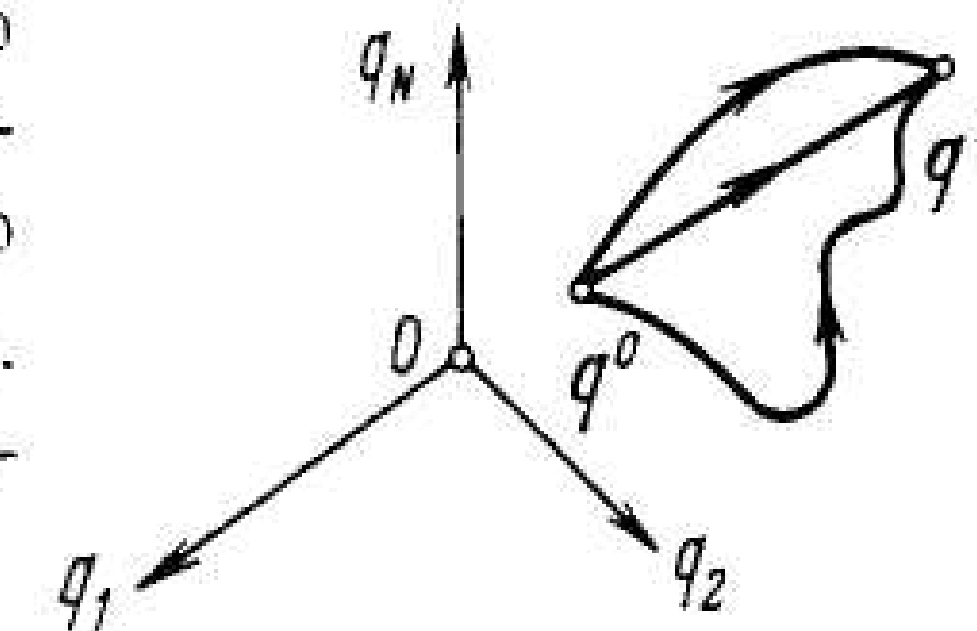


Рис. 4.1. Перевод манипулятора из точки в точку в пространстве обобщенных координат

Однако не будем развивать этот подход, а укажем на недостаток, который делает невозможным применение этого «наивного» метода управления. Действительно, предположим, что в момент времени t_0 манипулятор неподвижен (т.е. $\dot{q}(t) = 0$, $t < t_0$). Тогда при реализации закона управления (4.2) в момент времени t_0 скорость имеет разрыв первого рода, а ускорение — разрыв второго рода, что приводит к необходимости прикладывать к звеньям манипулятора со стороны приводов бесконечно большие силы или моменты. Аналогичный случай возникает на правом конце траектории, если необходимо, чтобы манипулятор остановился в точке q^1 . Существует несколько методов решения этой задачи, рассмотрим два из них.

Специальная параметризация. Перепишем выражение (4.2) следующим образом:

$$q(t) = q^0 + \frac{q^1 - q^0}{t_1 - t_0} (t - t_0) = q^0 + \lambda(t)(q^1 - q^0), \quad (4.4)$$

где

$$\lambda(t) = \frac{t - t_0}{t_1 - t_0}. \quad (4.5)$$

Если скалярная функция $\lambda(t)$ удовлетворяет условию (4.5), то манипулятор осуществляет движение вдоль прямой (в пространстве Q) с постоянной скоростью, что не приемлемо в силу указанных причин. Выбор зависимости для $\lambda(t)$, отличной от (4.5), приводит к тому, что движение будет осуществляться также по прямой, но с переменной скоростью. При этом, если потребовать, чтобы

$$\begin{aligned} \lambda(t_0) &= 0, \\ \lambda(t_1) &= 1, \end{aligned} \quad (4.6)$$

то, как нетрудно видеть, условия (4.1), а именно: $q(t_0) = q^0$, $q(t_1) = q^1$, будут удовлетворены. Заметим также, что из соотношения (4.4) следует

$$\dot{q}(t) = \dot{\lambda}(t)(q^1 - q^0), \quad (4.7)$$

т.е. скалярная функция $\dot{\lambda}(t)$ представляет собой с точностью до множителя скорость в каждом сочленении $\dot{q}_i(t)$. Тогда, выбирая требуемую функцию $\dot{\lambda}(t)$, называемую профилем скорости, можно обеспе-

чить как перевод манипулятора из q^0 в q^1 , так и желаемую скорость перемещения. Кроме того, в приложениях весьма полезным является соотношение, вытекающее из (4.7):

$$\int_{t_0}^{t_1} \dot{q}(t) dt = q^1 - q^0 = (q^1 - q^0) \int_{t_0}^{t_1} \dot{\lambda}(t) dt,$$

т.е.

$$\int_{t_0}^{t_1} \dot{\lambda}(t) dt = 1. \quad (4.8)$$

В геометрическом смысле соотношение (4.8) означает, что площадь, ограниченная линией $\dot{\lambda}(t)$ на $[t_0, t_1]$, равна 1 (рис. 4.2) (для простоты на рисунке принято $t_0 = 0$, $t_1 = T$). На рис. 4.2, а показан уже рассмотренный случай $v = \text{const}$, на рис. 4.2, б, в изображен треугольный и трапецидальный профили скорости. Следует заметить, что в обоих случаях в вершинах треугольника и трапеции будет иметь место скачок ускорения. На рис. 4.2, г представлен профиль скорости $\dot{\lambda}(t) = \frac{2}{T} \sin^2 \frac{\pi t}{T}$, обеспечивающий плавное движение манипулятора вдоль всей траектории.

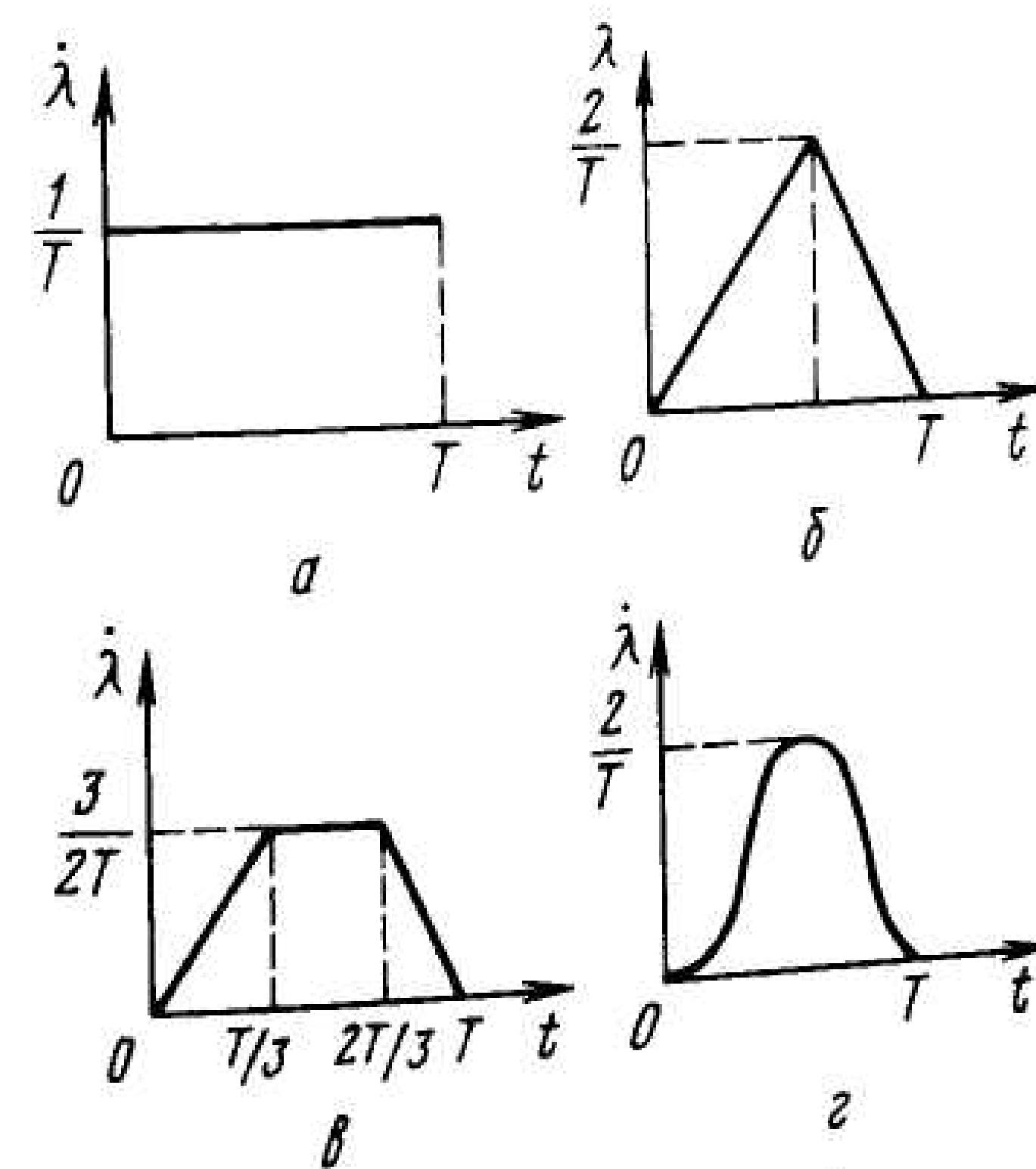


Рис. 4.2. Профили скоростей

Полиномиальная интерполяция. Еще один подход к построению траектории, переводящей манипулятор из q^0 в q^1 и удовлетворяющей условиям гладкости, состоит в использовании интерполяционных многочленов, имеющих более высокие степени, чем в описанном ниже случае. Чтобы не усложнять запись, будем далее обобщенную координату i -го звена манипулятора q_i обозначать $q_i = q$.

Итак, пусть заданы значения i -й координаты в двух точках:

$$q(t_0) = q^0, \quad (4.9)$$

$$q(t_1) = q^1.$$

Кроме того, потребуем, чтобы на левом и правом концах отрезка $[t_0, t_1]$ выполнялись следующие условия:

$$\dot{q}(t_0) = \dot{q}(t_1) = 0, \quad (4.10)$$

$$\ddot{q}(t_0) = \ddot{q}(t_1) = 0.$$

Тогда нетрудно видеть, что многочлен пятой степени

$$q(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + a_4 t^4 + a_5 t^5 \quad (4.11)$$

представляет собой многочлен с минимальной степенью, удовлетворяющий условиям (4.9), (4.10).

Положим $t_0 = 0$, $t_1 = T$ (это приведет к тому, что каждая соседняя пара точек позиционирования будет иметь свое собственное «локальное» время), тогда систему уравнений для поиска коэффициентов полинома (4.11) можно представить следующим образом:

$$\begin{cases} a_0 = q_0, \\ a_1 = 0, \\ a_2 = 0, \\ a_1 + 2a_2 T + 3a_3 T^2 + 4a_4 T^3 + 5a_5 T^4 = 0, \\ 2a_2 + 6a_3 T + 12a_4 T^2 + 20a_5 T^3 = 0, \end{cases}$$

и эту систему легко решить.

Следующий способ полиномиальной аппроксимации состоит в том, что используется не один многочлен, а несколько, которые склеиваются так, что полученная в результате траектория обладает требуемой степенью гладкости. Подробно этот подход будет рассмотрен далее, когда будут обсуждаться кубические сплайн-функции. Не вдаваясь в детали, обсудим лишь общий подход к такой интерполяции.

Разобьем отрезок $[t^0, t^1]$ на три части (рис. 4.3). Пусть на каждом из получившихся отрезков $q(t)$ можно представить полиномами степеней n_1, n_2, n_3 . Тогда для нахождения коэффициентов полиномов воспользуемся следующими условиями.

1. В точках t^0 и t^1 известны q, \dot{q}, \ddot{q} .

2. В точках t_1, t_2 значения функций и их производных до 2-й включительно, взятые слева и справа, совпадают.

Итак, имеется всего 12 уравнений, следовательно, сумма степеней многочленов удовлетворяет соотношению

$$n_1 + n_2 + n_3 = 9.$$

Возможные решения этого уравнения дают, например, следующие тройки чисел: (3, 3, 3), (4, 1, 4), из которых последняя является наиболее привлекательной, поскольку обеспечивает разгон и торможение на начальном и конечном участках траектории и движение с постоянной скоростью на среднем участке. Однако следует заметить, что решение соответствующей линейной системы может не всегда существовать, поскольку $\ddot{q}(t)$ на среднем участке тождественно равна нулю и матрица системы может быть вырожденной.

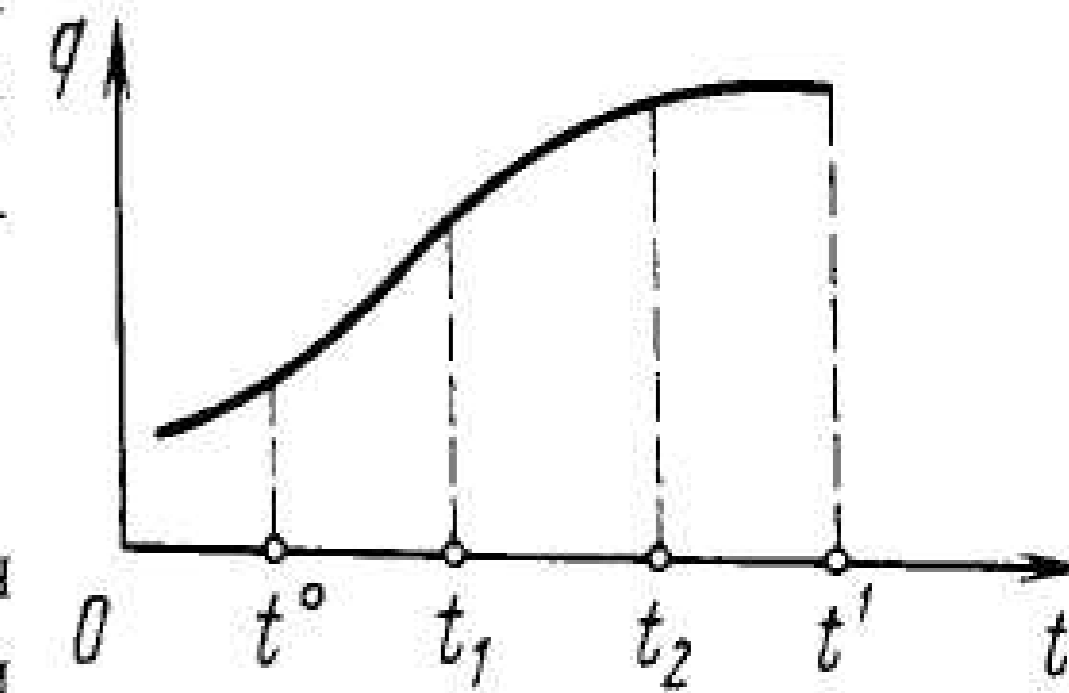


Рис. 4.3. Аппроксимация траектории многочленами

4.1.2. Обход совокупности точек

Пусть теперь дана последовательность точек в пространстве обобщенных координат Q , которую манипулятор должен обойти, попадая в каждую точку q_i в момент времени t_i (рис. 4.4):

$$q(t_i) = q_i. \quad (4.12)$$

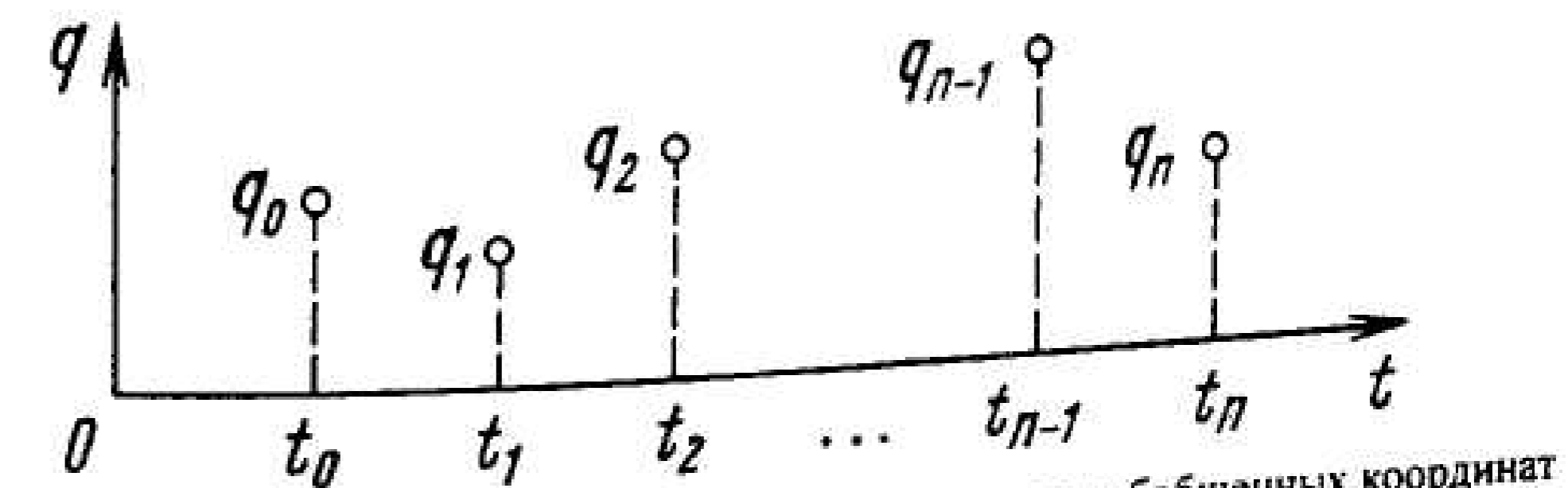


Рис. 4.4. Обход последовательности точек в пространстве обобщенных координат

При этом не имеет значения, с какой скоростью манипулятор проходит внутренние точки q_1, q_2, \dots, q_{n-1} , но важно, чтобы на концах траектории (т.е. в q_0 и q_n) скорости и ускорения удовлетворяли некоторым условиям:

$$\begin{aligned} \dot{q}_0 &= a, \quad \ddot{q}_0 = b, \\ \dot{q}_n &= c, \quad \ddot{q}_n = d, \end{aligned}$$

где a, b, c, d — заданные векторы.

Наибольший интерес представляет случай, когда $a = b = c = d = 0$, т.е. манипулятор начинает и завершает движение в состоянии покоя. Задача заключается в том, чтобы построить траекторию в пространстве Q обобщенных координат, $q = q(t)$, удовлетворяющую этим условиям и, кроме того, условиям гладкости: мы будем требовать непрерывности как самой функции $q(t)$, так и ее производных до второго порядка включительно.

Ясно, что одно из возможных решений можно получить, используя интерполяционный многочлен степени n (если не накладывать дополнительных условий на левом и правом концах траектории) или степени $n+4$ (если эти условия наложены). Однако, если число n велико (а оно может достигать нескольких сотен для сложных контуров), то степень многочлена тоже высока и возникают трудности, связанные с большим объемом вычислений значений многочлена в каждой точке. Тогда естественно для решения этой задачи использование нескольких интерполяционных многочленов невысокой степени, которые склеиваются в узловых точках. Именно этот подход и обсудим.

Кубические сплайн-функции. Пусть на отрезке $[a, b]$ заданы узлы $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$, которые не обязательно равно отстоят один от другого, а также $n+1$ число q_0, q_1, \dots, q_n . Требуется найти функцию $q(x)$, которая удовлетворяет следующим условиям:

1. $q(x_i) = q_i, i = 0, 1, 2, \dots, n$.
2. $q(x), q'(x), q''(x)$, — функции, непрерывные на $[a, b]$.
3. $q(x)$ на каждом из отрезков $[x_k, x_{k+1}], k = 0, 1, \dots, n-1$, является алгебраическим многочленом степени не выше трех:

$$q(x) = a_0^k + a_1^k x + a_2^k x^2 + a_3^k x^3, \quad x \in [x_k, x_{k+1}], \quad k = 0, 1, \dots, n-1. \quad (4.13)$$

Функцию, удовлетворяющую этим условиям, называют *кубическим сплайном*. Аналогично можно сформулировать более общую задачу построения сплайна степени m : вместо условий 2 и 3 необходимо потребовать, чтобы функции $q(x), q'(x), \dots, q^{(m-1)}(x)$ были непрерывными и $q(x)$ представляла собой многочлен степени не выше m . Ограничимся рассмотрением кубических сплайнов.

Нетрудно видеть, что функции, удовлетворяющие перечисленным выше условиям, существуют. Действительно, на каждом из отрезков $[x_k, x_{k+1}]$ функция $q(x)$ задана многочленом (4.13) и таким образом имеется $4n$ неизвестных $a_j^i, i = 0, 1, \dots, n-1, j = 0, 1, 2, 3$. Условия 1 и 2 дают $n+1$ и $3(n-1)$ уравнений соответственно, и, следовательно, в запасе имеется два дополнительных условия, которые можно наложить на функцию, и которые будут заданы далее.

Построим кубический сплайн на отрезке $[x_k, x_{k+1}]$. Вторая производная функции $q(x)$ имеет вид

$$q''(x) = q''_{k+1} \frac{x-x_k}{h_k} - q''_k \frac{x-x_{k+1}}{h_k}. \quad (4.14)$$

где $q''_i = q''(x_i)$ — неизвестные вторые производные сплайна в узловых точках, при этом, поскольку $q''(x)$ в соответствии с условием 2 непрерывна, нет необходимости указывать, с какой стороны эти производные взяты. Дважды интегрируя выражение (4.14), получаем

$$q'(x) = q'_k + \int_{x_k}^x q''(t) dt = q'_k + \frac{(x-x_k)^2}{2h_k} q''_{k+1} - \frac{(x-x_{k+1})^2}{2h_k} q''_k + \frac{h_k}{2} q''_k, \quad (4.15)$$

$$q(x) = q_k + \int_{x_k}^x q'(t) dt = q_k + (x-x_k)q'_k + \frac{(x-x_k)^2}{6h_k} q''_{k+1} - \left[\frac{(x-x_{k+1})^2}{6h_k} + \frac{h_k}{6} - (x-x_k) \frac{h_k}{2} \right] q''_k. \quad (4.16)$$

Заметим, что q'_i, q''_i являются неизвестными величинами, которые мы будем далее искать.

Положив в выражении (4.16) $x = x_{k+1}$, получим

$$q_{k+1} = q_k + h_k q'_k + \frac{h_k^2}{6} q''_{k+1} - \frac{h_k^2}{3} q''_k. \quad (4.17)$$

Отсюда находим

$$q'_k = \frac{q_{k+1} - q_k}{h_k} - \frac{h_k^2}{6} q''_{k+1} + \frac{h_k^2}{3} q''_k. \quad (4.18)$$

Подставляя (4.18) в (4.16), замечаем, что сплайн $q(x)$ будет зависеть только от значений вторых производных в узлах q''_k, q''_{k+1} . Следовательно, если найти эти неизвестные, то будет решена задача поиска сплайна. Подставляя (4.18) в (4.15), получаем

$$q'(x) = \frac{q_{k+1} - q_k}{h_k} - \frac{h_k^2}{6} q''_{k+1} + \frac{(x - x_k)}{2h_k} q''_{k+1} - \frac{(x - x_{k+1})}{2h_k} q''_k + \frac{h_k^2}{6} q''_k. \quad (4.19)$$

Выражения (4.14)–(4.19) справедливы для $x \in [x_k, x_{k+1}]$. Применяя теперь соотношение (4.19) к отрезку $[x_{k-1}, x_k]$, имеем

$$q'(x) = \frac{q_k - q_{k-1}}{h_{k-1}} - \frac{h_{k-1}}{6} q''_k + \frac{(x - x_{k-1})^2}{2h_{k-1}} q''_k - \frac{(x - x_k)}{2h_{k-1}} q''_{k-1} + \frac{h_{k-1}}{6} q''_{k-1}.$$

Подставляя в последнее выражение $x = x_k$, получаем

$$q'_k = \frac{q_k - q_{k-1}}{h_{k-1}} + \frac{h_{k-1}}{3} q''_k + \frac{h_{k-1}}{6} q''_{k-1}. \quad (4.20)$$

Сравнивая выражения (4.18) и (4.20), видим, что

$$\frac{q_{k+1} - q_k}{h_k} - \frac{q_k - q_{k-1}}{h_{k-1}} = \frac{h_k}{6} q''_{k+1} + \frac{h_k + h_{k-1}}{3} q''_k + \frac{h_{k-1}}{6} q''_{k-1}.$$

Откуда следует, что

$$\alpha_k q''_{k+1} + 2q''_k + (1 - \alpha_k) q''_{k-1} = M_k, \quad (4.21)$$

где

$$\alpha_k = \frac{h_k}{h_k + h_{k-1}}; \quad (4.22)$$

$$M_k = 6 \frac{\frac{q_{k+1} - q_k}{h_{k+1}} - \frac{q_k - q_{k-1}}{h_k}}{h_{k+1} + h_k}. \quad (4.23)$$

Уравнение (4.21) можно записать для $k = 1, 2, \dots, n-1$ следующим образом:

$$\begin{aligned} \alpha_1 q''_2 + 2q''_1 + (1 - \alpha_1) q''_0 &= 6f(x_0, x_1, x_2), \\ \alpha_2 q''_3 + 2q''_2 + (1 - \alpha_2) q''_1 &= 6f(x_1, x_2, x_3), \\ &\vdots \\ \alpha_i q''_{i+1} + 2q''_i + (1 - \alpha_i) q''_{i-1} &= 6f(x_{i-1}, x_i, x_{i+1}), \\ \alpha_{n-1} q''_n + 2q''_{n-1} + (1 - \alpha_{n-1}) q''_{n-2} &= 6f(x_{n-2}, x_{n-1}, x_n). \end{aligned} \quad (4.24)$$

Таким образом, получена система линейных уравнений $(n-1)$ -го порядка относительно $n+1$ неизвестных $q''_0, q''_1, \dots, q''_n$. Нетрудно видеть, что система уравнений (4.24) всегда имеет решение. Действительно, выберем произвольно $q''_0 = \alpha, q''_1 = \beta$. Тогда из первого уравнения (4.24) легко можно найти q''_2 (поскольку $\alpha_1 > 0$), которую далее подставить в остальные уравнения. После чего этот процесс необходимо повторять до тех пор, пока из последнего уравнения не будет найдено q''_n . Следовательно, решение системы всегда существует и зависит от двух произвольно выбранных параметров α и β .

Решим систему уравнений (4.24). Для этого зададим \ddot{q}_0 и \ddot{q}_n , т.е. будем считать, что известны значения вторых производных на концах отрезка $[a, b]$. Тогда система уравнений (4.24) будет являться системой из $(n-1)$ -го уравнения относительно $(n-1)$ -й неизвестной вида

$$Ax = b, \quad (4.25)$$

где A — матрица $(n-1) \times (n-1)$:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & \alpha_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 - \alpha_2 & 2 & \alpha_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \alpha_3 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 - \alpha_{n-1} & 2 \end{pmatrix},$$

x — вектор, компоненты которого и есть искомые неизвестные:

$$x = (q''_1, q''_2, \dots, q''_{n-1})^T. \quad (4.26)$$

Матрицы такого вида называют ленточными матрицами, или матрицами Якоби, и для их обращения используют специальный рекуррентный метод прогонки. Рассмотрим этот метод.

Будем искать решение уравнение (4.25) в виде

$$x_k = c_k x_{k+1} + d_k, \quad (4.27)$$

где x_k — k -я компонента вектора (4.26), а c_k и d_k — некоторые числа. Используя уравнение (4.21), получаем

$$\alpha_{k+1}x_{k+2} + 2x_{k+1} + (1 - \alpha_k)x_k = M_{k+1}, \quad k = 1, 2, \dots, n-1. \quad (4.28)$$

Подставляя выражение (4.27) в (4.28), находим

$$\alpha_{k+1}x_{k+2} + 2x_{k+1} + (1 - \alpha_k)(c_k x_{k+1} + \alpha_k) = M_{k+1},$$

откуда

$$x_{k+1} = -\frac{\alpha_{k+1}}{2 + (1 - \alpha_{k+1})c_k} x_{k+2} + \frac{M_{k+1} - (1 - \alpha_{k+1})d_k}{2 + (1 - \alpha_{k+1})c_k}.$$

Введем обозначения:

$$c_{k+1} = -\frac{\alpha_{k+1}}{2 + (1 - \alpha_{k+1})c_k}; \quad (4.29)$$

$$d_{k+1} = \frac{M_{k+1} - (1 - \alpha_{k+1})d_k}{2 + (1 - \alpha_{k+1})c_k}. \quad (4.30)$$

В силу уравнения (4.27) при $k = 0$ имеем

$$x_0 = c_0 x_1 + d_0. \quad (4.31)$$

Откуда

$$\begin{aligned} c_0 &= 0, \\ d_0 &= x_0. \end{aligned} \quad (4.32)$$

С помощью рекуррентных соотношений (4.24), (4.30) можно найти c_k , d_k , $k = 1, 2, \dots, n$, если принять соотношения (4.31), (4.32) в качестве начальных условий, после чего, используя рекуррентные соотношения (4.27), вычислить x_k , $k = n-1, n-2, \dots, 1$. Таким образом, процесс нахождения решений уравнения (4.25) состоит в выполнении двух шагов: на первом шаге перегоняем краевое условие q_0^n слева направо (прямая рекурсия), на втором — ищем неизвестные q_i^n справа налево (обратная рекурсия). Нетрудно показать, что этот процесс выполним, поскольку $2 + (1 - \alpha_{k+1})c_k \neq 0$, $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$.

В заключении заметим, что сплайны весьма часто используют для аппроксимации функций, не обладающих достаточной степенью гладкости. Рассмотрим, например, задачу аппроксимации функции $f(x) = |x|$, $x \in [-1, 1]$ часто встречающейся в управлении *параболическим*

сплайном $s_2(x, \varepsilon)$ (рис. 4.5). В качестве аппроксимирующего многочлена выберем

$$s_2(x, \varepsilon) = \begin{cases} x, & 0 < \varepsilon < x, \\ \frac{x^2}{2\varepsilon} + \frac{\varepsilon}{2}, & 0 \leq x \leq \varepsilon; \\ s_2(x, \varepsilon) = s_2(-x, \varepsilon), & -1 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Такая аппроксимация является сколько угодно точной, поскольку

$$|s_2(x, \varepsilon) - |x|| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

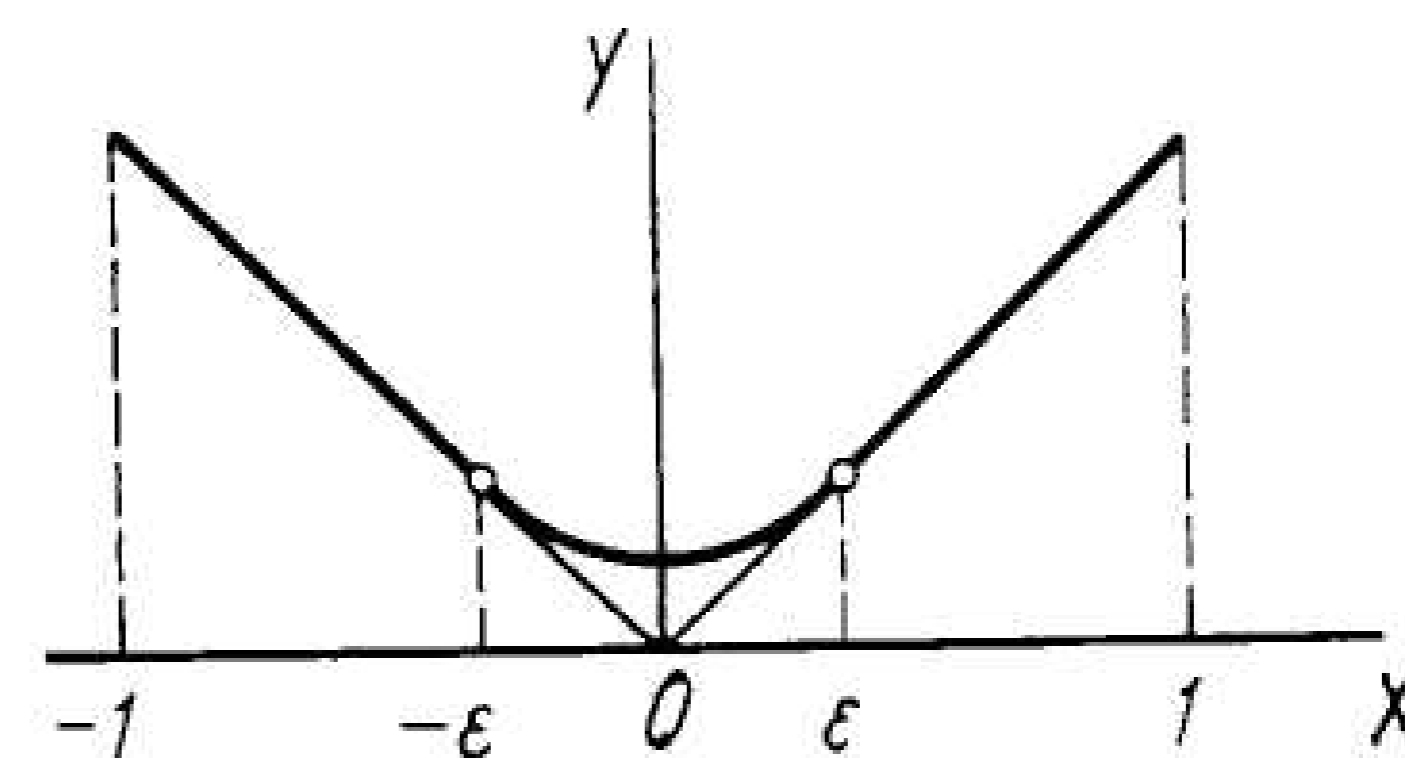


Рис. 4.5. Аппроксимация параболическим сплайном с нефиксированными узлами

Планирование траектории с помощью сплайн-функций. Описанный выше метод построения интерполяционных многочленов в виде кубической сплайн-функции можно применять для планирования траектории в пространстве обобщенных координат. Действительно, как было сказано выше, задача заключается в том, чтобы построить гладкую траекторию $q(t)$ в пространстве обобщенных координат, такую, чтобы $q(t_i) = q_i$, $i = 0, 1, 2, \dots, n$, и на правом и левом концах дополнительно выполнялись соотношения $\dot{q}(t_0) = a$, $\ddot{q}(t_0) = b$, $\dot{q}(t_1) = c$, $\ddot{q}(t_1) = d$, где a, b, c, d — заданные векторы. Эти условия полностью совпадают с теми, что были использованы при построении кубического сплайна. Сделаем три следующих замечания.

1. Как было показано выше, процедура построения сплайна основана на использовании метода прогонки, для реализации которого необходимо применить обратную рекурсию. Это означает, что плани-

рование траектории следует осуществлять в режиме off-line, что, впрочем, свойственно процедурам планирования.

2. Второе замечание касается планирования циклически повторяемых движений манипулятора. Представим себе, что манипулятор должен несколько раз обойти последовательность $\{q_i\}$, $i = 0, 1, 2, \dots, n$, аппроксимирующую некоторый замкнутый контур так, что $q_0 = q_n$. При этом необходимо замкнуть траекторию, наложив следующие условия:

$$\dot{q}_0 = \dot{q}_n, \quad \ddot{q}_0 = \ddot{q}_n.$$

Можно показать, что получающаяся в результате система линейных уравнений хотя и не совпадает с (4.24), но имеет ту же структуру и решается также методом прогонки.

3. При реализации метода сплайн-функций можно прийти к тому, что на полученной траектории $q(t)$ некоторые компоненты векторов q скоростей $\dot{q}(t_k)$ и ускорений $\ddot{q}(t_k)$ будут превышать допустимые значения \dot{Q}_i^{\max} , \ddot{Q}_j^{\max} , т.е. те максимальные скорости и ускорения, которые могут развить соответствующие приводы подвижных сочленений манипулятора. Поскольку ускорения (как это видно из соотношения (4.14)) изменяются линейно, экстремум достигается на границах отрезков, т.е. в узловых точках.

Зависимость скоростей от времени квадратичная (см. (4.16)) и, следовательно, для поиска экстремальных значений необходимо дополнительно проверить значение скорости во внутренней точке отрезка.

Обеспечение ограничений на скорости и ускорение

$$\max |\dot{q}_i(t)| \leq \dot{Q}_i^{\max}, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (4.33)$$

$$t_0 \leq t \leq t_n$$

$$\max |\ddot{q}_i(t_k)| \leq \ddot{Q}_i^{\max} \quad (4.34)$$

достигается путем изменения разбиения отрезка $[t_0, t_n]$, например увеличения того временного интервала, где ограничение (4.33) или (4.34) нарушено. Ясно, что при этом время обхода $T = t_n - t_0$ манипулятором заданной совокупности точек увеличивается. Однако возможен и другой подход, состоящий в минимизации времени обхода и выборе разбиения $\{t_i\}$, при которых выполняются ограничения (4.33), (4.34).

4.2. Управление манипулятором в пространстве координат схвата

Изложенные в предыдущих параграфах методы планирования и управления в пространстве обобщенных координат хотя и позволяют строить эффективные алгоритмы, однако обладают тем недостатком, что их нельзя непосредственно использовать в приложениях, где задание манипуляционному роботу формулируется в терминах его рабочего пространства или в терминах координат схвата. Такой способ описания задания роботу широко используется, в частности, в проблемно-ориентированных языках программирования. В этом параграфе рассмотрены основные методы управления манипуляторами в пространстве координат схвата. Заметим, что эти методы управления почти всегда сопряжены с необходимостью решения обратных задач кинематики.

4.2.1 Управление по положению

Пусть s , как и прежде, представляет собой 6-мерный вектор, определяющий положение и ориентацию схвата как твердого тела. Предположим, что требуемая траектория схвата (вопрос о способе ее получения не рассматривается) описывается уравнением

$$s = s^*(t). \quad (4.35)$$

Тогда, решая обратную позиционную задачу (см. § 2.3), получаем программную траекторию в пространстве обобщенных координат:

$$q^*(t) = f^{-1}(s^*(t)). \quad (4.36)$$

Несмотря на обескураживающую простоту, этот подход позволяет реализовать весьма эффективный метод управления манипулятором, свободный от необходимости учитывать различного рода вырожденные конфигурации манипулятора. Ясно, однако, что он пригоден лишь в тех редких случаях, когда обратная задача по положению решается аналитически (например, для манипуляторов PUMA и PM-01).

Для решения уравнения (4.36) требуется много времени (напомним, что в задачах, связанных с управлением, необходимо обеспечить режим реального времени), поэтому можно поступить следующим образом. Пусть векторы $s_k = s^*(t_k)$, $k = 1, 2, \dots, K$, задают множество положений схвата $\{s_k\}$, характеризующих программную траекторию

(4.35); $q_k = q^*(t_k)$ — множество решений обратной задачи (4.36). Тогда, используя описанный выше метод сплайн-функций в пространстве обобщенных координат, получаем траекторию $q(t)$, обеспечивающую совпадение положений схвата с программным движением в узлах t_k . Ясно, что отличие заданного положения схвата $s^*(t)$ от получившегося в результате использования этого подхода $s(t) = f(q(t))$ будет непосредственно зависеть от разбиения программной траектории $\{s_k\}$. Заметим, что решение обратной задачи о положении (4.36) в узлах t_k и построение сплайн-функции $q(t)$ осуществляются на этапе планирования, в режиме off-line, т.е. когда время вычислений не является критическим.

4.2.2. Формирование программной траектории

Пусть T_0 и T_f — матрицы положения схвата в начальной и конечной точках (рис. 4.6):

$$T_0 = \begin{pmatrix} R_0 & p_0 \\ 000 & 1 \end{pmatrix}, \quad T_f = \begin{pmatrix} R_f & p_f \\ 000 & 1 \end{pmatrix}, \quad (4.37)$$

где матрицы R_0 , R_f и векторы p_0 , p_f , как и прежде, задают ориентацию и координаты схвата соответственно. Допустим, кроме того, что задано время τ перемещения схвата из начальной точки в конечную.

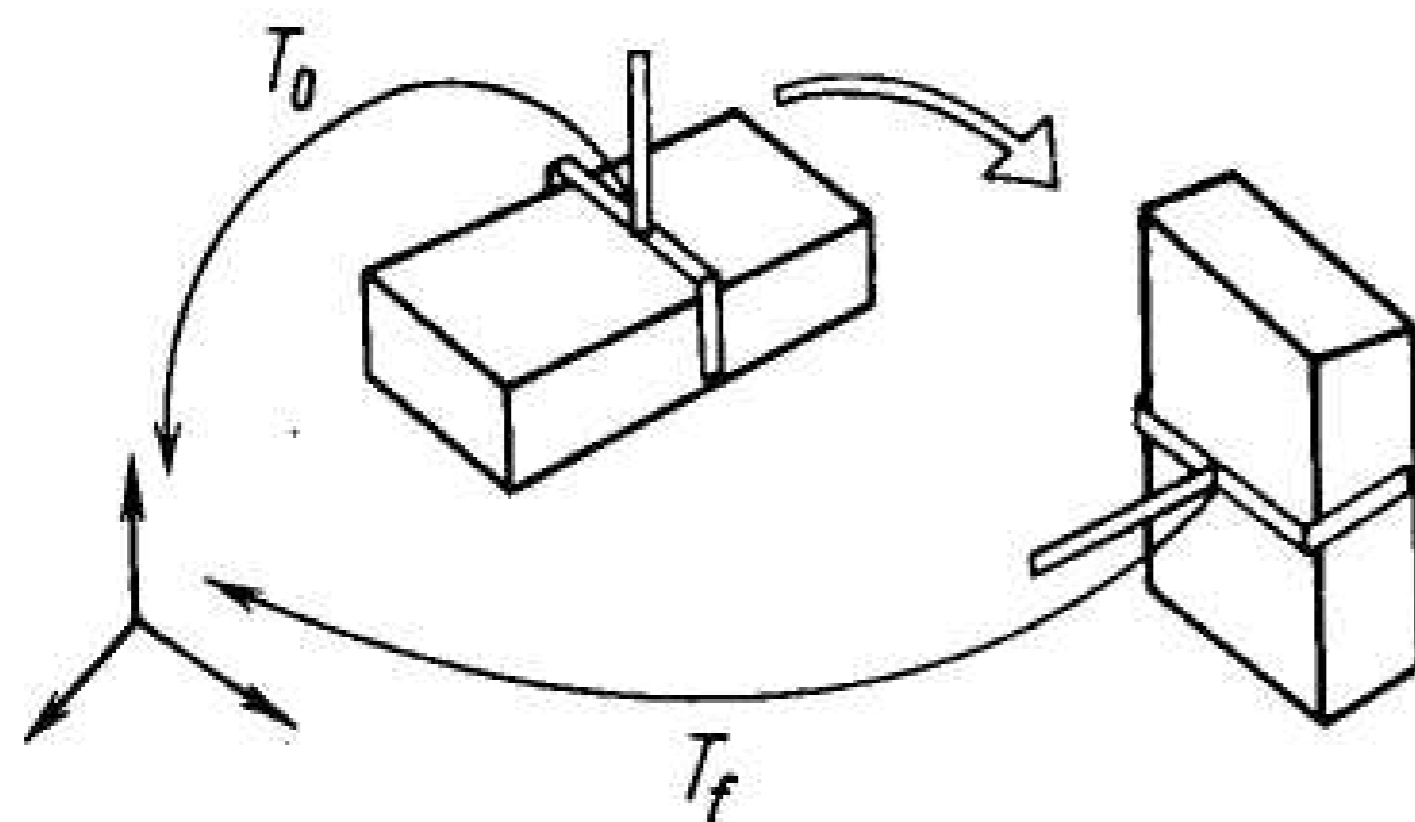


Рис. 4.6. Положение схвата в начальной и конечной точках рабочего пространства

Задача состоит в построении непрерывной траектории схвата в форме $T = T(t)$, удовлетворяющей некоторым требованиям (например, обеспечение режима разгон — торможение):

$$T(t) = T_0 A(n, \delta(t), p(t)), \quad (4.38)$$

где A — матрица 4×4 , зависящая от следующих параметров: n — вектор 3×1 , вокруг которого осуществляется поворот схвата, совмещающий R_0 и R_f ; $\delta(t)$ — угол поворота, $p(t)$ — вектор 3×1 переноса.

Таким образом, нахождение $T(t)$ в форме (4.38) означает, что используется теорема Шаля (см. п. 1.2.4).

Используя соотношение (4.38), видим, что

$$A(t) = T(t)T_0^{-1}, \quad (4.39)$$

т.е. матрица A имеет ту же структуру, что и матрица T , т.е.

$$A(t) = \begin{pmatrix} R(t) & p(t) \\ 000 & 1 \end{pmatrix}.$$

Поскольку в начальный и конечный моменты времени матрица $T(t)$ должна совпадать с T_0 и T_f :

$$\begin{aligned} T(t_0) &= T_0, \\ T(t_0 + \tau) &= T_f, \end{aligned} \quad (4.40)$$

то, согласно (4.40), получаем для A следующие условия на правом и левом концах траектории:

$$\begin{aligned} A(t_0) &= E, \\ A(t_0 + \tau) &= T_0 T_f^{-1}, \end{aligned} \quad (4.41)$$

т.е.

$$R(t_0) = E, \quad R(t_0 + \tau) = R_0 R_f, \quad (4.42)$$

$$p(t_0) = 0, \quad p(t_0 + \tau) = R_0^T (r_f - r_0). \quad (4.43)$$

Теперь, воспользовавшись соотношениями (1.17), (1.18), найдем вектор n , вокруг которого осуществляется поворот, и угол поворота $\delta(t_0 + \tau)$:

$$\cos \delta(t_0 + \tau) = 1/2 (T_f R - 1), \quad (4.44)$$

$$n = 1/2 \sin \delta (r_{32} - r_{23}, r_{13} - r_{31}, r_{21} - r_{12})^T, \quad (4.45)$$

где r_{ij} — элементы матрицы $R(t_0 + \tau)$. Окончательно матрица поворота $R(t)$ ищется следующим образом:

$$R(t) = \cos \delta(t) E + (1 - \cos \delta(t)) n n^T + \sin \delta(t) \Omega_n, \dots, \quad (4.46)$$

матрица Ω_n задается соотношением (3.63).

Функцию $\rho(t)$ и входящую в (4.46) функцию $\delta(t)$ выбирают, например, исходя из условия обеспечения режима разгон — торможение (рис. 4.7, а, б). Ясно, что эти функции должны удовлетворять крайним условиям (4.43), (4.44).

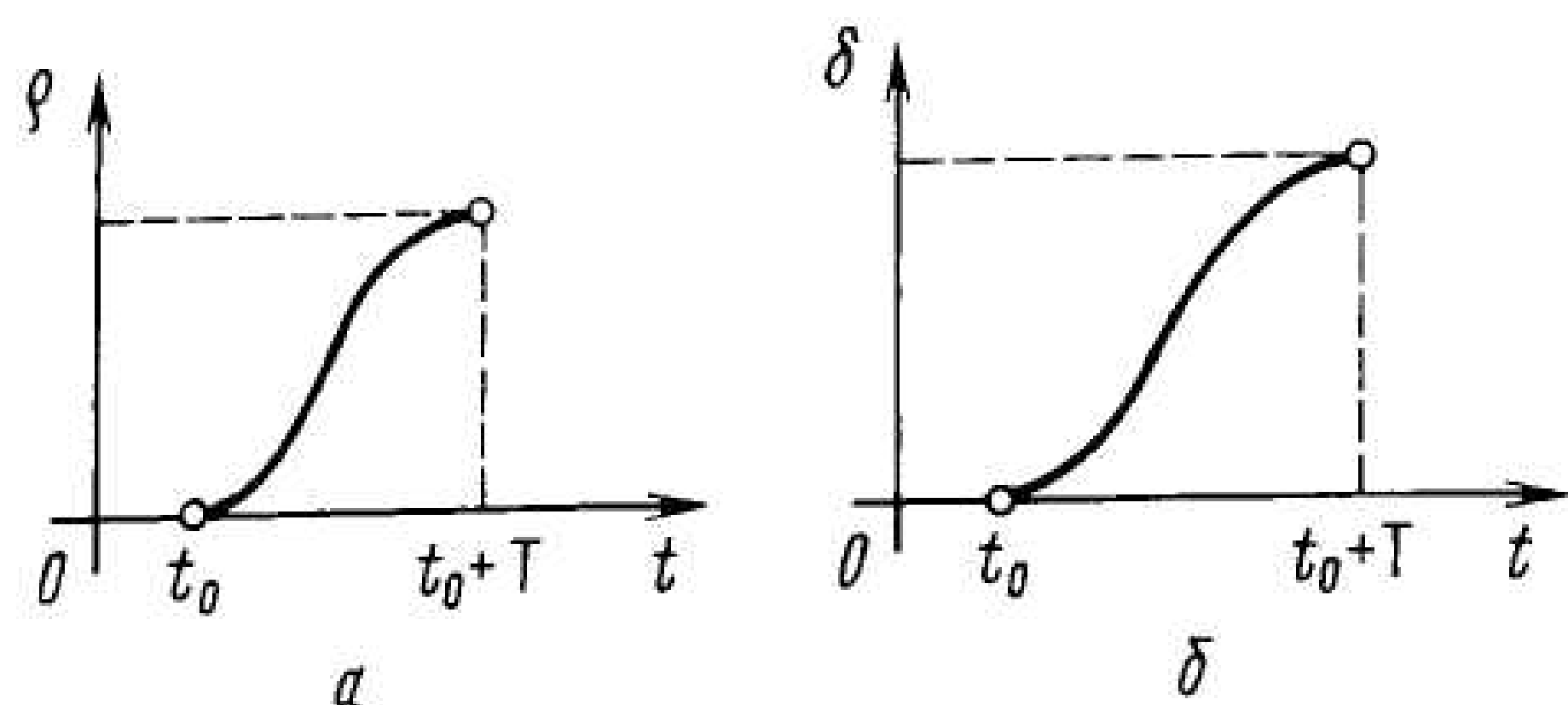


Рис. 4.7. Функции перемещения (а) и угла поворота (б), обеспечивающие режим разгон — торможение в декартовом пространстве

Таким образом, соотношения (4.42)–(4.46) позволяют построить программную траекторию схвата в декартовом пространстве в форме $T = T(t)$, обладающую требуемыми свойствами. Для того чтобы обеспечить движение схвата вдоль этой траектории, можно воспользоваться методами, описанными в § 4.2, либо методом, который будет рассмотрен в следующем пункте.

4.2.3. Линеаризованный позиционный алгоритм управления

Рассмотрим алгоритм управления по положению, в котором не решается обратная позиционная задача. Этот алгоритм основан на том, что целевое положение схвата (рассчитанное программное движение) и его текущее положение различаются несущественно.

Пусть имеется соотношение, связывающее вектор обобщенных координат q с целевым положением свата s^* :

$$s^* = f(q). \quad (4.47)$$

Используя для решения (4.47) метод Ньютона (см. п. 2.3.3.), получаем следующее рекуррентное соотношение для нахождения $q = q^*$:

$$\Delta q_{k+1} = J^{-1}(q_k) \Delta s_k, \quad (4.48)$$

$$\Delta q_{k+1} = q_{k+1} - q_k, \quad (4.49)$$

$$\Delta s_k = (\Delta \varphi_k, \Delta p_k) = (\omega_k \Delta t, v_k \Delta t), \quad (4.50)$$

т.е. Δs_k — это вектор, отражающий несовпадение положения схвата в k -й итерации с программным s^* , которое может быть ликвидировано за время Δt путем поворота схвата с угловой скоростью ω_k и переноса с линейной скоростью v_k (напомним, что s_k и s различаются незначительно).

Уточним теперь компоненты вектора Δs_k , входящие в (4.50). Воспользуемся для этого результатом, полученным в п. 3.3.2. Тогда имеем

$$\Delta p_k = p^* - p_k. \quad (4.51)$$

$$\Delta \varphi_k = 1/2(x_k \times x^* + y_k \times y^* + z_k \times z^*), \quad (4.52)$$

где, как и ранее, векторы x^* , y^* , z^* — это столбцы матрицы положения, задающие ориентацию.

Пусть теперь целевое положение схвата описывается матрицей

$$T = T^*(t) = \begin{pmatrix} x^*(t) & y^*(t) & z^*(t) & p^*(t) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.53)$$

Если предположить, что итерационный процесс (4.48) сходится за одну итерацию, то можно рассматривать соотношения (4.48)–(4.53) как схему слежения схвата манипулятора за задаваемым программным движением (4.53). Соответствующая схема алгоритма приведена на рис. 4.8.

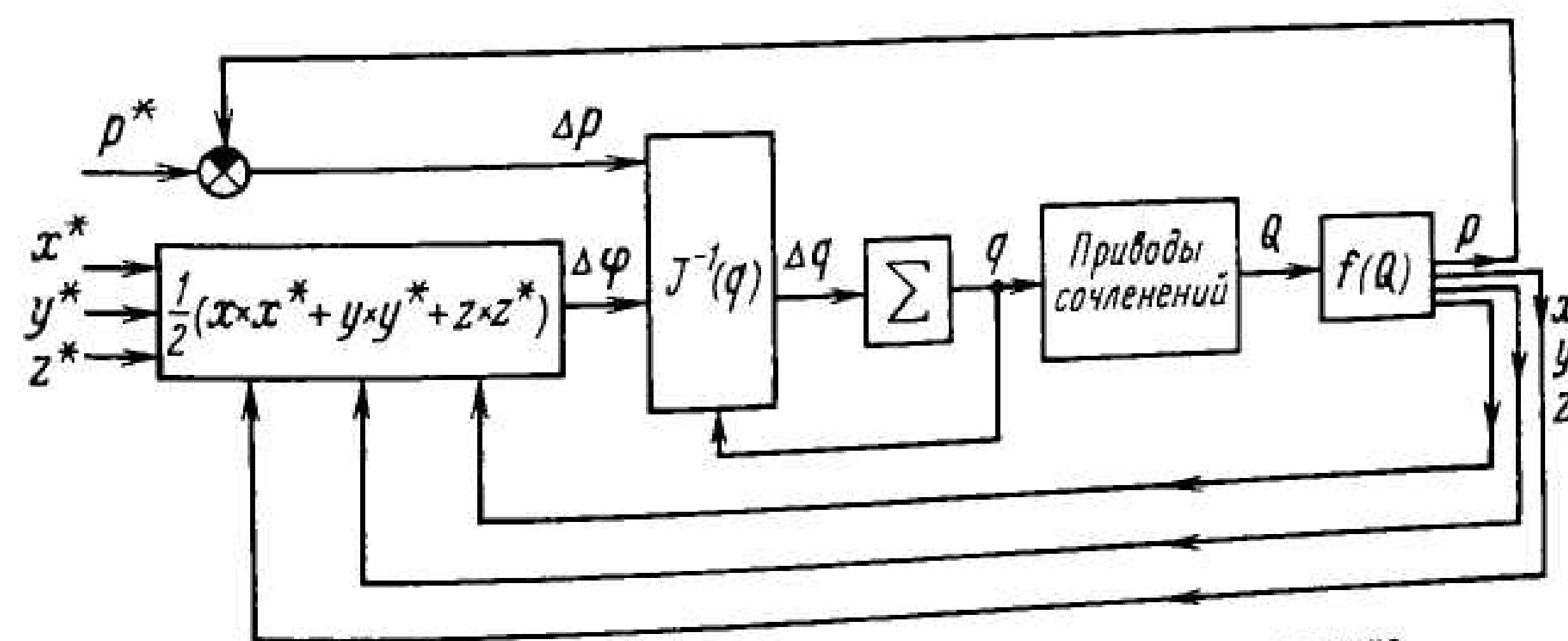


Рис. 4.8. Схема линеаризованного алгоритма управления по положению

Сделаем несколько замечаний, относящихся к реализации этого алгоритма. Если привод замкнут по положению через систему управления робота (а так чаще всего и бывает), то целесообразно обратную

связь по положению разомкнуть и исключить операцию суммирования векторов Δq , поскольку эти компоненты пропорциональны скорости изменения обобщенных координат. Такая схема позволяет обеспечить более высокое качество отработки схватом манипулятора программной траектории.

Еще одно замечание состоит в следующем. На приведенной схеме (см. рис. 4.8) поиск текущего положения схвата s , описываемого векторами x, y, z, p , осуществляется с использованием показаний датчиков сочленений Q , а не вычисленных углов q . Это также может повысить качество слежения за программной траекторией $s^*(t)$, заданной векторами $x^*(t), y^*(t), z^*(t), p^*(t)$. Планирование программной траектории можно осуществлять с использованием подхода, описанного в предыдущем параграфе.

4.2.4. Управление по вектору скорости и по вектору ускорения

Пусть, как и раньше,

$$\dot{s} = \begin{pmatrix} \omega \\ v \end{pmatrix} \quad (4.54)$$

представляет собой 6-мерный вектор обобщенной скорости схвата, включающий векторы угловой и линейной скорости ω и v соответственно. Тогда под управлением по вектору скорости понимают такой способ управления, при котором совпадают (или близки) командный вектор скорости

$$\dot{s}^*(t) = \begin{pmatrix} \omega^*(t) \\ v^*(t) \end{pmatrix} \quad (4.55)$$

и скорость схвата $\dot{s}(t)$.

Этот метод управления особенно часто используют при управлении манипулятора от рукоятки. Рукоятка представляет собой многосвязный механизм; в его степенях подвижности установлены потенциометры, выходные сигналы с которых линейно зависят от перемещений в соответствующих шарнирах. (Заметим, что рукоятка в некотором смысле подобна манипулятору.) Сигналы, поступающие от рукоятки, интерпретируются системой управления робота как компоненты командного вектора скорости. Ясно, что при этом рукоятка должна иметь шесть степеней подвижности (именно такова размерность вектора s).

В действительности число степеней подвижности рукоятки часто бывает меньше шести и тогда приходится указывать системе управления способ интерпретации сигналов, используя дополнительные средства, например кнопки, установленные на рукоятке.

Итак, пусть $\dot{s}^*(t)$ — заданный соотношением (4.55) вектор командной скорости схвата. Воспользовавшись соотношением (3.200), получим

$$\dot{q}^*(t) = J^{-1} \dot{s}^*(t), \quad (4.56)$$

где $\dot{q}^*(t)$ — вектор командных скоростей сочленений (угловых или линейных — в зависимости от типа шарнира).

Соотношение (4.56) и определяет закон управления манипулятором. Соответствующая схема управления представлена на рис. 4.9. В тех случаях, когда приводы подвижных сочленений не имеют обратных связей по положению, тогда интегрирование командного вектора \dot{q}^* становится излишним. Строго говоря, элементы обратной матрицы Якоби J^{-1} зависят от программного движения $\dot{q}^*(t)$, однако мы достигаем более эффективного управления звеньями механизма, если воспользуемся для ее вычисления показаниями датчиков в подвижных сочленениях, учитывая таким образом действительное состояние механизма, т.е. используя принцип обратной связи, являющийся фундаментальным в теории управления.

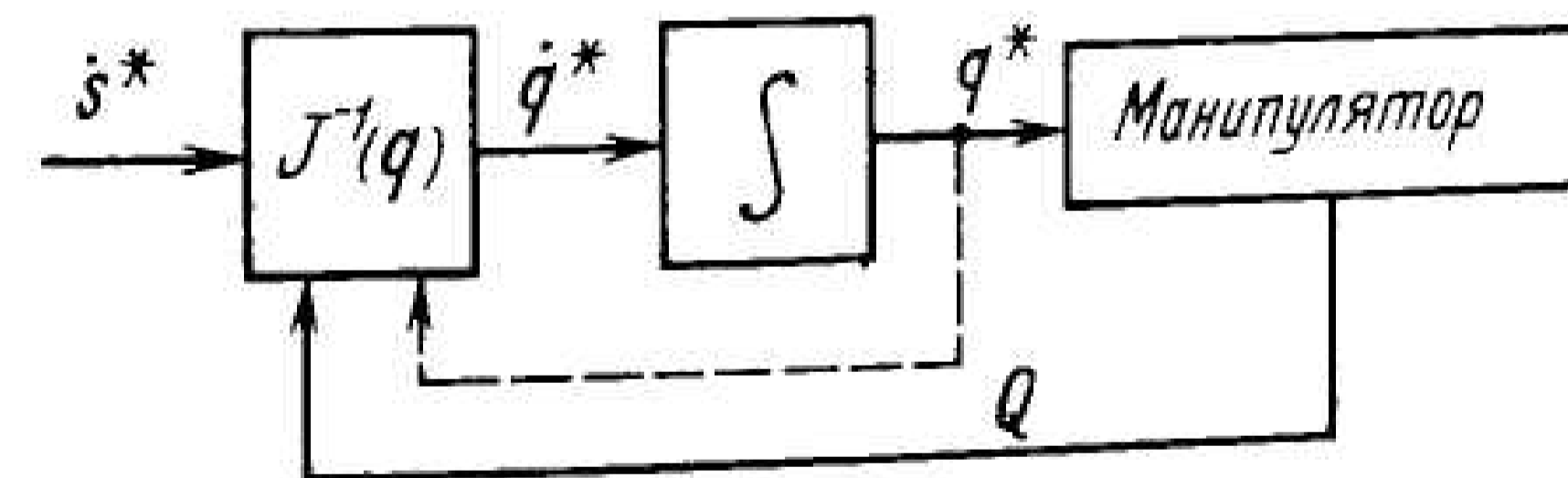


Рис. 4.9. Управление манипулятором по вектору скорости схвата

В тех случаях, когда матрица Якоби $J(q)$ не имеет обратной (т.е. она либо вырождена, либо не является квадратной), в (4.56) вместо J^{-1} следует воспользоваться псевдообратной матрицей J^+ (см. п. 3.3.4.).

Рассмотрим метод управления по ускорению. В этом случае схват манипулятора должен двигаться так, чтобы его вектор ускорения

$$\ddot{s}(t) = \begin{pmatrix} \dot{\omega}(t) \\ \dot{v}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon(t) \\ a(t) \end{pmatrix}$$

был близок к командному вектору

$$\ddot{s}^*(t) = \begin{pmatrix} \varepsilon^*(t) \\ a^*(t) \end{pmatrix}.$$

Из соотношения (3.200) дифференцированием его обеих частей получаем

$$\ddot{s} = J(q)\ddot{q} + \dot{J}(q)\dot{q},$$

откуда

$$\ddot{q} = J^{-1}(q)\ddot{s} - J^{-1}\dot{J}(q, \dot{q}). \quad (4.57)$$

Соответствующая соотношению (4.46) схема управления приведена на рис. 4.10. Заметим, что при введении в закон управления обратной связи, как было сделано в случае управления по вектору скорости, требуется измерять не только обобщенные координаты механизма Q , но и скорости \dot{Q} .

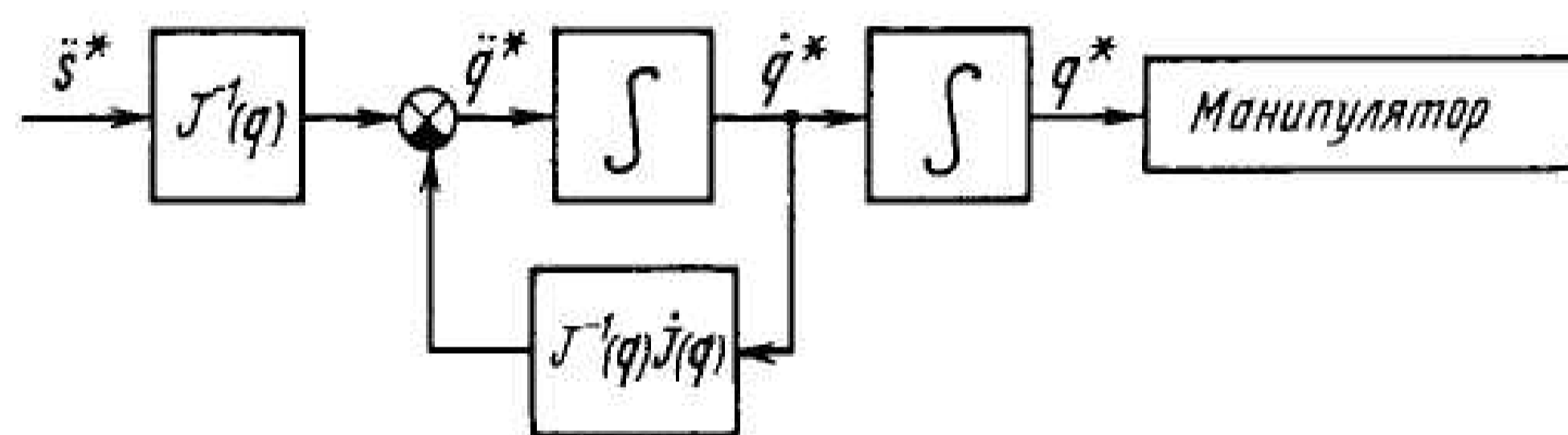


Рис. 4.10. Управление манипулятором по вектору ускорения схвата

4.2.5. Управление по вектору силы

При управлении по вектору силы требуется, чтобы схват развивал заданные силы и моменты. Как известно, понятие силы в механике вводится как результат взаимодействия тел. При формулировании задачи управления по вектору силы предполагают, что к схвату приложена некоторая внешняя сила, а в подвижных сочленениях развиваются такие силы, которые уравнивают действие этой внешней силы, оставляя в состоянии покоя манипулятор, рассматриваемый как система твердых тел. Это замечание является чрезвычайно важным для понимания описываемого способа управления.

Итак, пусть F — обобщенная сила, приложенная к схвату (как следует из сделанного замечания, она противоположна по знаку силе, развиваемой схватом):

$$F = \begin{pmatrix} \tau \\ f \end{pmatrix},$$

где $\tau = (\tau_x, \tau_y, \tau_z)^T$ и $f = (f_x, f_y, f_z)^T$ — векторы момента и силы соответственно.

Пусть далее m_1, m_2, \dots, m_N — скалярные моменты или силы (в зависимости от типа сочленения), приложенные в подвижных сочленениях N -звенного манипулятора (рис. 4.11). Для получения соответствия между вектором F и вектором $M = (m_1, m_2, \dots, m_N)^T$ воспользуемся принципом виртуальных перемещений: в положении равновесия (!) сумма элементарных работ всех активных сил при возможных перемещениях равна нулю. Тогда имеем

$$m_1 \delta q_1 + m_2 \delta q_2 + \dots + m_N \delta q_N = \tau_x \delta \varphi_x + \tau_y \delta \varphi_y + \tau_z \delta \varphi_z + f_x \delta x + f_y \delta y + f_z \delta z,$$

где $\delta q = (\delta q_1, \delta q_2, \dots, \delta q_N)^T$ — вектор виртуального перемещения в степенях подвижности манипулятора, $\delta s = (\delta \varphi_x, \delta \varphi_y, \delta \varphi_z, \delta x, \delta y, \delta z)^T$ — вектор виртуального дифференциального перемещения схвата как твердого тела.

Из последнего равенства следует, что

$$M^T \delta q = F^T \delta s.$$

Поскольку

$$\delta s = J(q) \delta q,$$

то

$$M^T \delta q = F^T J(q) \delta q. \quad (4.58)$$

В соотношении (4.58) δq — произвольный вектор, следовательно, имеем

$$M^T = F^T J(q)$$

или

$$M = J^T(q) F. \quad (4.59)$$

Соотношение (4.59) и является решением задачи.

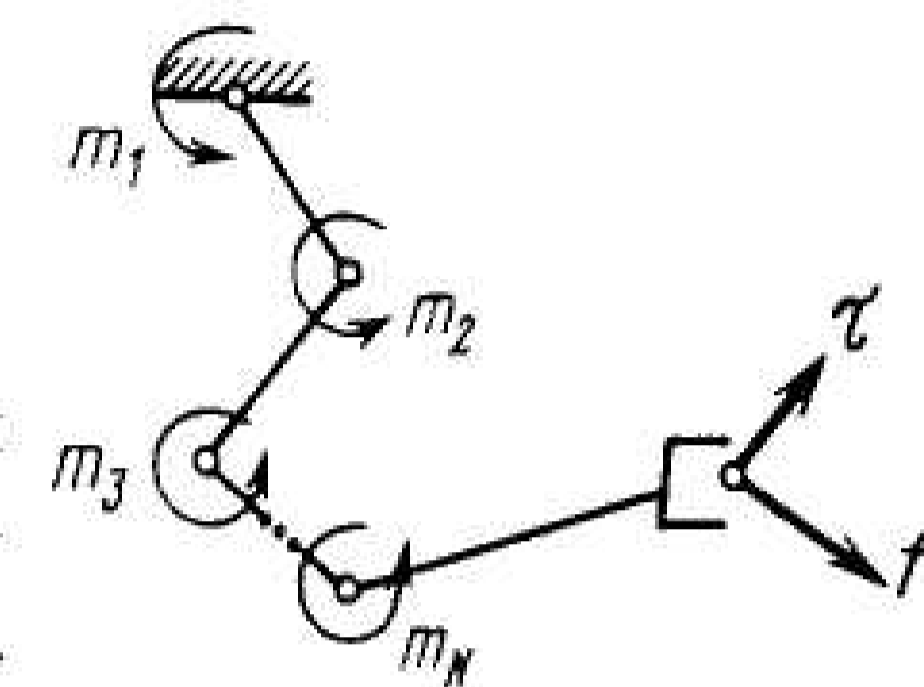


Рис. 4.11. Схема приложения к манипулятору активных моментов и сил

Рассмотрим в качестве примера операцию, выполняемую двухзвенным манипулятором с шарнирами вращательного типа. Манипулятор должен открыть люк диаметром l , имеющий вращательный шарнир A и опирающийся на подставку B (рис. 4.12). Требуется определить моменты $m_1(t)$ и $m_2(t)$, в сочленениях манипулятора, обеспечивающие, с одной стороны, заданное движение люка $\varphi = \varphi^*(t)$, а с другой — не приводящие к поломке шарнира (т.е. сила реакции в шарнире не должна превышать некоторого критического значения).

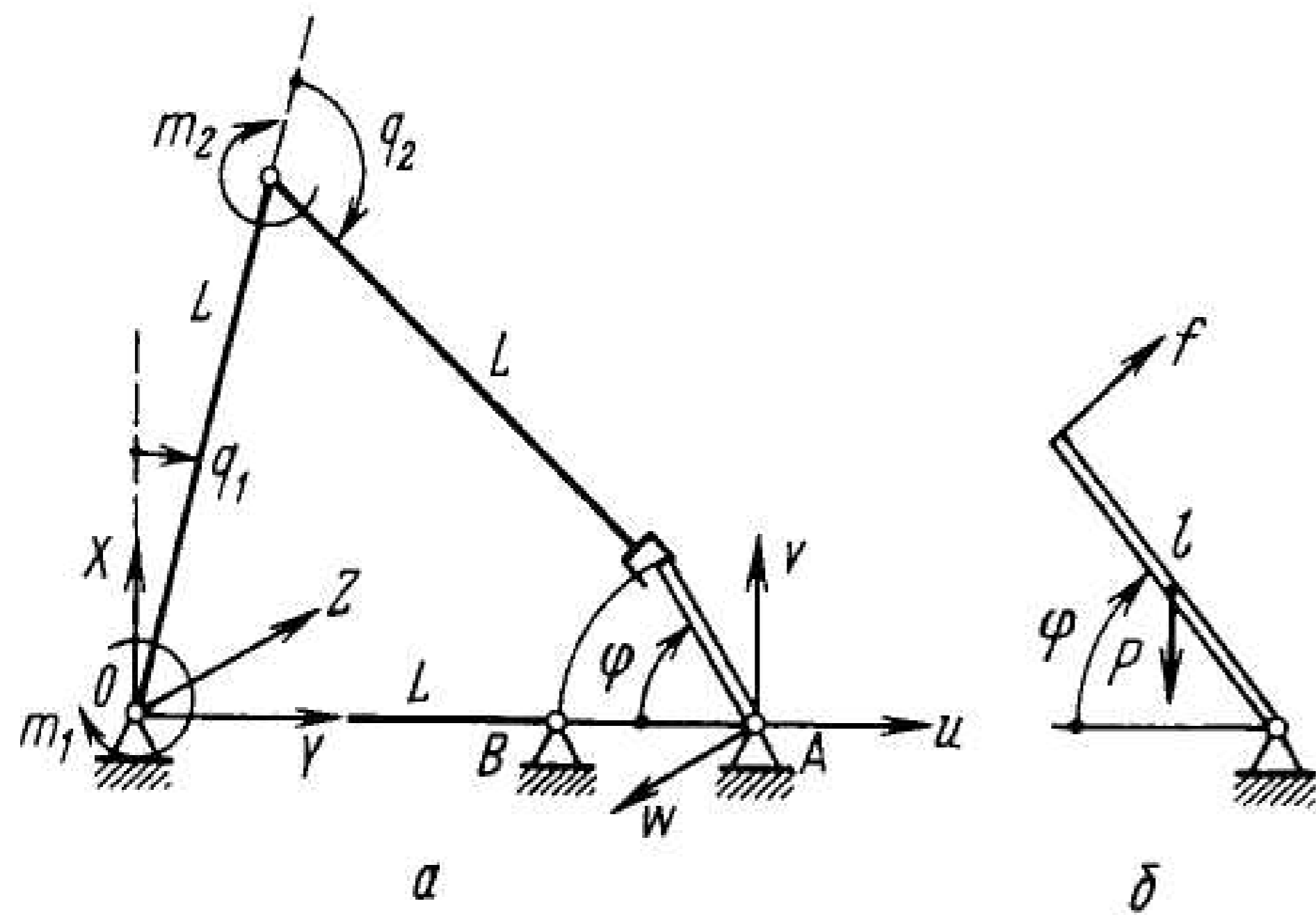


Рис. 4.12. Двухзвенный манипулятор, поворачивающий крышку люка

Несмотря на простоту постановки, эта задача не является тривиальной и требует для своего решения привлечения весьма тонких методов динамического управления, которые будут рассмотрены далее. Оставаясь в рамках изучаемого метода, сформулируем следующую задачу. Какие минимальные моменты m_1 и m_2 необходимо развить, чтобы находясь в горизонтальном положении люк не оказывал давления на опору в точке B ?

Из элементарных соображений получаем, что сила, развиваемая схватом, равна

$$F = (P/2, 0),$$

где P — вес люка, при этом углы в сочленениях

$$q_1 = \frac{\pi}{6}, \quad q_2 = \frac{2\pi}{3}.$$

Матрица Якоби для рассматриваемого манипулятора имеет вид

$$J(q) = L \begin{pmatrix} -(s_1 + s_{12}) & -s_{12} \\ c_1 + c_{12} & c_{12} \end{pmatrix}$$

и, следовательно,

$$J\left(\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}\right) = L \begin{pmatrix} -1 & -1/2 \\ 0 & -\sqrt{3}/2 \end{pmatrix}.$$

Тогда, используя соотношение (4.59), окончательно имеем выражение для искомых моментов в сочленениях

$$\begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix} = L \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1/2 & -\sqrt{3}/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P/2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} PL/2 \\ -PL/4 \end{pmatrix},$$

что и является решением поставленной задачи.

Контрольные вопросы и задания

1. Что такое кинематическое управление манипулятором? Что является моделью манипулятора как объекта управления?
2. Как выглядит алгоритм управления манипулятором при использовании специальной параметризации? Нарисуйте блок-схему алгоритма.
3. Исследуйте систему уравнений относительно неизвестных коэффициентов, получающуюся при использовании полиномиальной параметризации с полиномами 1–4-й степеней.
4. Нарисуйте блок-схему алгоритма управления при использовании сплайн-интерполяции.
5. Напишите программу моделирования движения двухзвенного плоского манипулятора, управляемого по положению. В качестве метода управления используйте линеаризованный позиционный алгоритм. Задайте программную траекторию, например в форме окружности.
6. Какой вид имеет траектория при использовании метода, описанного в п. 4.2.2?
7. Как Вы думаете, может ли при управлении по вектору скорости возникнуть такая ситуация, когда решение обратной задачи по скорости в вырожденной конфигурации не выводит манипулятор из этого положения (например, $q = c = \text{const}$ соответствует вырожденной конфигурации, а одно из решений обратной задачи имеет вид $q = 0$)? Как можно модифицировать алгоритм управления, чтобы избежать этот эффект?
8. Решите задачу, аналогичную приведенной в п. 4.2.5, для плоского двухзвенного манипулятора, имеющего два телескопических сочленения с перпендикулярными осями.

манипуляционного механизма под действием приложенных к нему сил и моментов. Этому вопросу посвящены § 5.1, 5.2. Представленные в них соотношения позволяют перейти к уравнениям движения как к уравнениям кинестатики в последующих параграфах настоящей главы.

5. УРАВНЕНИЯ КИНЕСТАТИКИ МАНИПУЛЯТОРА

Итак, мы рассмотрели только такие способы управления, при которых учитываются кинематические соотношения, связывающие звенья манипулятора, — их координаты, скорости и ускорения. Фактическое движение манипулятора как системы взаимосвязанных твердых тел, конечно, будет отличаться от кинематической модели. Иногда это отличие несущественно, и кинематические способы управления вполне эффективны. В других случаях, наоборот, влияние динамических факторов обуславливает применение специальных способов управления.

Таким образом, перед нами возникают следующие проблемы. В первую очередь, математическое составление уравнений движений манипулятора как системы материальных тел. Затем их анализ с учетом динамики привода и определение эффективности кинематических способов управления и степени влияния динамических факторов. И, наконец, возможность применения специальных способов управления, учитывающих эти факторы, которые и называют динамическими способами управления.

Переходя к решению первой из этих проблем, отметим, что к настоящему времени в робототехнике применяют практически все известные способы описания динамики движения твердых тел. Они различаются условиями применения, характером и сложностью вычислительных алгоритмов. Выбор того или иного способа определяется условиями задачи, а также эрудицией, опытом и искусством пользователя. Поэтому в гл. 5 будет представлено несколько наиболее распространенных на практике способов описания динамики манипулятора.

Прежде чем переходить к анализу динамики манипуляторов, необходимо рассмотреть уравнения статики, т.е. уравнения равновесия ма-

5.1. Статика манипуляционных механизмов

5.1.1. Уравнение равновесия относительно основания манипулятора

Напомним, что уравнения статики — это уравнения равновесия механизма под действием приложенных сил. На манипулятор (разомкнутую кинематическую цепь) в статике действуют следующие силы: силы тяжести звеньев G_i , $i = 1, 2, \dots, N$, силы P_i и моменты Q_i , развиваемые двигателями в осях кинематических пар; силы R_0 и моменты M_R реакции опоры, а также внешние силы F_{vi} и моменты M_{vi} , обусловленные воздействиями со стороны внешней среды. Условимся, что все внешние силы и моменты, действующие на i -е звено, приведены к главному вектору внешних сил F_{vi} , приложенному в его центре масс C_i , и главному моменту внешних сил M_{vi} . Кинематические связи считаем идеальными.

В статике все силы и моменты, развиваемые приводами, уравновешиваются соответствующими силами и моментами реакций со стороны удерживаемых ими фрагментов кинематической цепи, и их не включают в уравнения статики за исключением первого привода, установленного на опоре.

Рассмотрим вначале случай, когда первая кинематическая пара поступательная (рис. 5.1). Очевидно, что сила реакции опоры состоит из двух составляющих: силы, обусловленной действием внешних сил F_{vi} , $i = 1, 2, \dots, N$, и силы, равной движущей силе первого привода P_1 , направленной вдоль оси

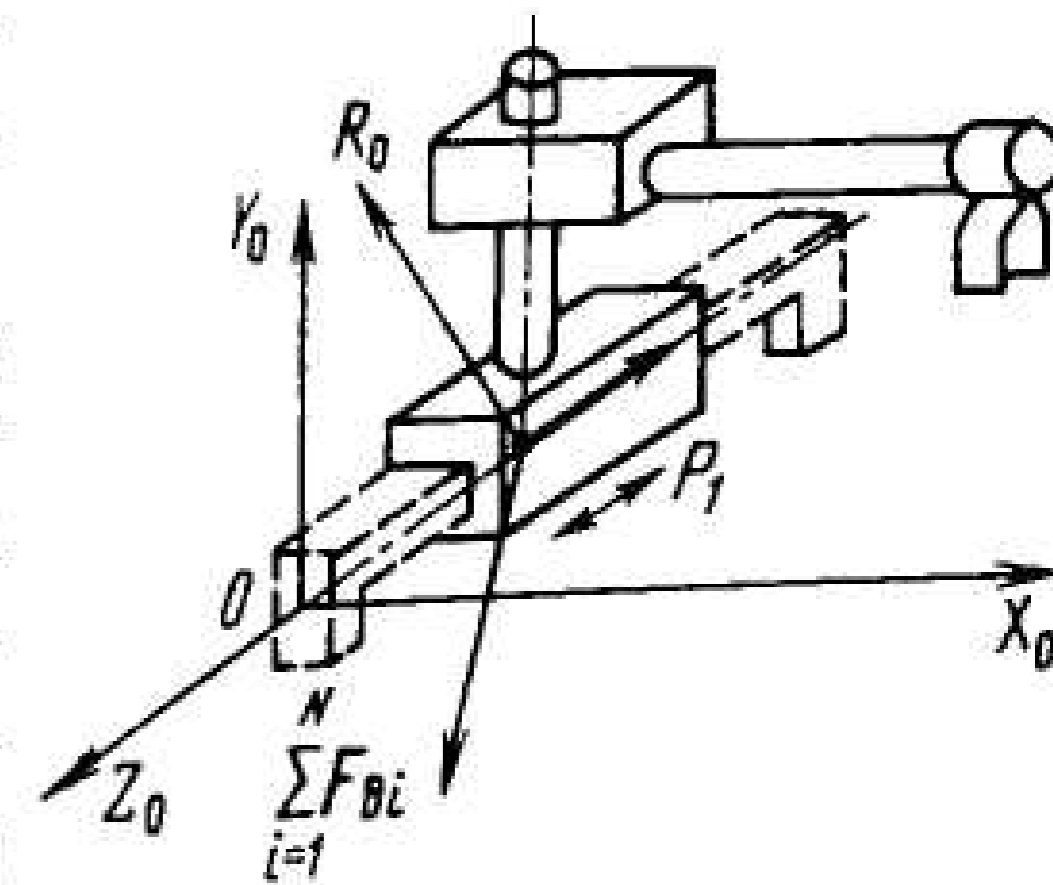


Рис. 5.1. Манипулятор с первой поступательной кинематической парой

пары. Заменяя опору соответствующей силой R_o , запишем следующее уравнение:

$$\sum_{i=1}^N F_{vi} + R_o + P_1 = 0. \quad (5.1)$$

Если первая пара вращательная, то это уравнение определяет условие равновесия внешних сил и силы реакции:

$$\sum_{i=1}^N F_{vi} + R_o = 0. \quad (5.2)$$

Поскольку соединение является *идеальным* и силы трения отсутствуют, то реакция R_o ортогональна к оси пары. Поэтому значение силы, развиваемой двигателем первой пары, можно найти, проецируя уравнение (5.1) на направление ее оси. Если неподвижная система координат $OX_0Y_0Z_0$ выбрана таким образом, что ось OZ_0 коллинеарна оси первой кинематической пары, то уравнение (5.1) необходимо проецировать на направление, заданное единичным вектором-ортом z_0 этой оси. Получим скалярное уравнение

$$z_0^T \sum_{i=1}^N F_{vi} + \mu_1 = 0, \quad (5.3)$$

где $\mu_1 = z_0^T P_1$ — сила, развиваемая приводом первой поступательной пары и удерживающая манипулятор в равновесии под действием внешних сил.

Аналогично найдем и уравнение равновесия для моментов. Поскольку в рассматриваемом случае первый двигатель не создает момента, уравнение равновесия между моментами внешних сил M_{vi} , $i=1, 2, \dots, N$, и моментом реакции опоры M_R имеет вид

$$\sum_{i=1}^N (M_{vi} + \rho_{oi} \times F_{vi}) + M_R = 0,$$

где ρ_{oi} — радиус-вектор центра масс C_i i -го звена относительно центра O неподвижной системы координат, связанной с опорой манипулятора.

Используя принятые ранее обозначения

$$\rho_{oi} = \sum_{k=1}^i l_k + r_{oi},$$

$$\rho_{oi} \times F_{vi} = \lambda(\rho_{oi}) F_{vi},$$

запишем последнее уравнение в виде

$$\sum_{i=1}^N (M_{vi} + \lambda(\rho_{oi}) F_{vi}) + M_R = 0. \quad (5.4)$$

Рассмотрим манипулятор, первая кинематическая пара которого вращательная (рис. 5.2). При этом уравнение равновесия для сил будет определяться соотношением (5.2), а в уравнение моментов войдет момент Q_1 , развиваемый приводом первой кинематической пары. Следовательно, уравнение (5.4) будет иметь вид

$$\sum_{i=1}^N (M_{vi} + \lambda(\rho_{oi}) F_{vi}) + M_R + Q_1 = 0. \quad (5.5)$$

Проецируя последнее уравнение на ось этой кинематической пары, получаем скалярное уравнение, которое определяет значение момента μ_1 привода, удерживающего манипулятор в равновесии под действием внешних сил:

$$z_0^T \sum_{i=1}^N (M_{vi} + \lambda(\rho_{oi}) F_{vi}) + \mu_1 = 0, \quad (5.6)$$

где $\mu_1 = z_0^T Q_1$.

Для того чтобы оправдать использование одной и той же переменной μ_1 для обозначения силы или момента, развиваемых приводом, в зависимости от его типа, условимся, что

$$\mu_1 = z_0^T Q_1 \sigma_1 + z_0^T P_1 (1 - \sigma_1), \quad (5.7)$$

где постоянная $\sigma_1 = 1$, если первая пара вращательная, и $\sigma_1 = 0$, если эта пара поступательная.

Используя последнее обозначение, можно объединить уравнения (5.3) и (5.6) в одно скалярное уравнение, определяющее движущие силу или момент привода из условий статического равновесия [33]:

$$z_0^T \left[(1 - \sigma_1) \sum_{i=1}^N F_{vi} + \sigma_1 \sum_{i=1}^N (M_{vi} + \lambda(\rho_{oi}) F_{vi}) \right] + \mu_1 = 0. \quad (5.8)$$

Такая форма записи удобна для получения обобщенных уравнений равновесия.

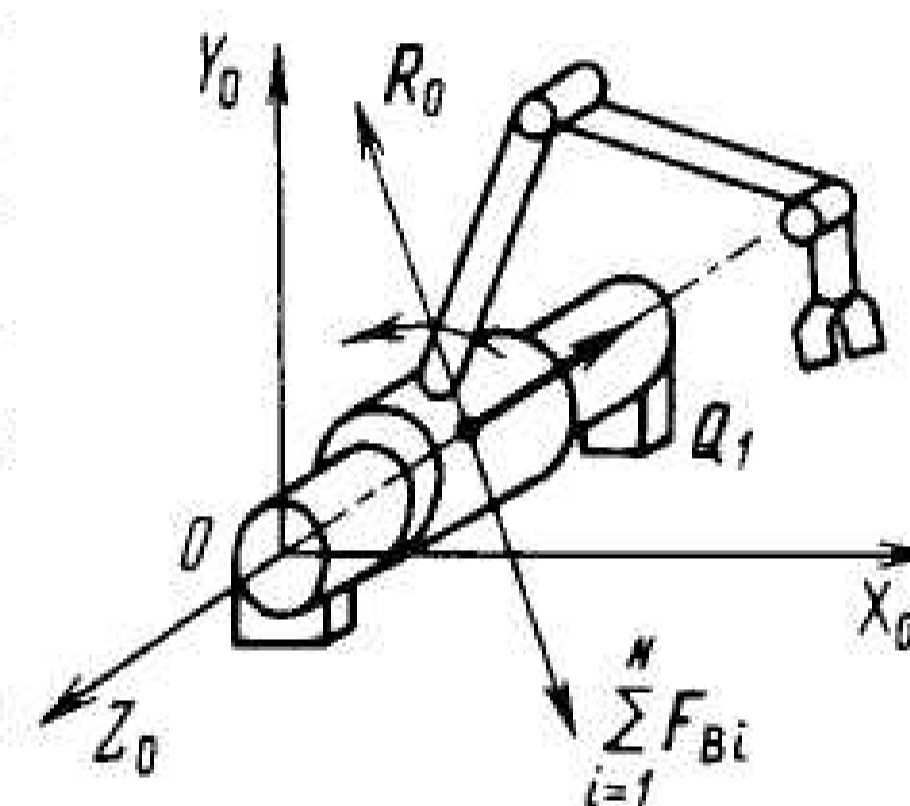


Рис. 5.2. Манипулятор с первой вращательной кинематической парой

5.1.2. Обобщенные условия равновесия (обратная рекурсия)

Рассмотрим часть кинематической цепи манипулятора, начиная с i -го звена и вплоть до N -го (схвата). Отброшенную же часть заменим силой F_{Ri} и моментом реакции M_{Ri} . В частности, проекция этой реакции на ось кинематической пары, образованной i -м и $(i-1)$ -м звеньями, определяется уравнением, аналогичным (5.8):

$$z_{i-1}^T \left[(1 - \sigma_i) \sum_{j=i}^N F_{Bj} + \sigma_i \sum_{j=i}^N (M_{Bj} + \lambda(\rho_{i-1j}) F_{Bj}) \right] + \mu_i = 0, \quad (5.9)$$

где z_{i-1} — орт оси $O_{i-1}Z_{i-1}$ системы координат, связанной с $(i-1)$ -м звеном;

$$\rho_{i-1j} = \sum_{k=i}^j l_k + r_{cj} \quad (5.10)$$

радиус-вектор центра масс j -го звена относительно центра $(i-1)$ -й системы координат;

$$\mu_i = \sigma_i z_{i-1}^T Q_i + (1 - \sigma_i) z_{i-1}^T P_i \quad (5.11)$$

вектор сил или моментов, развиваемых двигателем, установленным в рассматриваемом соединении (с учетом типа кинематической пары, задаваемого параметром σ_i).

Совокупность всех уравнений (5.9) при изменении индекса i от $i=1$ до $i=N$ образует систему N уравнений статики, описывающих состояние равновесия манипулятора под действием внешних F_{Bi} , M_{Bi} и внутренних сил и моментов μ_i . В частности, для наиболее часто встречающегося случая, когда манипулятор имеет только вращательные степени подвижности, т.е. $\sigma_i = 1$, $i=1, 2, \dots, N$, преобразуем (5.9) в систему уравнений, определяющую моменты приводов μ_i в соответствии с условием статического равновесия

$$z_{i-1}^T \left[\sum_{j=i}^N M_{Bj} + \lambda(\rho_{i-1j}) F_{Bj} \right] + \mu_i = 0, \quad i=1, 2, \dots, N. \quad (5.12)$$

На практике расчет сил и моментов целесообразно проводить последовательно от схвата манипулятора к опорному звену (обратная рекурсия) [45]. При этом предполагается, что задача о положении звеньев уже решена и, следовательно, вычислены орты z_i ,

$i=1, 2, \dots, N$, и радиус-векторы ρ_{i-1j} , $i, j=1, 2, \dots, N$, всех характерных точек звеньев.

Тогда в проекциях на ось кинематической пары, образованной N -м и $(N-1)$ -м звеньями, получим следующее условие равновесия:

$$-z_{N-1}^T \left[(1 - \sigma_N) F_{B,N} + \sigma_N (M_{B,N} + \lambda(\rho_{N-1,N}) F_{B,N}) \right] = \mu_N,$$

где

$$z_{N-1} = \prod_{j=1}^{N-1} R_{z\alpha_j} z_N^{(N)} = R_{N-2} v_{N-1}; \quad R_M = \prod_{j=1}^{M-1} R_{z\alpha_j};$$

$$v_{N-1} = (0 \sin \alpha_{N-1} \cos \alpha_{N-1})^T.$$

Теперь равенство (5.9) можно записать для $i=N-1$ следующим образом:

$$-z_{N-2}^T \left[(1 - \sigma_{N-1}) F_{B,N-1} + (1 - \sigma_{N-1}) F_{B,N} + \sigma_{N-1} (M_{B,N-1} + \lambda(\rho_{N-2,N-1}) F_{B,N-1} + \sigma_{N-1} (M_{B,N} + \lambda(\rho_{N-2,N}) F_{B,N}) \right] = \mu_{N-1}.$$

Если кинематические пары манипулятора одного и того же типа, то это соотношение приобретает рекурсивный характер. Так, если пары поступательные ($\sigma_{N-1} = 0$), то

$$-(z_{N-2}^T F_{B,N-1} + z_{N-2}^T F_{B,N}) = \mu_{N-1}.$$

Учитывая, что

$$z_{N-2}^T F_{B,N} = z_{N-2}^T z_{N-1} z_{N-1}^T F_{B,N} = -z_{N-2}^T z_{N-1} \mu_N,$$

получаем

$$\mu_{N-1} = z_{N-2}^T (-F_{B,N-1} + z_{N-1} \mu_N).$$

Аналогично

$$\mu_{i-1} = z_{i-2}^T (-F_{B,i-1} + z_{i-1} \mu_i). \quad (5.13)$$

В том случае, когда кинематические пары вращательные и $\sigma_i = 1$, можно записать

$$\mu_N = -z_{N-1}^T (M_{B,N} + \lambda(\rho_{N-1,N}) F_{B,N}),$$

$$\mu_{N-1} = -z_{N-2}^T (M_{B,N-1} + M_{B,N} + \lambda(\rho_{N-2,N-1}) F_{B,N-1} + \lambda(\rho_{N-2,N}) F_{B,N}).$$

При этом необходимо учитывать, что

$$\rho_{N-2,N} = l_{N-1} + \rho_{N-1,N}, \quad \lambda(\rho_{N-2,N}) F_{B,N} = \lambda(\rho_{N-1,N}) F_{B,N} + \lambda(l_{N-1}) F_{B,N},$$

следовательно,

$$\mu_{N-1} = -z_{N-2}^T \left[(M_{\text{в}N-1} + \lambda(\rho_{N-2, N-1})F_{\text{в}N-1}) - z_{N-1}\mu_N + \lambda(l_{N-1})F_{\text{в}N} \right],$$

следовательно,

$$\mu_{i-1} = -z_{i-2}^T \left[(M_{\text{в}i-1} + \lambda(\rho_{i-2, i-1})F_{\text{в}i-1}) - z_{i-1}\mu_i + \lambda(l_{i-1})F_{\text{в}i} \right],$$

$$i = N, N-1, \dots, 2, 1. \quad (5.14)$$

Используя соотношения (5.13) и (5.14), можно записать и общую рекурсивную формулу для определения μ_i , когда манипулятор имеет как вращательные, так и поступательные пары.

Полученные уравнения представляют интерес прежде всего при решении задачи управления. При расчете конструкции манипулятора необходимо также учитывать силы и моменты, действующие со стороны рассмотренного участка кинематической цепи (от i -го до N -го звена) на $(i-1)$ -е звено и, в частности, на опору со стороны всего манипулятора. В последнем случае эти силы и моменты, действующие в соответствии со сделанными предположениями, в плоскости, ортогональной к оси первой кинематической пары, определены выше уравнениями (5.2) и (5.4). Обозначая силы и моменты, действующие на $(i-1)$ -е звено со стороны последующих звеньев через R_{i-1} , M_{Ri-1} , получаем уравнения, аналогичные (5.2) и (5.4):

$$\sum_{j=i}^N F_{\text{в}j} - R_{i-1} = 0, \quad (5.15)$$

$$\sum_{j=i}^N (M_{\text{в}j} + \lambda(\rho_{oj})F_{\text{в}j}) - M_{Ri-1} = 0, \quad (5.16)$$

где индекс i принимает значения от $i=1$ (уравнения реакции опоры) до $i=N$. В последнем случае будем иметь уравнения сил и моментов реакции кинематической цепи без учета последнего звена (схвата).

На практике расчет сил и моментов реакции, как и расчет движущих сил и моментов, удобно вести с помощью обратной рекурсии. В этом случае вместо соотношений (5.15), (5.16) можно записать:

$$R_{i-1} = R_i - F_{\text{в}i}, \quad (5.17)$$

$$M_{Ri-1} = M_{Ri} - (M_{\text{в}i} + \lambda(\rho_{oi})F_{\text{в}i}). \quad (5.18)$$

Полагая, что внешние силы $F_{\text{в}i}$ и моменты $M_{\text{в}i}$ известны, $R_N = 0$, и изменяя i от N до 1, получаем все силы и моменты реакции.

5.2. Анализ рабочих сил и моментов

5.2.1. Силы и моменты, развиваемые двигателями манипулятора

При выполнении рабочих операций манипулятор развивает управляемые силы F_N и моменты M_N , приложенные к последнему звену, в котором закреплен рабочий инструмент. Иными словами, F_N и M_N — это силы и моменты, развиваемые рабочим инструментом. Фактически управление манипулятором осуществляется силами и моментами μ_i , развиваемыми в степенях подвижности манипулятора его двигателями. Поэтому для организации управления необходимо определить μ_i в зависимости от F_N , M_N .

В условиях статического равновесия F_N и M_N уравнивают внешние силы и моменты, действующие на N -е звено, т.е. $F_N = -F_{\text{в}N}$, $M_N = -M_{\text{в}N}$. Внешние силы и моменты $F_{\text{в}j}$, $M_{\text{в}j}$, $j=1, \dots, N-1$, действующие на остальные звенья манипулятора, будем считать известными. В большинстве практических задач $M_{\text{в}j} = 0$, а $F_{\text{в}j} = G_j$, т.е. внешние силы, действующие на звенья манипулятора, являются силами тяжести. В соответствии с уравнением (5.9) имеем

$$z_{i-1}^T \left[(1 - \sigma_i) \sum_{j=i}^{N-1} F_{\text{в}j} + \sigma_i \sum_{j=i}^{N-1} (M_{\text{в}j} + \lambda(\rho_{i-1, j})F_{\text{в}j}) \right] - z_{i-1}^T \left[(1 - \sigma_i)F_N + \sigma_i(M_N + \lambda(\rho_{i-1, N})F_N) \right] + \mu_i = 0, \quad i=1, 2, \dots, N. \quad (5.19)$$

В частности, в отсутствие внешних сил и моментов $F_{\text{в}j}$, $M_{\text{в}j}$, $j=1, \dots, N-1$,

$$\mu_i = z_{i-1}^T \left[(1 - \sigma_i)F_N + \sigma_i(M_N + \lambda(\rho_{i-1, N})F_N) \right]. \quad (5.20)$$

Вводя блочные матрицы (см. п. 3.1.3),

$$z^T = (z_0^T z_1^T \dots z_{N-1}^T),$$

$$\Lambda(\rho) = \text{diag}(\lambda(\rho_{0N})\lambda(\rho_{1N})\dots\lambda(\rho_{N-1N})),$$

$$\sigma = \text{diag}(\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_N),$$

запишем равенство (5.20) в векторной форме:

$$\mu^T = z^T \left[(E - \sigma)F_N + \sigma(M_N + \Lambda(\rho)F_N) \right],$$

или (см. (3.30), (3.32))

$$\boldsymbol{\mu} = J^T \mathcal{F}_N, \quad (5.21)$$

где $\mathcal{F}_N = \begin{pmatrix} \mathbf{F}_N \\ \mathbf{M}_N \end{pmatrix}$; $J^T = (J_v^T \ J_\omega^T) = \left((z^T [(E - \sigma) + \sigma \Lambda(\rho)])^T \ (z^T \sigma)^T \right)$ —

транспонированная якобиева матрица, полученная в § 3.1.3 при анализе скоростей N -го звена манипулятора.

Нетрудно получить в матричном виде и выражение (5.19), если ввести дополнительно блочную треугольную матрицу

$$U = \begin{pmatrix} E_3 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ E_3 & E_3 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & & & & \\ E_3 & E_3 & E_3 & \dots & E_3 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\boldsymbol{\mu}^T = z^T [(E - \sigma) \mathbf{F}_N + \sigma (\mathbf{M}_N + \lambda(\rho_N) \mathbf{F}_N)] - z^T [(E - \sigma) U^T \mathbf{F}_B + \sigma U^T (\mathbf{M}_B + \lambda(\rho) \mathbf{F}_B)], \quad (5.22)$$

или

$$\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}_{FN} + \boldsymbol{\mu}_{FB}, \quad (5.23)$$

где

$$\boldsymbol{\mu}_{FN} = J^T \mathcal{F}_N, \quad \boldsymbol{\mu}_{FB} = \mathcal{B}^T \begin{pmatrix} \mathbf{F}_B \\ \mathbf{M}_B \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}_B = (F_{B1} \dots F_{B, N-1} \ 0)^T,$$

$$\mathbf{M}_B = (M_{B1} \dots M_{B, N-1} \ 0)^T, \quad \mathcal{B}^T = (z^T [(E - \sigma) U^T + \sigma U^T \lambda(\rho)] \ z^T \sigma \ U^T).$$

В выражении (5.23) $\boldsymbol{\mu}_{FN}$ — моменты и силы двигателей, позволяющие развить требуемое рабочее усилие, а $\boldsymbol{\mu}_{FB}$ — моменты и силы, предназначенные для компенсации внешних сил и моментов, действующих на звенья манипулятора, в том числе сил тяжести.

5.2.2. Эллипсоиды допустимых сил

Полученные соотношения позволяют не только определить моменты и силы двигателей, но и необходимую их мощность. Поскольку эта мощность всегда ограничена, можно найти область значений сил, которые могут быть развиты двигателями манипулятора.

Обозначим через $P = \sum_{i=1}^N P_i$ суммарную мощность, расходуемую двигателями манипулятора, и введем коэффициент*

$$k_i = \frac{\mu_i}{\sqrt{P_i}}, \quad (5.24)$$

характеризующий эффективность преобразования энергии в движущий момент каждого из двигателей. Тогда

$$P = \sum_{i=1}^N \mu_i^2 \frac{1}{k_i^2} = \boldsymbol{\mu}^T \text{diag} \left(\frac{1}{k_i^2} \right) \boldsymbol{\mu}. \quad (5.25)$$

Поскольку суммарная мощность ограничена некоторым значением P^* : $P < P^*$, можно записать

$$\boldsymbol{\mu}^T \text{diag} \left(\frac{1}{k_i^2} \right) \boldsymbol{\mu} \leq P^*. \quad (5.26)$$

Предположим теперь, что внешние силы и моменты либо отсутствуют, либо компенсируются специальными механическими устройствами (системами разгрузки), т.е. справедливо равенство (5.21). Тогда для каждого положения манипулятора, т.е. фиксированного значения вектора обобщенных координат \mathbf{q} , получим условие

$$\mathcal{F}_N^T L(\mathbf{q}) \mathcal{F}_N \leq P^*, \quad (5.27)$$

где

$$L(\mathbf{q}) = J(\mathbf{q}) \text{diag} \left(\frac{1}{k_i^2} \right) J^T(\mathbf{q}). \quad (5.28)$$

В частности, если требуется развить рабочую силу \mathbf{F}_N , то это неравенство примет вид

$$\mathbf{F}_N^T L_F(\mathbf{q}) \mathbf{F}_N \leq P^*, \quad (5.29)$$

где

$$L_F(\mathbf{q}) = J_v(\mathbf{q}) \text{diag} \left(\frac{1}{k_i^2} \right) J_v^T(\mathbf{q}). \quad (5.30)$$

* Коэффициент k_i был введен для электрических двигателей прямого управления (моментных, безредукторных), поскольку справедлива линейная зависимость между величинами μ_i и $\sqrt{P_i}$ [66]. Однако он имеет смысл и для обычных двигателей постоянного тока, так как определяет эффективность силового модуля.

Геометрически неравенство (5.29) характеризует множество допустимых значений вектора рабочей силы в данном положении манипулятора, определяющее эллипсоид в его рабочем пространстве. Направление главных осей эллипсоида соответствует направлениям собственных векторов квадратичной формы L_F , а их величины определяются собственными числами матрицы L_F и значением P^* .

Если R — матрица, приводящая L_F к диагональному виду, т.е.

$$R^T L R = \text{diag}(\lambda_i), \quad i = 1, 2, \dots, N,$$

$$R F_N = f_N,$$

то получим уравнение эллипсоида, ограничивающего область допустимых значений сил:

$$f_N^T \text{diag} \left(\frac{\lambda_i}{k_i^2 P^*} \right) f_N = 1. \quad (5.31)$$

Минимальная и максимальная полуоси этого эллипсоида равны соответственно

$$\min_i k_i \sqrt{\frac{P^*}{\lambda_i}} \quad \text{и} \quad \max_i k_i \sqrt{\frac{P^*}{\lambda_i}}.$$

В частности, при $k_i = k = \text{const}$ величины $k \sqrt{\frac{P^*}{\lambda_{\max}}}$ и $k \sqrt{\frac{P^*}{\lambda_{\min}}}$ определяют минимальное F_{\min} и максимальное F_{\max} значение рабочей силы (рис. 5.3). Матрица R характеризует ориентацию эллипсоида допустимых сил относительно базовой системы координат.

Для того чтобы оценить энергетическую эффективность манипулятора, зависящую как от типа двигателей, так и от его кинематической схемы, вводят показатель $\bar{\lambda}$ (Вт/Н):

$$\bar{\lambda} = \frac{1}{N} \text{trace } L, \quad (5.32)$$

который характеризует среднюю величину диссипации энергии.

Поскольку

$$\frac{1}{N} \text{trace } L = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N l_{ii} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \lambda_i,$$

то $\bar{\lambda}$ соответствует среднему значению характеристических чисел матрицы L .

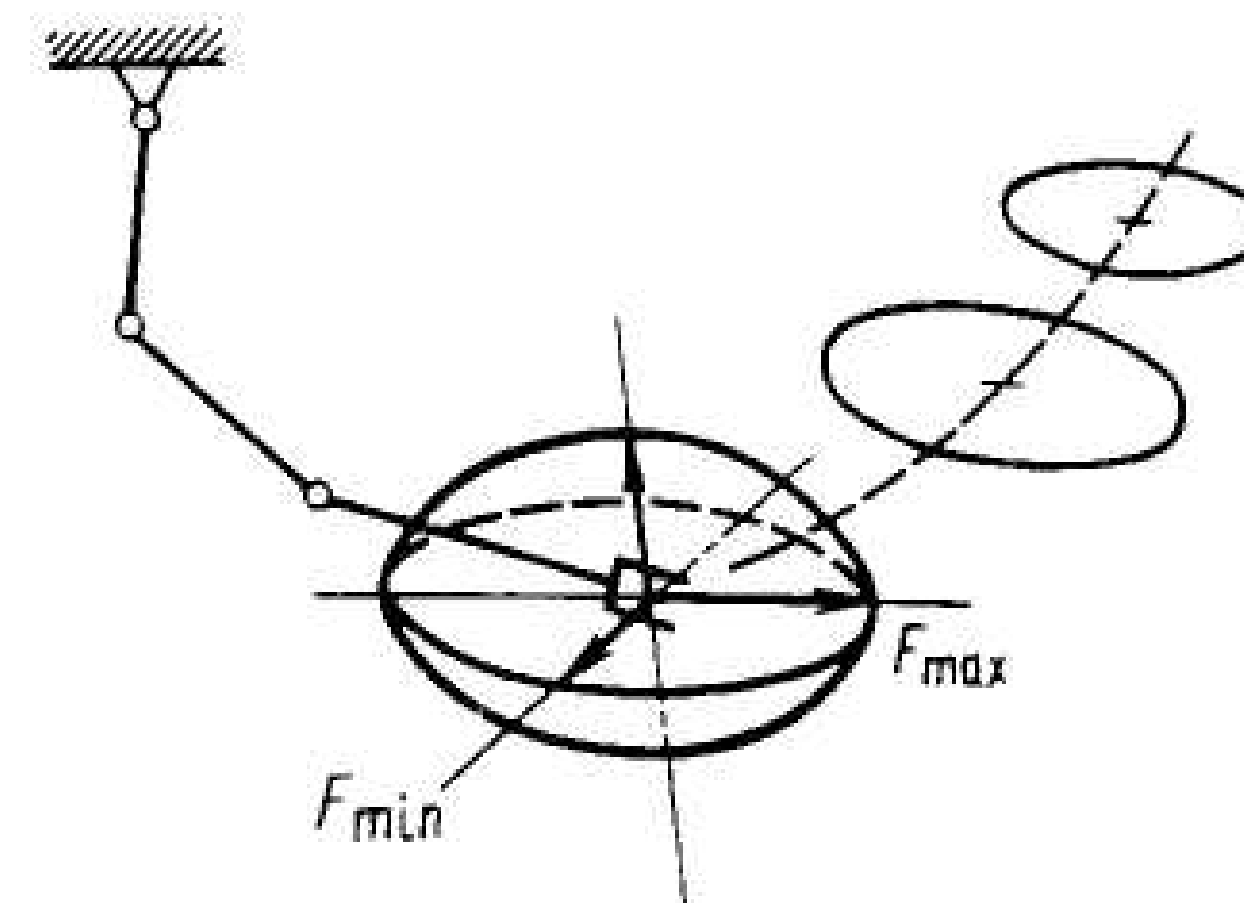


Рис. 5.3. Эллипсоид допустимых сил

Учитывая, что рабочие силы обратно пропорциональны характеристическим числам, можно сделать вывод: чем больше $\bar{\lambda}$, тем меньше в среднем рабочие силы могут быть развиты манипулятором, т.е. тем больше диссипация затраченной энергии.

Эллипсоиды сил могут быть построены в каждой точке рабочей зоны манипулятора. Они характеризуют возможность управления силами, развиваемыми манипулятором, и позволяют определить направления, в которых может быть развита максимальная сила.

Отметим, что в используемых в настоящее время манипуляторах непосредственное управление силами и моментами двигателей применяется редко. Электрические моментные (безредукторные) двигатели позволяют осуществить такое управление. Для манипуляторов, оснащенных подобными двигателями, анализ областей допустимых сил имеет особенно важное значение [66].

Пример 5.1. Построить области допустимых значений рабочих сил для манипулятора с параллелограммной схемой кинематической цепи (рис. 5.4).

Решение. В соответствии с обозначениями на кинематической схеме получим уравнения, связывающие координаты x, y конечной точки C кинематической цепи с обобщенными угловыми координатами q_1, q_2 :

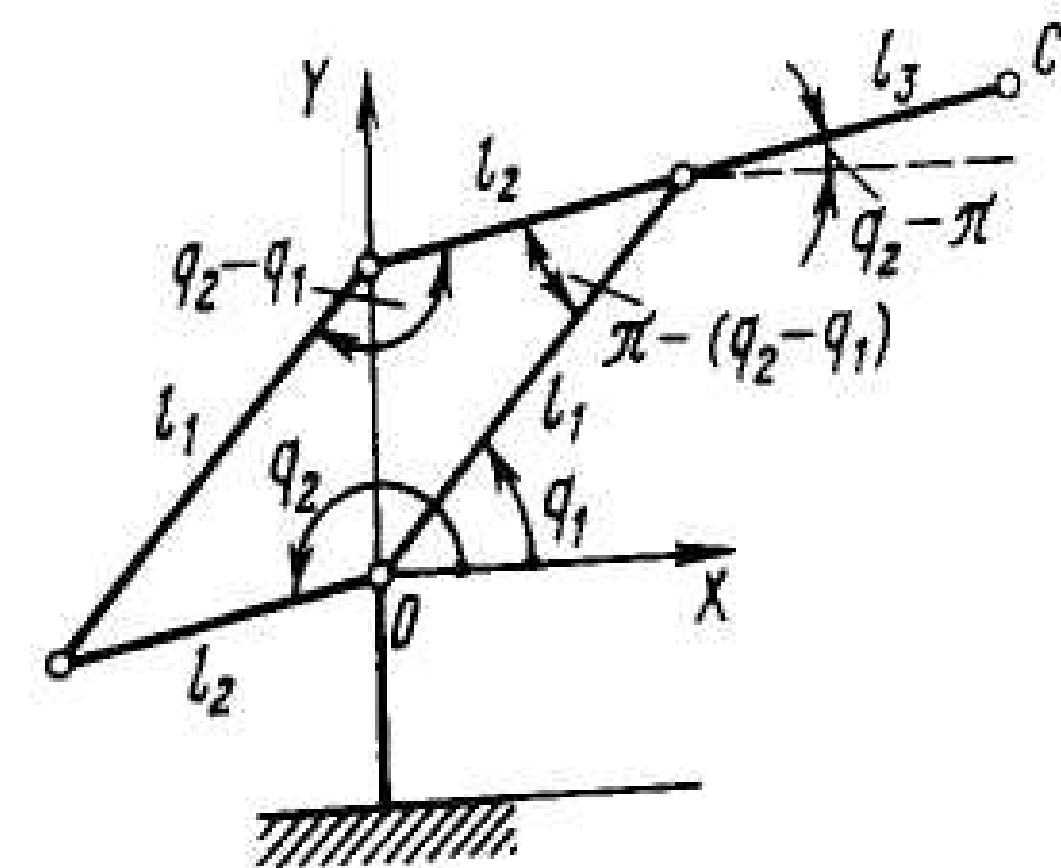


Рис. 5.4. Манипулятор с параллелограммной схемой кинематической цепи

$$x = l_1 \cos q_1 - l_3 \cos q_2,$$

$$y = l_1 \sin q_1 - l_3 \sin q_2.$$

Для скорости перемещения этой точки запишем следующие уравнения:

$$\dot{x} = -l_1 \dot{q}_1 \sin q_1 + \dot{q}_2 l_3 \sin q_2,$$

$$\dot{y} = l_1 \dot{q}_1 \cos q_1 - l_3 \dot{q}_2 \cos q_2.$$

Отсюда следует, что якобиева матрица равна

$$J_v(q) = \begin{pmatrix} -l_1 \sin q_1 & l_3 \sin q_2 \\ l_1 \cos q_1 & -l_3 \cos q_2 \end{pmatrix}.$$

Предполагая, что известны коэффициенты эффективности преобразования энергии k_1 и k_2 , получаем

$$L = J_v(q) \text{diag}(1/k_1^2 \quad 1/k_2^2) J_v^T(q) =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{l_1^2}{k_1^2} (\sin q_1)^2 + \frac{l_3^2}{k_2^2} (\sin q_2)^2 & -\frac{l_1^2}{k_1^2} \cos q_1 \sin q_2 - \frac{l_3^2}{k_2^2} \sin q_2 \cos q_2 \\ -\frac{l_1^2}{k_1^2} \cos q_1 \sin q_2 - \frac{l_3^2}{k_2^2} \cos q_2 \sin q_2 & \frac{l_1^2}{k_1^2} (\cos q_1)^2 + \frac{l_3^2}{k_2^2} (\cos q_2)^2 \end{pmatrix}. \quad (5.33)$$

Распределение эллипсов допустимых значений сил в пределах рабочей зоны, вычисляемых по формуле (5.31), показано на рис. 5.5*. Из рисунка ясно, что максимальная сила направлена по оси последнего звена. Важно, что диапазон рабочих сил при использовании *параллелограммной* схемы меняется незначительно в большей части рабочей зоны, что упрощает программирование соответствующих рабочих операций.

Средний показатель эффективности данной схемы (см. (5.32)) не зависит от точки приложения сил и составляет

$$\bar{\lambda} = \frac{1}{2} \left(\frac{l_1^2}{k_1^2} + \frac{l_3^2}{k_2^2} \right). \quad (5.34)$$

* Расчеты выполнены для робота с двигателями прямого действия, разработанного в Массачусетском Технологическом Институте; его характеристики приведены в работе [66, с. 55–57]: $l_1 = 0,4$ м, $l_2 = 0,65$ м; $35^\circ \leq q_2 \leq 170^\circ$. При $P_{\max} = 1$ кВт максимальная рабочая сила составляет 190 Н.

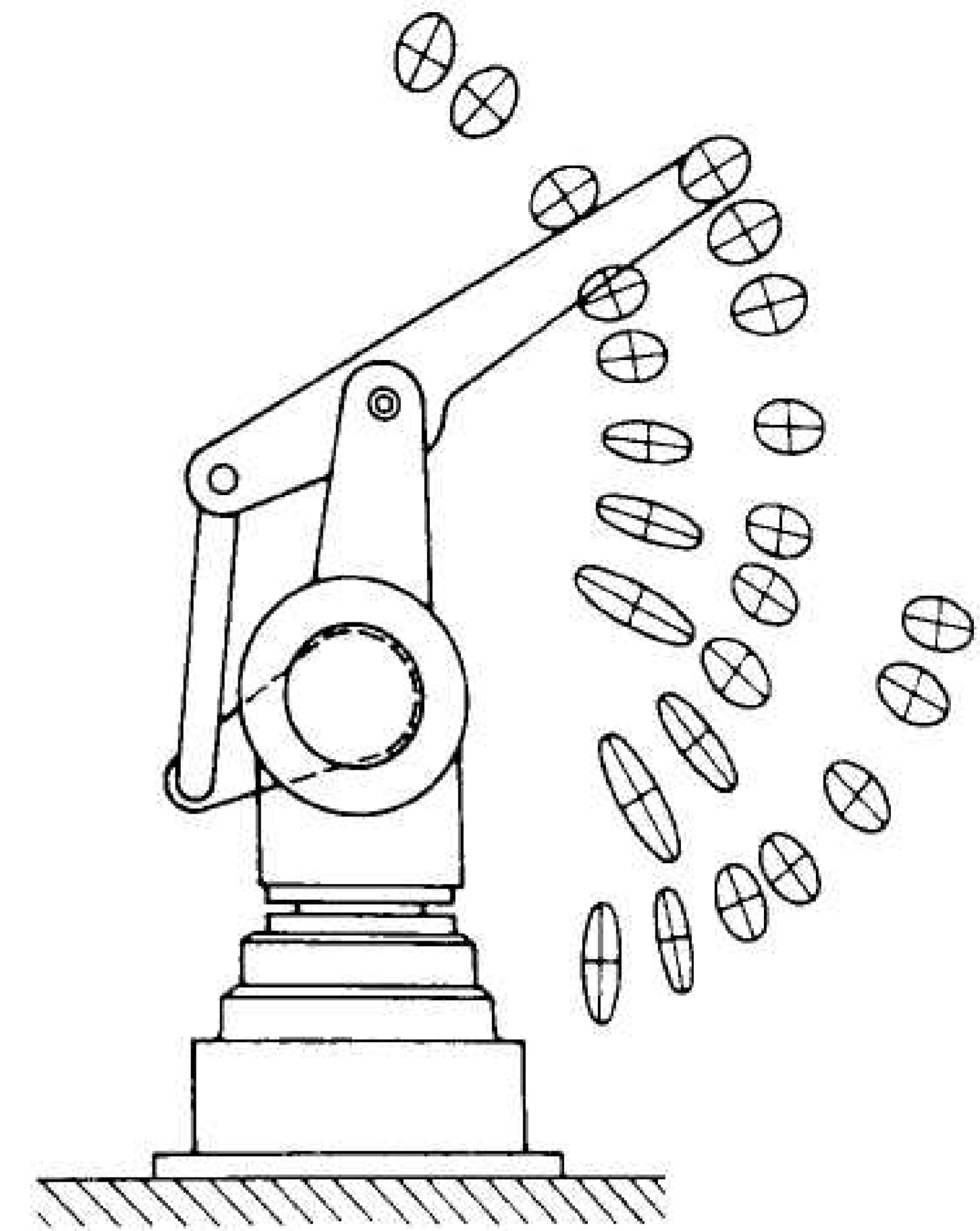


Рис. 5.5. Распределение эллипсов допустимых сил в рабочей зоне манипулятора

Отметим, что такой благоприятной особенностью обладает не всякая кинематическая схема. Это видно из следующего примера.

Пример 5.2. Определить среднее значение диссипации энергии $\bar{\lambda}$ для манипулятора, имеющего разомкнутую кинематическую цепь (рис. 5.6).

Решение. В данном случае

$$x = -l_1 \cos q_1 + l_2 \cos(q_1 + q_2),$$

$$y = l_1 \sin q_1 + l_2 \sin(q_1 + q_2).$$

Соотношения для скорости конечной точки кинематической цепи принимают вид

$$\dot{x} = -l_1 \dot{q}_1 \sin q_1 - l_2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \sin(q_1 + q_2),$$

$$\dot{y} = l_1 \dot{q}_1 \cos q_1 + l_2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \cos(q_1 + q_2).$$

Соответственно, якобиева матрица принимает вид

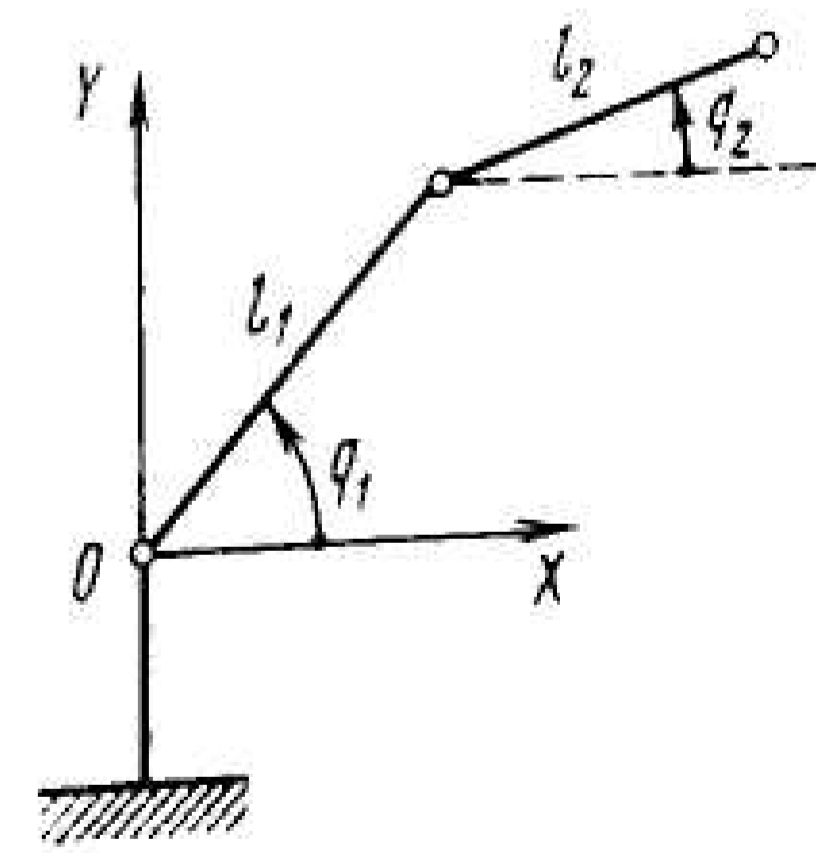


Рис. 5.6. Система двухзвенового манипулятора

$$J_v(q) = \begin{pmatrix} l_1 \sin q_1 - l_2 \sin(q_1 + q_2) & -l_2 \sin(q_1 + q_2) \\ l_1 \cos q_1 + l_2 \cos(q_1 + q_2) & l_2 \cos(q_1 + q_2) \end{pmatrix}.$$

Вычисляя, как и выше матрицу L , получаем для суммы ее элементов, лежащих на главной диагонали, следующее выражение:

$$\bar{\lambda} = \frac{1}{2} \text{trace } L = \frac{1}{2} \left[\frac{l_1^2}{k_1^2} + \frac{l_2^2}{k_2^2} + \frac{l_2^2}{k_2^2} \right] - \frac{l_1 l_2}{k_1^2} \cos q_2. \quad (5.35)$$

Этот показатель, в отличие от полученного в предыдущем примере, зависит от конфигурации манипулятора. При увеличении q_2 показатель $\bar{\lambda}$ также увеличивается, а эффективность, соответственно, падает. В этом смысле механизм с параллелограммной схемой оказывается эффективнее во всей рабочей зоне, чем с разомкнутой.

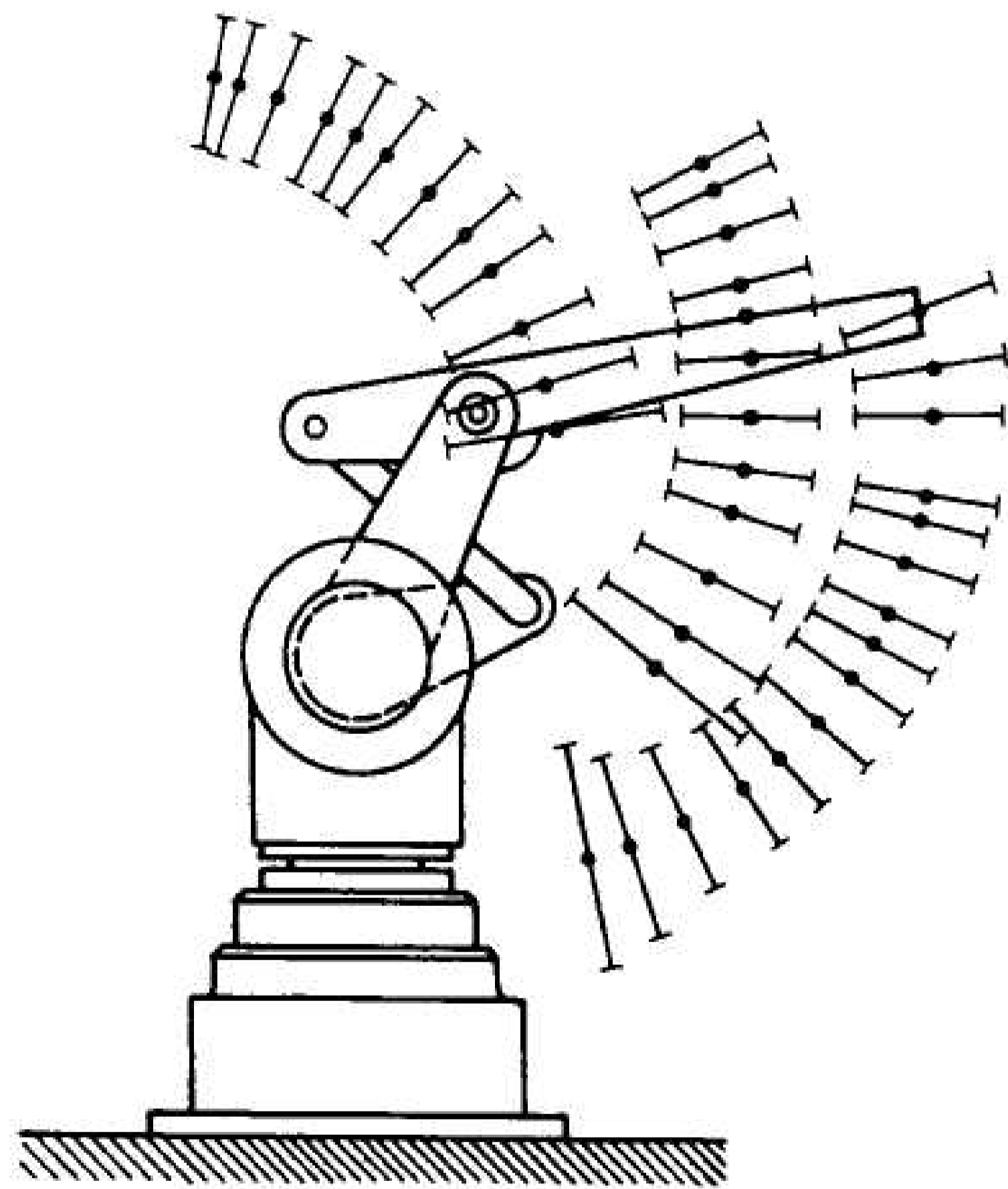


Рис. 5.7. Манипулятор с перекрестной кинематической связью

Из двух рассмотренных примеров ясно, что, выбирая ту или иную кинематическую схему манипулятора, можно существенно влиять на развиваемые рабочие силы и характер их распределения в рабочем пространстве. Интересный пример представляет собой схема манипулятора с перекрестной кинематической связью, также рассмотренная в [66] (рис. 5.7).

Ее особенность состоит в том, что концевая точка манипулятора при любом положении может перемещаться только по прямой линии. Благодаря этому вся энергия системы расходуется на развитие силы в одном направлении. При использовании тех же силовых элементов, что и в случае манипулятора с параллелограммной схемой (см. рис. 5.4), и при тех же размерах базовых элементов кинематической цепи сила оказывается в среднем больше в 1.6 раза. Эллипсоиды рабочих сил вырождаются в отрезки прямых, причем равномерное распределение допустимых значений сил сохраняется (см. рис. 5.7). Трудность программирования такой системы очевидна, так как направления возможных сил различны в разных точках рабочего пространства.

5.3. Уравнения движения манипулятора в форме Даламбера

Для составления уравнений движения манипуляционного механизма, рассмотрим уравнения кинестатики как наиболее общей и универсальной формы уравнений движения. Этот способ наиболее просто позволяет получить их в аналитической форме: вместе с тем он весьма удобен и в вычислительном отношении, так как предоставляет возможность решать первую и вторую задачи динамики с использованием рекурсивных процедур (см. § 3.1).

5.3.1. Силы и моменты инерции

В основе процедуры составления уравнений кинестатики лежит принцип Даламбера. Он состоит в том, что в каждый момент времени действующие на движущееся тело внешние силы и реакции связей можно уравновесить силами инерции. Поскольку условия равновесия действующих на манипулятор внешних сил уже были рассмотрены в § 5.1 и 5.2, нам остается определить силы и моменты инерции движущихся звеньев манипулятора и подставить их в полученные условия равновесия.

При этом условие равновесия с учетом сил инерции приобретает смысл уравнений Ньютона, описывающих поступательное движение твердого тела. Уравнения же моментов совпадут с уравнениями Эйлера, описывающими вращательное движение тела, имеющего неподвижную точку.

Главный вектор сил инерции, приложенный в центре масс i -го звена F_{I_i} (в неподвижной системе координат $OXYZ$), можно найти по формуле

$$F_{I_i} = -m_i w_i, \quad (5.36)$$

где m_i — масса звена, w_i — абсолютное ускорение центра масс, определяемое формулой (3.38).

Используя рекурсивную процедуру (см. § 3.3), ускорения звеньев w_i можно последовательно найти при $i = 1, 2, \dots, N$, одновременно с вычислением их линейных и угловых скоростей v_i, ω_i . При этом можно воспользоваться рекуррентными соотношениями (3.20), определяющими ускорение в системе координат, связанной со звеном \tilde{w}_i , применяя формулу

$$F_{I_i} = -m_i \Omega_i \tilde{w}_i, \quad (5.37)$$

Для вывода уравнений кинестатики, однако, более целесообразно использовать формулу, определяющую вектор $w = (w_1 \dots w_N)^T$ в аналитическом виде (см. (3.38)). Применяя матричные обозначения и учитывая эту формулу, можно записать следующее выражение, позволяющее вычислить вектор $F_I = (F_{I_1} \ F_{I_2} \ \dots \ F_{I_N})^T$ через обобщенные координаты манипулятора и их производные:

$$F_I = -m w = -m(B_v(q)\ddot{q} + \dot{B}_v(q, \dot{q})\dot{q}); \quad (5.38)$$

матрицы $B_v(q), \dot{B}_v(q, \dot{q})$ определены в п. 3.1.3.

Для того чтобы определить главный момент сил инерции, введем еще одну систему координат $C_i X'_i Y'_i Z'_i$, связанную с i -м звеном и имеющую начало в его центре масс. Выберем ее таким образом, чтобы соответствующие оси были параллельны осям системы координат O, X, Y, Z , также связанной с i -м звеном. Во многих случаях оси системы координат $C_i X'_i Y'_i Z'_i$ удастся выбрать таким образом, чтобы они совпадали с главными осями инерции i -го звена, что облегчает последующий расчет. Однако если оси системы $C_i X'_i Y'_i Z'_i$ не совпадают с главными осями инерции тела, можно выбрать и другую систему, оси которой совпадают с главными осями инерции, добавив соответствующую матрицу поворота в последующие уравнения.

Введем теперь кинетический момент i -го звена G'_i в системе координат $C_i X'_i Y'_i Z'_i$. Напомним, что кинетический момент — это вектор, который определяет главный момент количества движения точек тела $m_i v_i$ относительно некоторого центра. В частности, при вращении тела относительно некоторой оси L его кинетический момент

$$G_L = I_L \omega,$$

где I_L — момент инерции тела относительно этой же оси; ω — угловая скорость вращения.

В общем случае при вращении i -го звена относительно начала системы координат $C_i X'_i Y'_i Z'_i$, т.е. его центра масс, кинетический момент определяют по формуле

$$G'_i = I'_i \tilde{\omega}_i, \quad (5.39)$$

где, I'_i — матрица, называемая *тензором инерции* и состоящая из моментов инерции тела в системе координат $C_i X'_i Y'_i Z'_i$, а $\tilde{\omega}_i$ — угловая скорость звена в связанной с ним системе координат:

$$I'_i = \begin{pmatrix} I_{X'_i X'_i} & -I_{X'_i Y'_i} & -I_{X'_i Z'_i} \\ -I_{X'_i Y'_i} & I_{Y'_i Y'_i} & -I_{Y'_i Z'_i} \\ -I_{X'_i Z'_i} & -I_{Y'_i Z'_i} & I_{Z'_i Z'_i} \end{pmatrix}.$$

Напомним, что моменты инерции, стоящие на главной диагонали этой матрицы, определяют моменты инерции относительно соответствующих осей (осевые моменты инерции), например:

$$I_{X'_i X'_i} = \iiint_{V_i} \rho(x', y', z') (y'^2 + z'^2) dx' dy' dz',$$

где ρ — плотность тела, V_i — его объем.

Остальные элементы матрицы называют также центробежными моментами (произведениями инерции).

Если среди осей системы координат $C_i X'_i Y'_i Z'_i$ имеются главные оси инерции i -го звена, то матрица I'_i упрощается. Так, если ось $C_i X'_i$ является главной, то $I_{X'_i Y'_i} = I_{X'_i Z'_i} = 0$, при этом, как известно, ось $C_i X'_i$ должна быть осью симметрии тела. Если $C_i X'_i Y'_i Z'_i$ — главные центральные (проходящие через центр масс) оси инерции, то матрица I'_i — диагональная, т.е.

$$\mathbf{G}'_i = \text{diag}(I_{X'X'} \ I_{Y'Y'} \ I_{Z'Z'}) \tilde{\boldsymbol{\omega}}_i. \quad (5.40)$$

Обозначая, как и ранее, Ω_i матрицу перехода от системы координат $O_i X_i Y_i Z_i$ (следовательно, и от $C_i X'_i Y'_i Z'_i$) к неподвижной системе координат, запишем выражение кинетического момента в неподвижной системе координат:

$$\mathbf{G}_i = \Omega_i \mathbf{G}'_i. \quad (5.41)$$

Главный момент сил инерции \mathbf{M}_{ii} твердого тела определяется как производная по времени кинетического момента \mathbf{G}_i с противоположным знаком:

$$\mathbf{M}_{ii} = -\frac{d}{dt} \mathbf{G}_i. \quad (5.42)$$

Подставляя (5.41) в (5.42) и принимая во внимание формулы, полученные в п. 3.1.3, имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{ii} &= -\dot{\Omega}_i \mathbf{G}'_i - \Omega_i \dot{\mathbf{G}}'_i = -\dot{\Omega}_i \lambda(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_i) I'_i \tilde{\boldsymbol{\omega}}_i - \Omega_i I'_i \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_i = \\ &= -\lambda(\boldsymbol{\omega}_i) \Omega_i I'_i \Omega_i^T \boldsymbol{\omega}_i - \Omega_i I'_i \Omega_i^T \boldsymbol{\varepsilon}_i = -\lambda(\boldsymbol{\omega}_i) I_i \boldsymbol{\omega}_i - I_i \boldsymbol{\varepsilon}_i, \end{aligned} \quad (5.43)$$

где $I_i = \Omega_i I'_i \Omega_i^T$, $\boldsymbol{\varepsilon}_i = \dot{\boldsymbol{\omega}}_i$, $i = 1, 2, \dots, N$.

Таким образом, мы получили выражение для главного момента инерции i -го звена в виде функции его угловой скорости $\boldsymbol{\omega}_i$ и углового ускорения $\boldsymbol{\varepsilon}_i$ (в неподвижной системе координат).

Совокупность равенств (5.43) для всех звеньев манипулятора можно записать в матричной форме, используя ранее введенные блочные матрицы:

$$\mathbf{M}_i = -\Omega \Lambda(\tilde{\boldsymbol{\omega}}) I' \tilde{\boldsymbol{\omega}} - \Omega I' \tilde{\boldsymbol{\omega}} = -\Lambda(\boldsymbol{\omega}) I \boldsymbol{\omega} - I \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (5.44)$$

где $I' = \text{diag}(I'_1 \ I'_2 \ \dots \ I'_N)$, $I = \text{diag}(I_1 \ I_2 \ \dots \ I_N)$.

Первое из этих равенств более удобно при организации рекуррентных вычислений моментов инерции методом прямой рекурсии (см. § 3.3). Второе используют для записи этих моментов в аналитической форме.

С учетом выражений, полученных в п. 3.1.3 для векторов угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ и углового ускорения $\boldsymbol{\varepsilon}$ в неподвижной системе координат (3.23), (3.37), позволяющих выразить эти величины через производные обобщенных координат манипулятора, запишем

$$\mathbf{M}_i = -\Lambda(B_\omega(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}) I B_\omega(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} - I B_\omega(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} - I \dot{B}_\omega(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}. \quad (5.45)$$

Компоненты векторов \mathbf{F}_i , \mathbf{M}_i могут быть вычислены с помощью процедуры рекурсии, описанной в п. 3.3.1, одновременно с компонентами векторов $\boldsymbol{\omega}$, \mathbf{v} , $\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{\varepsilon}$.

5.3.2. Уравнения движения

Обратимся теперь к процедуре составления уравнений кинестатики манипулятора. Вначале заметим, что в случае движения свободного твердого тела движение его центра масс определяется уравнением Ньютона

$$\mathbf{F}_i = -m\mathbf{w} = \mathbf{F}_e,$$

где \mathbf{F}_e — главный вектор внешних сил, действующих на тело. Движение же тела вокруг центра масс описывается теоремой об изменении кинетического момента:

$$\mathbf{M}_i = -\frac{d\mathbf{G}}{dt} = \mathbf{M}_e,$$

где \mathbf{M}_e — главный момент внешних сил относительно центра масс тела, принятого за точку вращения. Подставляя в это уравнение выражение \mathbf{M}_i , полученное выше в форме (5.44), получаем три уравнения Эйлера, описывающие вращения тела относительно центра масс.

В случае манипуляционного механизма на движение образующих его тел наложены связи, характеризующие допустимые взаимные положения звеньев. Эти связи можно интерпретировать как дополнительные условия, налагаемые на решения рассматриваемых дифференциальных уравнений. Такой подход будет описан в следующих главах. При составлении же уравнений кинестатики используют рекурсивный подход, аналогичный рассмотренному выше при составлении уравнений статики манипулятора (см. § 5.1) Для фрагмента кинематической цепи, образованной звеньями от i -го до N -го, к уравнениям сил и моментов теперь надо добавить силы и моменты инерции каждого из звеньев.

В соответствии с (5.9) получим следующие уравнения: для поступательной i -й кинематической пары

$$\mathbf{z}_{i-1}^T \sum_{j=i}^N (\mathbf{F}_{e,j} + \mathbf{F}_{i,j}) + \mu_i = 0; \quad (5.46)$$

для вращательной пары

$$z_{i-1}^T \sum_{j=i}^N (M_{B_j} + M_{I_j} + \lambda(\rho_{i-1j})(F_{B_j} + F_{I_j})) + \mu_i = 0. \quad (5.47)$$

Здесь F_{I_j} и M_{I_j} — главные векторы сил инерции и моментов инерции j -го звена в неподвижной системе координат, определяемые формулами (5.37), (5.43). Напомним также, что F_{B_j} , M_{B_j} — это главные векторы внешних сил и моментов, действующих на звено; μ_i — момент или сила, развиваемые двигателем соответствующей степени подвижности в проекции на направление $O_{i-1}Z_{i-1}$, а ρ_{i-1j} — радиус-вектор центра масс j -го звена относительно начала системы координат $O_{i-1}X_{i-1}Y_{i-1}Z_{i-1}$.

Вид уравнений, таким образом, зависит от типа i -й кинематической пары, поэтому уравнения (5.46) и (5.47) следует, как и раньше, представить в виде одного уравнения с использованием индексов σ_i . Получим

$$z_{i-1}^T \left\{ (1 - \sigma_i) \sum_{j=i}^N (F_{B_j} + F_{I_j}) + \sigma_i \left[\sum_{j=i}^N (M_{B_j} + M_{I_j}) + \lambda(\rho_{i-1j})(F_{B_j} + F_{I_j}) \right] \right\} + \mu_i = 0. \quad (5.48)$$

Уравнения (5.48) решают последовательно в направлении от схвата к основанию манипулятора при $i = N, N - 1, \dots, 1$ (обратная рекурсия). При этом могут быть решены как первая (обратная), так и вторая задачи динамики.

При решении первой задачи динамики предполагаются известными функции $q_i(t)$, $t \in [0, T]$, описывающие программу движения манипулятора. Требуется найти управляющие силы и моменты μ_i . Для этого вначале методом прямой рекурсии определяют на каждом шаге величины ω_i , $\dot{\omega}_i$, v_i , \dot{v}_i по формулам, приведенным в п. 3.3.1. Далее вычисляют на i -м шаге $I_i = \Omega_i I_i' \Omega_i^T$, F_{I_i} и M_{I_i} по формулам (5.37) и (5.43). Теперь методом обратной рекурсии при $i = N - 1, N - 2, \dots, 1$ определим μ_i в соответствии с формулами (5.46), (5.47), которые можно записать в виде рекуррентных соотношений (см. п. 5.1.2):

$$\mu_{i-1} = z_{i-2}^T [-F_{B_{i-1}} + z_{i-1}^T \mu_i] - z_{i-2}^T F_{I_{i-1}}, \quad (5.49)$$

$$\mu_{i-1} = -z_{i-2}^T [M_{B_{i-1}} + \lambda(\rho_{i-2, i-1})F_{B_{i-1}} + \lambda(\rho_{i-1, i})F_{B_i} - z_{i-1} \mu_i + M_{I_{i-1}} + \lambda(\rho_{i-2, i-1})F_{I_i}]. \quad (5.50)$$

Таким образом может быть решена обратная задача динамики. Значительно сложнее решить вторую задачу динамики, связанную с интегрированием дифференциальных уравнений (5.48).

5.3.3. Составление дифференциальных уравнений движения манипулятора относительно обобщенных координат

При определении движения манипулятора, соответствующего приложенным силам и моментам, на каждом шаге предполагаются известными начальными условиями $q(t_0)$, $\dot{q}(t_0)$, внешние, а также управляющие силы и моменты μ . Задача заключается в интегрировании уравнений движения, записанных в обобщенных координатах. Их нетрудно получить из уравнений (5.46), (5.47), которые с учетом обозначений, введенных в п. 3.1.3, можно переписать в виде одного уравнения

$$B_v^T(q)(F_B + F_I) + B_\omega^T(q)(M_B + M_I) + \mu = 0. \quad (5.51)$$

Подставляя в его левую часть выражения F_I и M_I из (5.38) и (5.45), получаем матричное дифференциальное уравнение относительно обобщенных координат манипулятора

$$B_v^T(q)F_B - B_v^T(q)mB_v(q)\ddot{q} - B_v^T(q)m\dot{B}_v(q, \dot{q})\dot{q} + B_\omega^T(q)M_B - [B_\omega^T(q)\Lambda(B_\omega(q)\dot{q})IB_\omega(q) + B_\omega^T(q)I\dot{B}_\omega(q, \dot{q})]\dot{q} - B_\omega^T(q)IB_\omega(q)\ddot{q} + \mu = 0.$$

Группируя сомножители при \dot{q} и \ddot{q} , получаем искомое уравнение динамики манипуляционного механизма

$$A(q)\ddot{q} = B(q, \dot{q})\dot{q} + B_v^T(q)F_B + B_\omega^T(q)M_B + \mu, \quad (5.52)$$

где

$$A(q) = B_v^T(q)mB_v(q) + B_\omega^T(q)IB_\omega(q) = B^T(q) \begin{pmatrix} mE & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} B(q), \quad B(q) = \begin{pmatrix} B_v(q) \\ B_\omega(q) \end{pmatrix}. \quad (5.53)$$

$$B(q, \dot{q}) = -B_v^T(q)m\dot{B}_v(q, \dot{q}) - [B_\omega^T(q)\Lambda(B_\omega(q)\dot{q})IB_\omega(q) + B_\omega^T(q)I\dot{B}_\omega(q, \dot{q})]. \quad (5.54)$$

Матрицы, входящие в правую часть уравнения (5.52), определяются формулами (5.53), (5.54). Элементы симметрической матрицы $A(q)$

зависят от конфигурации манипулятора и его масс-инерционных характеристик. Матрицы $\dot{B}_v(q, \dot{q})$, $\dot{B}_\omega(q, \dot{q})$ линейно зависят от \dot{q} (см. п. 3.1.3), следовательно, компоненты вектора $B(q, \dot{q})\dot{q}$ являются квадратичными формами относительно \dot{q} , в частности $B(q, \dot{q})\dot{q} = 0$ при $\dot{q} = 0$.

Интегрируя систему дифференциальных уравнений (5.52) порядка $2N$ с начальными условиями $q(t_0) = q_0$, $\dot{q}(t_0) = \dot{q}_0$, находим обобщенные координаты манипулятора $q(t)$, т.е. его движение (прямая задача динамики). Уравнение динамики манипулятора в виде (5.52), полученное из уравнения кинестатики (5.51), является очень сложным. Составление его «вручную» для реального манипулятора нецелесообразно. В связи с этим были предложены различные способы автоматизации этой процедуры.

Рекуррентный способ. В этом случае применяют методы прямой и обратной рекурсии, рассмотренные выше, однако их используют таким образом, чтобы в конечном итоге получить на каждом i -м шаге уравнение для ускорений в виде соотношения

$$\mathcal{A}(q^{(i)})\ddot{q} = \Phi(q^{(i)}, \dot{q}^{(i)}, \mu^{(i)}, F_a^{(i)}, M_a^{(i)}), \quad (5.55)$$

правая часть которого известная на i -м шаге величина.

В процессе прямой рекурсии на каждом шаге вычисляют скорости \tilde{v}_i , $\tilde{\omega}_i$ в системах координат, связанных со звеньями, в зависимости от q , \dot{q} по формулам (3.19), (3.21), а также линейные и угловые ускорения по формулам (3.20), (3.22), которые записываются следующим образом (см. п. 3.1.3):

$$\tilde{w}_i = \Omega_i^T \tilde{w}_{i-1} + \lambda(\tilde{\omega}_i) \lambda(\tilde{\omega}_i, \tilde{p}_{i-1}) + \lambda(\tilde{\varepsilon}_i) \tilde{p}_{i-1} + (1 - \sigma_i) \lambda(\tilde{\omega}_i) \Omega_i^T z_0 \dot{q}_i + (1 - \sigma_i) \Omega_i^T z_0 \dot{q}_i, \quad (5.56)$$

$$\tilde{\varepsilon}_i = \Omega_i^T \tilde{\varepsilon}_{i-1} + \sigma_i (\Omega_i^T z_0 \ddot{q}_i) + \sigma_i \Omega_i^T \lambda(\tilde{\omega}_{i-1}) z_0 \dot{q}_i. \quad (5.57)$$

При вычислениях отдельно записывают слагаемые, содержащие q , \dot{q} и множители при \ddot{q} . Например, если все сочленения вращательные ($\sigma_i = 1$), то

$$\tilde{\varepsilon}_1 = \Omega_1^T z_0 \ddot{q}_1,$$

$$\tilde{\varepsilon}_2 = \Omega_2^T \Omega_1^T z_0 \ddot{q}_1 + \Omega_2^T z_0 \ddot{q}_2 + \varphi_2(\dot{q}_1, \dot{q}_2),$$

...

т.е. вычисляют $\Omega_1^T z_0$, $\Omega_2^T \Omega_1^T z_0$, ..., $\Omega_i^T \Omega_{i-1}^T \dots \Omega_1^T z_0$, а также $\varphi_2(\dot{q}_1, \dot{q}_2)$, $\varphi_3(\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3)$, ..., $\varphi_i(\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_i)$.

Аналогично

$$\tilde{w}_1 = \lambda(z_0 p_{10}) \ddot{q}_1 + \varphi_1(\tilde{\omega}_1),$$

$$\tilde{w}_2 = \Omega_2^T \lambda(z_0 p_{10}) \ddot{q}_1 + \lambda(z_0 p_{21}) \ddot{q}_2 + \varphi_2(\tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2).$$

После выполнения всех расчетов при $i = 1, 2, \dots, N$ происходит вычисление сил, действующих на систему, методом обратной рекурсии с составлением уравнений вида (5.13), (5.14); при этом по-прежнему отдельно определяют коэффициенты при \ddot{q} , и слагаемые, зависящие от \dot{q} , q . Таким образом, на i -м шаге получаем из соотношения (5.55) вектор ускорений обобщенных координат

$$\ddot{q} = \mathcal{A}^{-1}(q^{(i)}) \Phi. \quad (5.58)$$

Дважды интегрируя вектор, стоящий в правой части с известными начальными условиями $q^{(i)}$, $\dot{q}^{(i)}$, находим приближенно значения $q^{(i+1)}$, $\dot{q}^{(i+1)}$, являющиеся начальными на следующем шаге интегрирования.

Метод вычисления блочных матриц. В этом случае соотношение для ускорений вида (5.58) определяют, исходя из выражений блочных матриц \mathcal{A} и \mathcal{B} , входящих в уравнение динамики манипулятора (5.52). Так, для матрицы \mathcal{A} с учетом формулы (5.53) можно записать

$$\mathcal{A}(q) = \mathcal{B}^T(q) I \mathcal{B}(q), \quad (5.59)$$

$$I = \text{diag}(m_1 E_3 \dots m_N E_3 \quad \Omega_1 I'_1 \Omega_1^T \dots \Omega_N I'_N \Omega_N^T),$$

$$\mathcal{B}(q) = \begin{pmatrix} B_v(q) \\ B_\omega(q) \end{pmatrix},$$

причем, принимая во внимание (3.26), (3.23) и (3.34)

$$B_v(q) = [U(E - \sigma) + \tilde{\Lambda}^T(P)U\sigma] \Omega_0^T v, \quad (5.60)$$

$$B_\omega(q) = U \Omega_0^T v \sigma, \quad (5.61)$$

или

$$B_v(q) = Uz(E - \sigma) + \tilde{\Lambda}^T(P)Uz\sigma, \quad (5.62)$$

$$B_{\omega}(\mathbf{q}) = U\mathbf{z}\sigma, \quad (5.63)$$

где $\mathbf{z} = \Omega_0^T \mathbf{v}$.

Матрица $\tilde{\Lambda}^T(\mathbf{P})U\mathbf{z}$ определена в п. 3.1.3 (с. 113). С учетом вида матрицы U можно заключить, что обе матрицы B_v и B_{ω} являются треугольными, причем:

$$B_{\omega}(\mathbf{q}) = \begin{pmatrix} z_0\sigma_1 & 0 & \dots & 0 \\ z_0\sigma_1 & z_1\sigma_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ z_0\sigma_1 & z_1\sigma_2 & \dots & z_{N-1}\sigma_N \end{pmatrix},$$

$$B_v(\mathbf{q}) = \begin{pmatrix} z_0(E - \sigma_1) + & & & \\ + \lambda(z_0)\rho_{10}\sigma_1 & 0 & \dots & 0 \\ z_0(E - \sigma_1) + & z_1(E - \sigma_2) + & & \\ + \lambda(z_0)\rho_{20}\sigma_2 & + \lambda(z_1)\rho_{21}\sigma_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ z_0(E - \sigma_1) + & z_1(E - \sigma_2) + & \dots & z_{N-1}(E - \sigma_N) + \\ + \lambda(z_0)\rho_{N0}\sigma_N & + \lambda(z_1)\rho_{N1}\sigma_N & \dots & + \lambda(z_{N-1})\rho_{NN-1}\sigma_N \end{pmatrix}.$$

Соответственно элементы матриц B_{ω} , B_v можно вычислить последовательно в процессе прямой рекурсии: определить $z_i = \Omega_i^T = \Omega_{i-1}^T \mathbf{v}_i$ при $i = 1, 2, \dots, N$, одновременно вычисляя на каждом шаге новые элементы матриц B_{ω} , B_v , и последовательно заполнить (сверху вниз) строки этих матриц. Используя матрицы $\Omega_i(q_1, \dots, q_{i-1})$, вычисляем также соответствующие элементы $\Omega_i I_i' \Omega_i^T$ матрицы I . После завершения цикла ($i = 1, \dots, N$) матрица \mathcal{A} вычисляется в соответствии с приведенными формулами.

Аналогичные, хотя и более громоздкие формулы, нетрудно записать для матрицы \mathcal{B} (5.54). Они приведены в работе [35], где содержится также библиотека алгоритмов для вычисления всех составляющих этих матриц. Как и при использовании рекуррентного метода, расчеты на каждом шаге проводят при заданных $\mathbf{q}^{(i)}$, $\dot{\mathbf{q}}^{(i)}$, что приводит к получению соотношения для ускорений (5.58), которое дважды интегрируется.

5.4. Показатели динамических свойств манипулятора

5.4.1. Эллипсоид допустимых ускорений

С помощью рассмотренных выше уравнений кинестатики можно исследовать возможности манипуляционного механизма развивать ускорения в каждой точке рабочего пространства. Эти возможности, конечно, ограничены, поскольку ограничены развиваемые двигателями манипулятора силы и моменты. Знание допустимых ускорений необходимо при планировании сложных движений, когда решение задачи зависит от выбора законов разгона и торможения. Характерным примером может служить задача перемещения полезной нагрузки с помощью космического манипулятора.

Другая проблема, связанная с анализом развиваемых сил и моментов, — это их планирование, например при выполнении роботом операции по механообработке с помощью специального инструмента. Во многих случаях учет развиваемых сил только на основе уравнений статики (5.8) недостаточен и неучет динамических эффектов может серьезно снизить точность и качество выполняемой операции.

Обратимся к уравнению динамики манипулятора в форме Даламбера (5.52), которое запишем в виде

$$\mathcal{A}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{M}, \quad (5.64)$$

где

$$\mathbf{M} = \boldsymbol{\mu} + B_v^T(\mathbf{q})\mathbf{F}_s + B_{\omega}^T(\mathbf{q})\mathbf{M}_s + \mathcal{B}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}. \quad (5.65)$$

Согласно уравнениям кинематики, для ускорения схвата манипулятора можно записать выражение (3.40):

$$\mathbf{w}_N = J_v(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \dot{J}_v(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}, \quad (5.66)$$

где $J_v(\mathbf{q})$ — якобиева матрица, а $\dot{J}_v(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ — ее производная. Заметим, что блочные векторы образованы последними строками матриц $B_v(\mathbf{q})$ и $\dot{B}_v(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ и могут быть вычислены по формулам, приведенным в п. 3.1.3.

Из уравнений (5.64) и (5.66) следует, что с учетом уравнений динамики развиваемые характерной точкой схвата манипулятора ускорения связаны с моментами и силами, развиваемыми двигателями следующей зависимостью:

$$\mathbf{w}_N = J_v(\mathbf{q})\mathcal{A}^{-1}(\mathbf{q})\mathbf{M} + \dot{J}_v(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} = J_v(\mathbf{q})\mathcal{A}^{-1}(\mathbf{q})\boldsymbol{\mu} + \mathcal{C}(\mathcal{F}_s, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}), \quad (5.67)$$

где

$$C(\mathcal{F}_v, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = J_v(\mathbf{q}) \mathcal{A}^{-1}(\mathbf{q}) [B_v^T(\mathbf{q}) \mathbf{F}_v + B_w^T(\mathbf{q}) \mathbf{M}_v + B(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}}] + J_v(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}}.$$

В частности, если предположить, что внешние силы и моменты отсутствуют, а $\dot{\mathbf{q}}(t_0) = 0$, т.е. манипулятор в начальный момент времени неподвижен, то $C(\mathcal{F}_v, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = 0$ и полученное выражение примет вид

$$\mathbf{w}_N = J_v(\mathbf{q}) \mathcal{A}^{-1}(\mathbf{q}) \boldsymbol{\mu}. \quad (5.68)$$

Эта формула определяет абсолютное ускорение \mathbf{w}_N , которое может быть развито манипулятором из неподвижного состояния, определяемого вектором обобщенных координат $\mathbf{q}(t_0)$.

Если развиваемые силы (моменты) ограничены по модулю $|\mu_i| \leq \mu_{i \max}$, то выражение (5.68) позволяет определить область допустимых ускорений в данной точке рабочего пространства в виде

$$|\mathbf{w}_{N_i}| \leq \left| \sum_{j=1}^N d_{ij} \right| \mu_{i \max}, \quad (5.69)$$

где d_{ij} — компоненты матрицы $J_v(\mathbf{q}) \mathcal{A}^{-1}(\mathbf{q})$. Эта область определяет параллелепипед, центром которого является исследуемая точка.

Если ограничения наложены на суммарный средний момент, развиваемый двигателями манипулятора:

$$(\boldsymbol{\mu}^T \boldsymbol{\mu})^{1/2} = \|\boldsymbol{\mu}\| \leq \mu^*,$$

то для кинематической схемы без избыточности из уравнения (5.68) получим неравенство

$$\mathbf{w}_N^T (\mathcal{A} J_v^{-1})^T \mathcal{A} J_v^{-1} \mathbf{w}_N \leq (\mu^*)^2. \quad (5.70)$$

Это неравенство описывает эллипсоид реализуемых в данной точке ускорений. Аналогичное неравенство можно получить и для кинематической схемы с избыточностью, если заменить J_v^{-1} на матрицу J_v^+ , вычисляемую с помощью псевдообращения (см. п. 3.3.4).

Ориентацию эллипсоида реализуемых ускорений в рабочем пространстве и длину его полуосей нетрудно определить, вычислив собственные числа и собственные векторы для симметрической матрицы

$$(J_v^{-1})^T \mathcal{A}^T \mathcal{A} J_v^{-1} = P^T \text{diag}(\lambda_i) P,$$

где P — матрица ортогонального преобразования, приводящего ее к диагональному виду.

Собственные числа λ_i вещественны и положительны. Обозначим $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_N$. Тогда величины $\sigma_i = \lambda_i^{-1/2}$, $i = 1, \dots, N$, определяют полуоси главных осей эллипсоида допустимых ускорений, при этом $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_N$.

5.4.2. Динамическая манипулятивность. Приемистость

Произведение

$$C_1(\mathbf{q}) = \prod_{i=1}^N \sigma_i \quad (5.71)$$

характеризует объем эллипсоида возможных ускорений. Чем больше этот объем, тем выше динамические возможности манипулятора. В связи с этим показатель $C_1(\mathbf{q})$ называют мерой динамической манипулятивности. Его можно вычислить, не определяя собственных чисел λ_i , поскольку

$$C_1(\mathbf{q}) = (\det J_v (\mathcal{A}^T \mathcal{A})^{-1} J_v^T)^{1/2}. \quad (5.72)$$

Для манипуляторов без избыточности, имеющих квадратную якобиеву матрицу, справедлива следующая формула:

$$C_1(\mathbf{q}) = \det J_v / \det \mathcal{A}. \quad (5.73)$$

Отношение минимальной оси эллипсоида к максимальной

$$C_2(\mathbf{q}) = \sigma_N / \sigma_1 \quad (5.74)$$

определяет равномерность распределения векторов ускорения по направлению, т.е. близость эллипсоида к сфере. Если, в частности, $C_2(\mathbf{q}) = 1$, то при соответствующей конфигурации манипулятора значение допустимого ускорения не зависит от его направления. Такое условие называют условием изотропности ускорения.

Показатель

$$C_3(\mathbf{q}) = \sigma_N = \min_i \sigma_i \quad (5.75)$$

определяет радиус сферы, вписанной в эллипсоид допустимых ускорений:

$$\|w_N\|^2 \leq C_3(\mu^*)^2, \quad (5.76)$$

т.е. тот диапазон значений ускорений, для которого выполняется условие изотропности.

Величина

$$C_4(q) = \sigma_1 = \max_i \sigma_i \quad (5.77)$$

характеризует максимальное значение ускорения, развиваемое вдоль главной оси эллипсоида допустимых ускорений:

$$\|w_N\|^2 \leq C_4(\mu^*)^2. \quad (5.78)$$

Перечисленные показатели динамических свойств манипулятора $C_1 \dots C_4$ называют *показателями приемистости*, имея в виду возможность манипулятора развивать ускорение w_{N0} из состояния покоя. Эти характеристики используют как для выбора манипулятора с целью реализации технологического процесса с заданным темпом работы, так и для планирования траекторий таким образом, чтобы иметь возможность выгодно размещать стартовые точки в рабочей зоне.

Помимо локальных показателей, вычисленных для одной конфигурации, используют обобщенные показатели, которые определяются для некоторой области $q \in Q$ пространства обобщенных координат, в частности вдоль программной траектории. Например, показатель $\bar{C}_3 = \min_{q \in Q} C_3(q)$ определяет диапазон ускорений, при котором гарантируется независимость величины ускорения от его направления на всем множестве Q . Аналогично величину $\bar{C}_1 = \min_{q \in Q} C_1(q)$ можно использовать для оценки динамической манипулятивности во всей рабочей зоне Q .

Если условие $\dot{q}(t_0) = 0$ не соблюдается, то нарушается и уравнение эллипсоида допустимых ускорений ввиду появления составляющих $C(F_v, q_0, \dot{q}_0)$ в правой части выражения (5.67).

При наличии внешних сил можно выбрать управляющий вектор сил (моментов) $\hat{\mu}$, обеспечивающий динамическую компенсацию внешних сил, моментов и составляющих, зависящих от скорости:

$$\begin{aligned} \hat{\mu} &= \mu - B_v^T F_v - B_\omega^T M_\omega - \mathcal{B}(q, \dot{q})\dot{q} - \mathcal{A}(q)J_v^{-1}(q)J_v(q, \dot{q})\dot{q} = \\ &= \mu - \mathcal{A}(q)J_v^{-1}(q)C(F_v, q, \dot{q}). \end{aligned} \quad (5.79)$$

Для вектора $\hat{\mu}$ можно построить те же эллипсоиды допустимых ускорений, что и в предыдущем случае. Однако, при расчете ограничений (5.76) или (5.78), от которых зависят параметры эллипсоидов, необходимо учитывать и выражение $C(F_v, q, \dot{q})$. Например, при определении ограничений на средний суммарный момент (силу), получим вместо (5.69) следующее уравнение:

$$\begin{aligned} \hat{\mu}^* = \|\hat{\mu}\| &\leq \mu^* - \left(\mu - \mathcal{A}(q)J_v^{-1}(q)C(F_v, q, \dot{q}) \right)^{1/2} + \\ &+ \left[C^T(F_v, q, \dot{q})(J_v^{-1}(q))^{-1} \mathcal{A}^T(q) \mathcal{A}(q)J_v^{-1}(q)C(F_v, q, \dot{q}) \right]^{1/2}. \end{aligned}$$

Таким образом, параметры эллипсоида допустимых ускорений

$$w_N^T (\mathcal{A} J_v^{-1})^{-1} \mathcal{A} J_v^{-1} w_N \leq \mu$$

изменяются в зависимости от скоростей \dot{q}_0 , а также вектора внешних сил и моментов F_v , действующих на манипулятор в рассматриваемой точке q_0 рабочей зоны. В таком наиболее общем случае введенные выше показатели называют *показателями динамической манипулятивности* (см. Т. Йошикава [81]).

5.4.3. Вычисление показателей динамических свойств манипулятора

Практическое вычисление показателей динамических свойств манипулятора, рассмотренных выше, поясним на примере.

Пример 5.3. Определить показатели динамических свойств плоского двухзвенного манипулятора (рис. 5.8). Двигатель второй кинематической пары, также как и первой, находится на неподвижном основании, и, следовательно, угол q_2 , как и q_1 , отсчитывается от оси OY неподвижной системы координат. Такой манипулятор называют манипулятором с параллельной установкой двигателей. Рабочее пространство манипулятора задается ограничениями $50^\circ \leq q_2 - q_1 \leq 140^\circ$; известны также массы стержневых звеньев m_1, m_2 , их

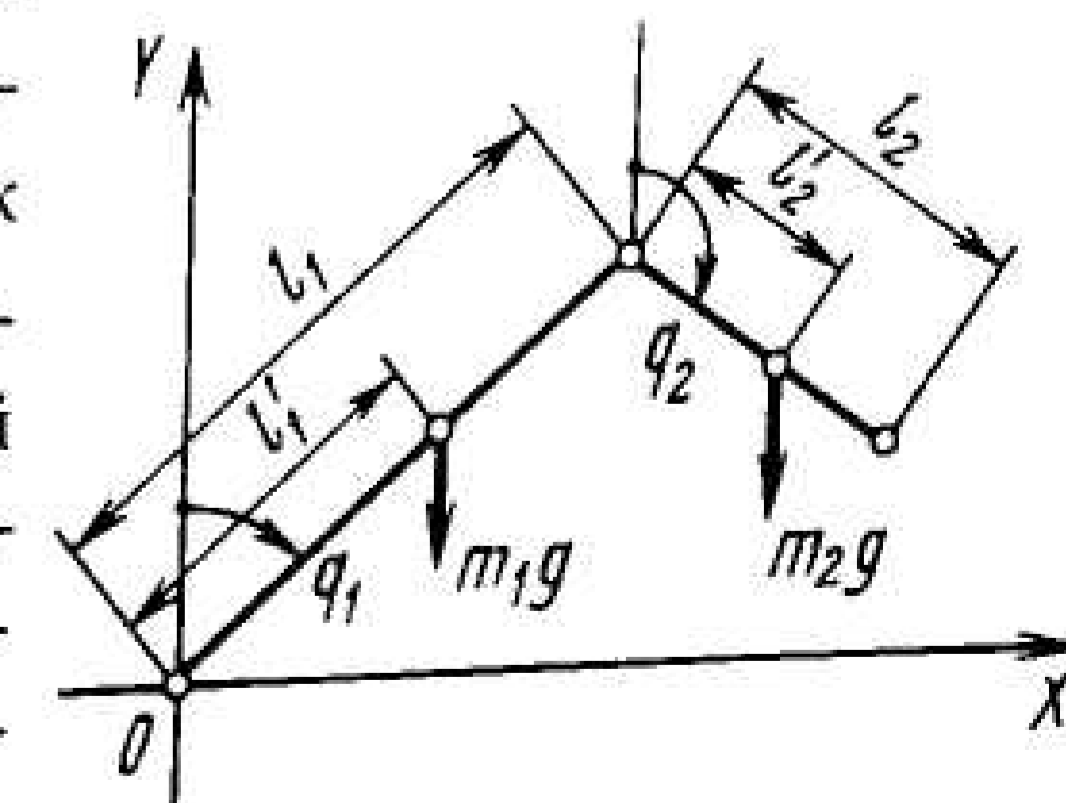


Рис. 5.8. Схема плоского двухзвенного манипулятора

моменты инерции I_1 , I_2 и необходимые линейные размеры. Масса нагрузки является точечной; она приведена к центру масс второго звена.

Решение. Необходимо вначале определить матрицы $J_v(\mathbf{q})$, $A(\mathbf{q})$. В данном случае

$$\begin{aligned}x_N &= l_1 \sin q_1 + l_2 \sin q_2, \\y_N &= l_1 \cos q_1 + l_2 \cos q_2,\end{aligned}$$

следовательно,

$$\begin{aligned}\dot{x}_N &= \dot{q}_1 l_1 \cos q_1 + \dot{q}_2 l_2 \cos q_2; \\ \dot{y}_N &= -\dot{q}_1 l_1 \sin q_1 - \dot{q}_2 l_2 \sin q_2.\end{aligned}$$

Таким образом

$$J_v(\mathbf{q}) = \begin{pmatrix} l_1 \cos q_1 & l_2 \cos q_2 \\ -l_1 \sin q_1 & -l_2 \sin q_2 \end{pmatrix}.$$

Найдем ускорение центров масс звеньев. Для нагрузки (N -го звена) ускорение центра масс получим путем дифференцирования предыдущих формул:

$$\begin{aligned}\ddot{x}_N &= -\dot{q}_1^2 l_1 \sin q_1 + \ddot{q}_1 l_1 \cos q_1 - \dot{q}_2^2 l_2 \sin q_2 + \ddot{q}_2 l_2 \cos q_2, \\ \ddot{y}_N &= -\dot{q}_1^2 l_1 \cos q_1 - \ddot{q}_1 l_1 \sin q_1 - \dot{q}_2^2 l_2 \cos q_2 - \ddot{q}_2 l_2 \sin q_2.\end{aligned}$$

Аналогичные формулы получим для движения центра масс второго звена, если в них вместо l_1 и l_2 подставим l'_1 и l'_2 (см. рис. 5.8).

Для центра масс первого звена запишем следующие соотношения:

$$\begin{aligned}x_1 &= l'_1 \sin q_1, & y_1 &= l'_1 \cos q_1, \\ \dot{x}_1 &= \dot{q}_1 l'_1 \cos q_1, & \dot{y}_1 &= -\dot{q}_1 l'_1 \sin q_1, \\ \ddot{x}_1 &= -\dot{q}_1^2 l'_1 \sin q_1 + \ddot{q}_1 l'_1 \cos q_1, & \ddot{y}_1 &= -\dot{q}_1^2 l'_1 \cos q_1 - \ddot{q}_1 l'_1 \sin q_1.\end{aligned}$$

В матричной форме кинематические соотношения имеют вид

$$\mathbf{v} = B_v(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}},$$

где

$$\begin{aligned}\mathbf{v} &= [\dot{x}_1 \ \dot{y}_1 \ \dot{x}_2 \ \dot{y}_2]^T, \\ \dot{\mathbf{q}} &= [\dot{q}_1 \ \dot{q}_2]^T, \\ B_v(\mathbf{q}) &= \begin{pmatrix} l'_1 \cos q_1 & -l'_1 \sin q_1 & l_1 \cos q_1 & -l_1 \sin q_1 \\ 0 & 0 & l'_2 \cos q_2 & -l'_2 \sin q_2 \end{pmatrix}^T, \\ \mathbf{w} &= B_v(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \dot{B}_v(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}},\end{aligned}$$

причем

$$\dot{B}_v(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} = \begin{pmatrix} -l'_1 \sin q_1 & -l'_1 \cos q_1 & -l_1 \sin q_1 & -l_1 \cos q_1 \\ 0 & 0 & -l'_2 \sin q_2 & -l'_2 \cos q_2 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \dot{q}_1^2 \\ \dot{q}_2^2 \end{pmatrix}.$$

Запишем теперь уравнения кинестатики в матричной форме (5.51):

$$\boldsymbol{\mu} = -B_v^T(\mathbf{q})(\mathbf{F}_g + \mathbf{F}_I) - B_v^T(\mathbf{q})\mathbf{M}_I,$$

где

$$\boldsymbol{\mu} = (\mu_1 \ \mu_2)^T, \quad \mathbf{F}_I = (-m_1 \ddot{r}_1 \ -m_2 \ddot{r}_2)^T, \quad B_v^T(\mathbf{q}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{M}_I = (-I_1 \ddot{q}_1 \ -I_2 \ddot{q}_2)^T, \quad \mathbf{F}_g = (0 \ -m_1 g \ 0 \ -m_2 g)^T.$$

Выполняя необходимые действия, получаем

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\mu} &= \begin{pmatrix} I_1 + I_2 + m_1 (l'_1)^2 + m_2 l_1^2 & m_2 l_1 l'_2 \cos(q_1 - q_2) \\ m_2 l_1 l'_2 \cos(q_1 - q_2) & m_2 (l'_2)^2 + I_2 \end{pmatrix} \ddot{\mathbf{q}} - \\ &- \begin{pmatrix} l'_1 m_1 g \sin q_1 + l_1 m_2 g \sin q_1 \\ m_2 l'_2 g \sin q_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m_2 l_1 l'_2 \sin(q_1 - q_2) \dot{q}_2^2 \\ m_2 l_1 l'_2 \sin(q_2 - q_1) \dot{q}_1^2 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Таким образом,

$$A(\mathbf{q}) = \begin{pmatrix} I_1 + I_2 + m_1 (l'_1)^2 + m_2 l_1^2 & m_2 l_1 l'_2 \cos(q_1 - q_2) \\ m_2 l_1 l'_2 \cos(q_1 - q_2) & m_2 (l'_2)^2 + I_2 \end{pmatrix}.$$

Если силы тяжести отсутствуют (или их влияние устранено системами разгрузки) и $\dot{\mathbf{q}}(t_0) = 0$ (см. с. 220), то

$$\boldsymbol{\mu} = A(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}}$$

и, задавая ограничения $\boldsymbol{\mu}^*$ по формуле (5.70), можно рассчитать эллипсоиды допустимых ускорений для каждой из конфигураций.

В частности, при $l_1 = l_2 = 1$ м, $m_1 = 20$ кг, $m_2 = 10$ кг, $m_n = 5$ кг, $l'_1 = 0,5$ м, $l'_2 = 0,3$ м, $I_1 = 1,67$ кг·м², $I_2 = 0,73$ кг·м², $\boldsymbol{\mu}^* = 5880$ Н·м эллипсоиды допустимых ускорений построены на рис. 5.9 вдоль оси Ox , т.е. для траектории, удовлетворяющей условию

$$l_1 \cos q_1 + l_2 \cos q_2 = 0.$$

Из рис. 5.9 ясно, что вдоль траектории изменяется направление главных осей, а следовательно, и направление, вдоль которого можно развить максимальное ускорение. Кроме того, изменяется и радиус сферы,

вписанной в эллипсоид, т.е. показатель $C_3(q)$. В вырожденных ситуациях (начало и конец отрезка 0-2) этот радиус равен нулю, при $x = 1,5$ м он достигает максимального значения $19,5 \text{ м/с}^2$.

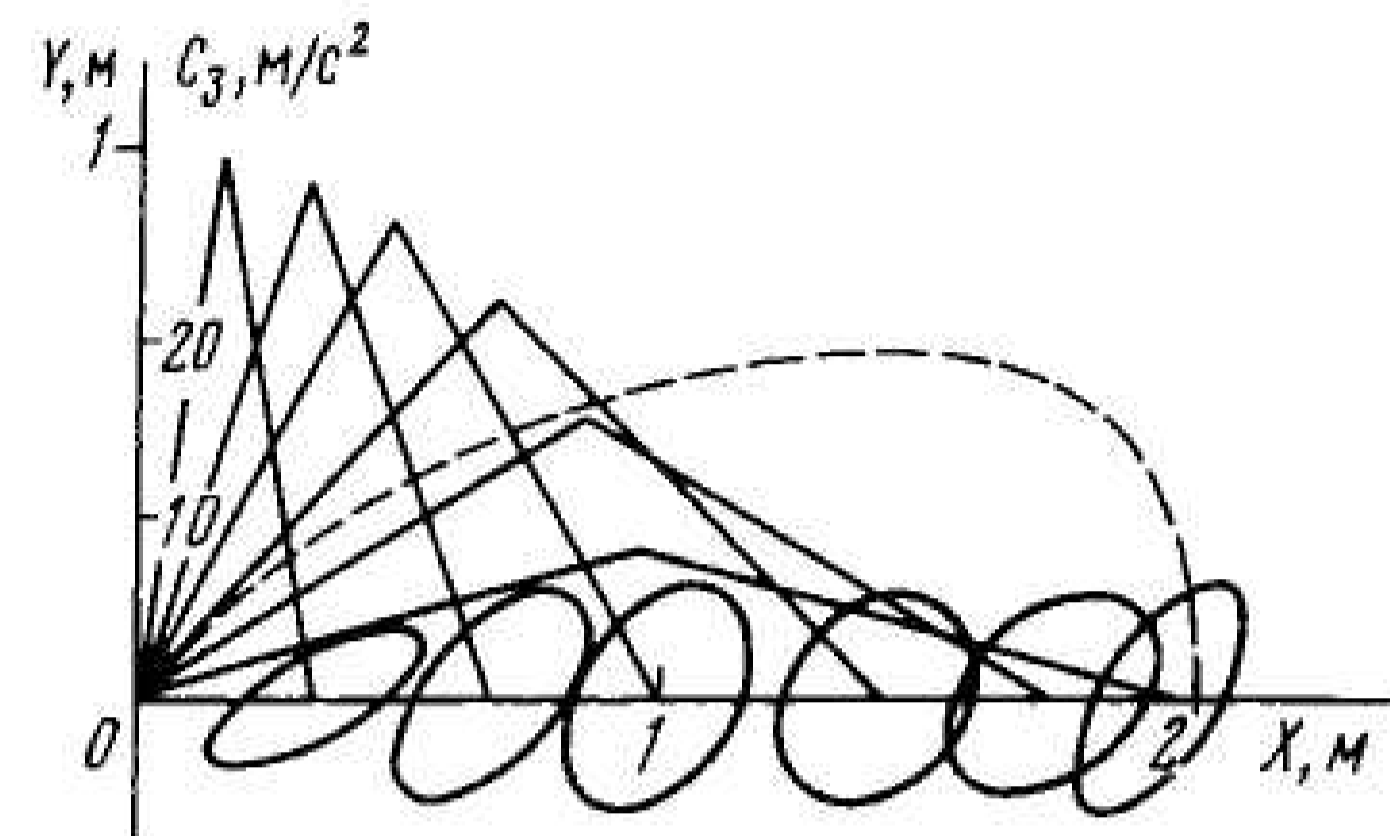


Рис. 5.9. Эллипсоиды допустимых ускорений без учета сил тяжести

При учете сил тяжести часть мощности двигателей будет использована на их преодоление; в этом случае

$$\hat{\mu} = A(q)\ddot{q} - B_v^T F_g,$$

т.е. $\hat{\mu}$ определяется формулой (5.79), в которой следует положить

$$B_v^T F_g = \begin{pmatrix} (l_1' m_1 g + l_1 m_2 g) \sin q_1 \\ m_2 l_2' g \sin q_2 \end{pmatrix}.$$

В этом случае направления главных осей эллипсов допустимых ускорений не изменяются, но уменьшаются их размеры (рис. 5.10), причем максимальное значение $C_3(q)$ в этом случае равно $13,26 \text{ м/с}^2$.

Показатель $C_3(q)$ можно улучшить за счет перераспределения масс звеньев. Так, при $l_2' = 0$, т.е. обеспечив центр масс второго звена в центре второго шарнира, можно повысить $\max C_3(q)$ до 16 м/с^2 [81]. В последнем случае матрица $A(q)$ становится диагональной и не зависящей от конфигурации манипулятора:

$$\det A(q) = (I_1 + I_2 + m_1 (l_1')^2 + m_2 l_1^2) I_2.$$

Поскольку

$$\det J_v(q) = l_1 l_2 \sin(q_1 - q_2),$$

то показатель динамической манипулятивности

$$C_1(q) = \left(\frac{\det J_v(q)}{\det A(q)} \right)^{1/2} = \left(\frac{l_1 l_2 \sin(q_1 - q_2)}{(I_1 + I_2 + m_1 (l_1')^2 + m_2 l_1^2) I_2} \right)^{1/2}.$$

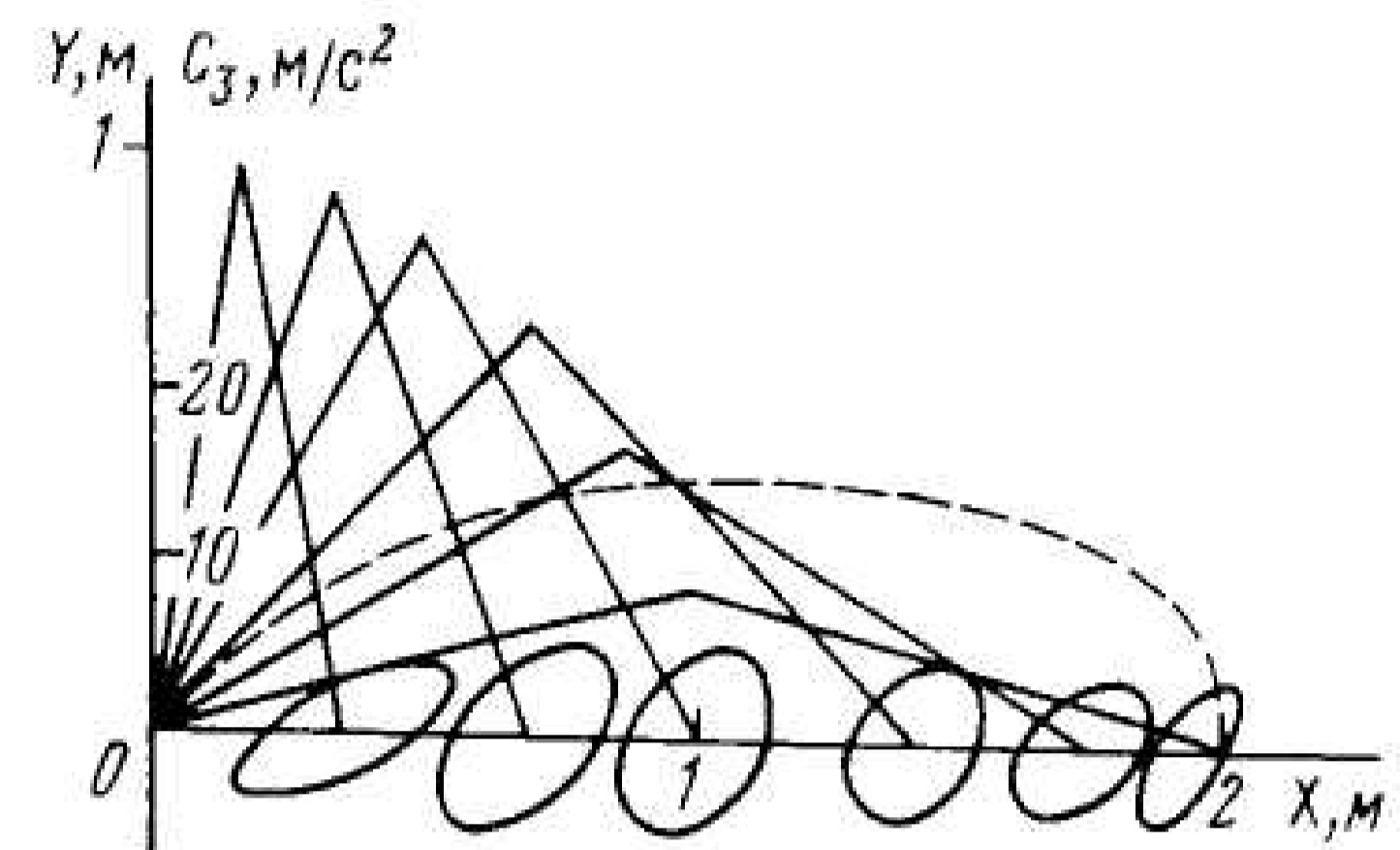


Рис. 5.10. Эллипсоиды допустимых ускорений с учетом сил тяжести

Видно, что показатель $C_1(q)$ равен нулю в начале и конце рассматриваемого отрезка $[0, 2]$. Максимум динамической манипулятивности достигается при условии $q_1 - q_2 = \pi/2$, т.е. когда звенья образуют прямой угол.

Показатель $C_3(q)$ также нетрудно вычислить в рассматриваемом случае, определяя собственные числа матрицы $J_v A^{-1}$ из условия

$$\det(J_v A^{-1} - \lambda E) = \lambda^2 - \lambda(-l_2 / A_{22}) \sin q_2 + (l_1 / A_{11}) \cos q_1 + (l_1 l_2 / A_{11} A_{22}) \sin(q_1 - q_2) = 0,$$

где

$$A_{11} = I_1 + I_2 + m_1 (l_1')^2 + m_2 l_1^2, \\ A_{22} = I_2.$$

Таким образом,

$$C_3(q) = \min \sigma_{1,2} = \left[\frac{1}{2} \left(\frac{l_1 \cos q_1}{A_{11}} - \frac{l_2 \sin q_2}{A_{22}} \right) - \left[\left(\frac{l_1 \cos q_1}{A_{11}} - \frac{l_2 \sin q_2}{A_{22}} \right)^2 \frac{1}{4} - \frac{l_1 l_2}{A_{11} A_{22}} \sin(q_1 - q_2) \right]^{1/2} \right].$$

Максимум этого показателя, т.е. максимальный радиус окружности, вписанной в эллипс допустимых ускорений, также достигается при $q_1 - q_2 = \pi/2$ (рис. 5.11). С учетом условия

$$l_1 \cos q_1 + l_2 \cos q_2 = 0$$

нетрудно увидеть, что в этом случае

$$q_1 = \arctg l_1 / l_2, \quad \cos q_1 = (l_2 / (l_1 + l_2))^{1/2}, \quad \sin q_2 = -\cos q_1,$$

и, следовательно,

$$C_3(\mathbf{q}) = \frac{(l_1 A_{22} + l_2 A_{11}) l_2^{1/2}}{2(l_1 + l_2)^{1/2} A_{11} A_{22}} \left[\frac{(l_1 A_{22} + l_2 A_{11})^2 l_2}{4 A_{11}^2 A_{22}^2 (l_1 + l_2)} - \frac{l_1 l_2}{A_{11} A_{22}} \right]^{1/2}.$$

Эллипсы допустимых ускорений для этого случая при $l'_1 = 0,4$ м, построенные с учетом сил тяжести, показаны на рис. 5.11.

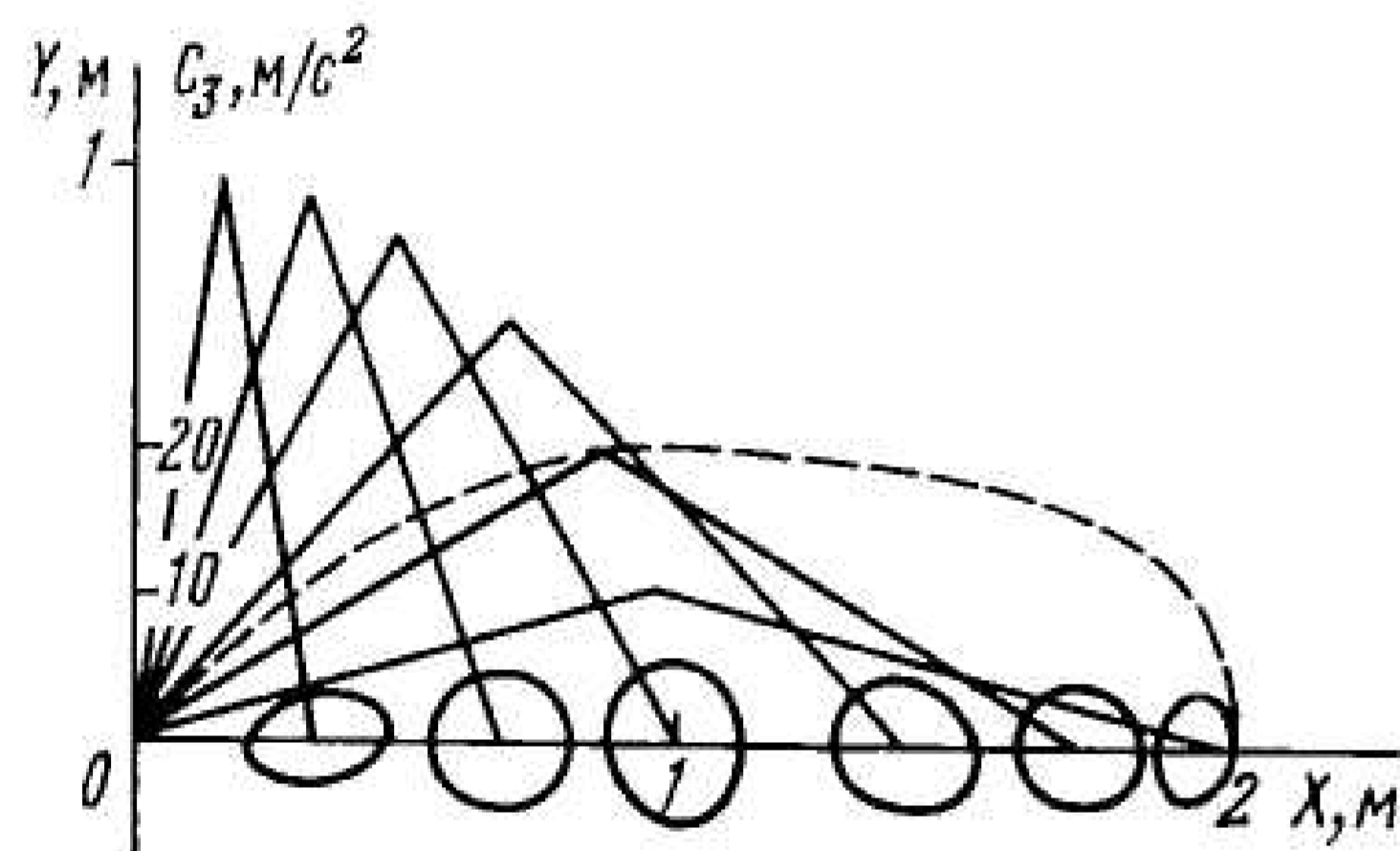


Рис. 5.11. Эллипсоиды допустимых ускорений при $l'_2 = 0$ с учетом сил тяжести

Заметим, что при использовании манипулятора с последовательной установкой двигателей, т.е. когда q_2 определяется как угол между первым и вторым звеньями, показатель $C_3(\mathbf{q})$ оказывается несколько хуже при тех же параметрах. Вследствие этого схема параллельного типа является предпочтительной.

Контрольные вопросы и задания

1. Запишите уравнение статического равновесия (5.8): а) для трехзвенного манипулятора, содержащего только поступательные кинематические пары; б) для трехзвенного манипулятора, содержащего только пары вращения; в) для шестизвенного манипулятора типа PUMA-560, у которого первые три пары вращательные, а три последующие — поступательные.

2. На основе уравнений (5.13), (5.14) составьте общее уравнение рекурсии для определения сил и моментов μ , когда манипулятор имеет как поступательные, так и вращательные пары.

3. Напишите соотношение, определяющее силу реакции и момент реакции опоры манипулятора: а) имеющего три вращательные пары, образованные звеньями, расположенными в одной плоскости; б) имеющего кинематическую схему типа SCARA.

4. Объясните, почему для вычисления сил и моментов, действующих на звенья манипулятора, целесообразно применять метод обратной рекурсии.

5. Составьте алгоритм вычисления сил и моментов реакции звеньев манипулятора, имеющего плоскую трехзвенную конструкцию с вращательными парами, если заданы значения обобщенных координат, т.е. текущее положение манипулятора.

6. Составьте алгоритм вычисления эллипсов развиваемых сил для плоского двухзвенного манипулятора.

7. Поясните, для решения каких практических задач можно использовать эллипсоиды развиваемых манипулятором сил.

8. Что характеризуют главные оси эллипсоида сил: их величины или направления?

9. Запишите рекуррентные соотношения, позволяющие вычислить силы и моменты инерции одновременно с компонентами скоростей и ускорений.

10. Сформулируйте первую и вторую задачи динамики применительно к манипуляционному механизму.

11. Запишите уравнения кинестатики для плоского трехзвенного механизма с вращательными парами.

12. Запишите уравнение кинестатики для трехзвенного механизма с поступательными парами, работающего в декартовой системе координат.

13. Запишите блочные матрицы A , B , J , для механизмов, рассмотренных в п. 11 и 12.

14. Как определяется эллипсоид допустимых ускорений?

15. Что такое мера динамической манипулятивности?

16. Что характеризует условие равномерности распределения векторов ускорения?

17. Чем характеризуется свойство приемистости манипулятора?

18. Как определяются показатели динамической манипулятивности?

6. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ МАНИПУЛЯТОРА В ФОРМЕ ЛАГРАНЖА. ПРИНЦИП ГАУССА

В главе 5 подробно рассматривалось применение метода кинетостатики для анализа динамических свойств манипуляторов. Наряду с концептуальной простотой, удобством для составления компьютерных программ моделирования движения, метод обладает ограничениями. Так, существенные трудности возникают при наложении дополнительных кинематических связей на движение звеньев исполнительного механизма робота. Это может иметь место, например, при анализе движения манипулятора, кинематическая цепь которого содержит замкнутые контуры, или при выполнении с помощью манипулятора различных механических операций, таких, как сборка, обработка поверхности. Для анализа динамики манипуляционных механизмов в подобных случаях более эффективными оказываются модели движения в форме уравнений Лагранжа, а также применение принципа наименьшего принуждения Гаусса. Другой причиной, способствовавшей широкому применению этих методов, является поиск подходов, позволяющих получить численные алгоритмы моделирования движения сложных механизмов, наиболее эффективные с точки зрения затрат машинного времени.

В главе 6 кратко изложены методы, основанные на уравнениях Лагранжа и применении принципа Гаусса для анализа динамики манипуляторов. Более подробно эти методы описаны в литературе [7; 45].

6.1. Уравнения Лагранжа второго рода

6.1.1. Структура уравнения

Уравнения Лагранжа второго рода применяют в предположении идеальности всех связей, наложенных на движение системы тел. Эти

связи могут быть только голономными*. При составлении уравнений Лагранжа вначале необходимо определить вектор обобщенных координат, включающий в себя минимальное число независимых параметров, однозначно определяющих движение системы.

Выберем в качестве вектора обобщенных координат, как и в гл. 5, вектор q относительных перемещений звеньев. Рассмотрим механизм, образующий разомкнутую кинематическую цепь, не имеющую точек ветвления.

Уравнение Лагранжа второго рода для этого механизма имеет следующий вид:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}} \right) - \left(\frac{\partial K}{\partial q} \right) = Q, \quad (6.1)$$

где K — кинетическая энергия механизма; Q — вектор обобщенных сил.

Используя обозначения, принятые в гл. 5, запишем выражение для кинетической энергии

$$K = \frac{1}{2} (\omega^T I \omega + v^T m v) = \frac{1}{2} \dot{x}^T M_x \dot{x}, \quad M_x = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix},$$

где $\dot{x} = (v \ \omega)^T$ — вектор линейных и угловых скоростей звеньев в абсолютной системе координат; m, I — матрицы, компоненты которых соответствуют массам и тензорам инерции звеньев.

Согласно формулам, приведенным в п. 3.1.3, получаем

$$\dot{x} = B^T \dot{q};$$

и, следовательно,

$$K = \frac{1}{2} \dot{q}^T A \dot{q}, \quad (6.2)$$

где

$$A = B_v^T m B_v + B_\omega^T I B_\omega = B^T M_x B \quad (6.3)$$

матрица, полученная нами при составлении уравнения движения в форме Даламбера (см. (5.52)).

Заметим, что процедуру составления матрицы A можно интерпретировать как результат наложения геометрических связей, обусловленных кинематической схемой манипуляционного механизма

* Напомним, что голономными называют связи, наложенные только на координаты системы (геометрические связи).

$$\mathbf{x} = f(\mathbf{q}), \quad (6.4)$$

на движение его звеньев. Если обозначить якобиеву матрицу преобразования (6.4)

$$J_f(\mathbf{q}) = \left(\frac{\partial f_i(\mathbf{q})}{\partial q_j} \right),$$

то получим

$$K = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T J_f^T(\mathbf{q}) M_x J_f(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} A &= J_f^T(\mathbf{q}) M_x J_f(\mathbf{q}), \\ B &= J_f(\mathbf{q}). \end{aligned} \quad (6.5)$$

Обобщенные силы в уравнении (6.1) $\mathbf{Q} = (Q_1 \ Q_2 \ \dots \ Q_N)^T$ определяют исходя из того, что элементарная работа всех действующих на систему активных сил может быть представлена в виде

$$\delta A = \sum_{i=1}^N Q_i \delta q_i = \delta \mathbf{q}^T \mathbf{Q}. \quad (6.6)$$

На манипулятор действуют внешние силы и моменты \mathbf{F}_b , \mathbf{M}_b , а также силы и моменты $\boldsymbol{\mu}$, развиваемые двигателями в степенях подвижности. Вычислим элементарную работу этих сил при изменении обобщенных координат $\delta \mathbf{q}$. С учетом формул, приведенных в гл. 5, получим

$$\delta \mathbf{q}^T \mathbf{Q} = \delta \mathbf{q}^T (B_v^T \mathbf{F}_b + B_\omega^T \mathbf{M}_b + \boldsymbol{\mu}). \quad (6.7)$$

Это равенство должно выполняться для любых $\delta \mathbf{q}$, следовательно,

$$\mathbf{Q} = B_v^T \mathbf{F}_b + B_\omega^T \mathbf{M}_b + \boldsymbol{\mu} = B^T \mathbf{F}_b + \boldsymbol{\mu}. \quad (6.8)$$

Пусть, в частности, $\mathbf{M}_b = 0$, а внешние силы — потенциальные. Тогда существует такая непрерывная и дифференцируемая функция $U = U(q_1, \dots, q_N)$ (потенциал), для которой выполняется соотношение

$$B_v^T \mathbf{F}_b = \text{grad} U = \left(\frac{\partial U}{\partial q_1} \ \dots \ \frac{\partial U}{\partial q_N} \right)^T,$$

а значит,

$$\mathbf{Q} = \text{grad} U + \boldsymbol{\mu}. \quad (6.9)$$

Уравнение Лагранжа (6.1) в этом случае можно записать в виде

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} = \boldsymbol{\mu}, \quad (6.10)$$

где $L = K + U$ — кинетический потенциал (функция Лагранжа).

В частности, если система находится только под действием сил тяжести, то $\mathbf{F}_b = G$, а $U = -V$, где V — потенциальная энергия механизма. Ее нетрудно вычислить по формуле

$$V = \sum_{i=1}^N m_i g \rho_{0i}. \quad (6.11)$$

Здесь ρ_{0i} — радиус-векторы центров масс звеньев относительно начала неподвижной системы координат.

6.1.2. Связь между уравнением Лагранжа и уравнением кинетостатики

Для рассмотренной в п. 6.1.1. разомкнутой кинематической цепи без точек ветвления уравнение Лагранжа второго рода после необходимых преобразований совпадет с уравнением движения (5.52), полученным выше по принципу кинетостатики. Чтобы показать это, найдем составляющие уравнения (6.1). С учетом симметрии матрицы $A(\mathbf{q})$ получим

$$\frac{\partial K}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = A(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}.$$

Таким образом,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) = A(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + \frac{d}{dt} (A(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}) = A(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + \dot{A}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}, \quad (6.12)$$

где $\dot{A}(\mathbf{q}) = \hat{A}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \left(\frac{da_{ij}}{dt} \right) = \left(\sum_{k=1}^N \frac{\partial a_{ij}}{\partial q_k} \dot{q}_k \right)$, $a_{ij}(\mathbf{q})$ — элементы матрицы $A(\mathbf{q})$.

Последнее выражение можно определить путем непосредственного дифференцирования по времени матрицы $A(\mathbf{q})$, полученной выше в виде (6.3):

$$\dot{A}(\mathbf{q}) = \hat{A}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \dot{B}^T M_x B + B^T M_x \dot{B}.$$

Далее находим с учетом (6.2)

$$\frac{\partial K}{\partial \mathbf{q}} = \left(\frac{\partial K}{\partial q_1} \quad \frac{\partial K}{\partial q_2} \quad \dots \quad \frac{\partial K}{\partial q_N} \right)^T = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \left(\frac{\partial A(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}}{\partial \mathbf{q}} \right). \quad (6.13)$$

Выражение, заключенное в скобки в правой части равенства (6.13), можно представить в виде

$$\frac{\partial A(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}}{\partial \mathbf{q}} = \left(\frac{\partial}{\partial q_1} A(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \quad \dots \quad \frac{\partial}{\partial q_N} A(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \right),$$

где

$$A(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} = \left(\sum_{j=1}^N a_{1j} \dot{q}_j \quad \dots \quad \sum_{j=1}^N a_{Nj} \dot{q}_j \right)^T.$$

Таким образом, это выражение определяет $N \times N$ -матрицу вида

$$\frac{\partial A(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}}{\partial \mathbf{q}} = \left(\sum_{j=1}^N \dot{q}_j \frac{\partial a_{ij}}{\partial q_k} \right); \quad i, k = 1, \dots, N. \quad (6.14)$$

Подставляя выражения (6.8), (6.12) и (6.13) в уравнение (6.1), имеем

$$A(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + \left(\dot{A}(\mathbf{q}) - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial A(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \right) \dot{\mathbf{q}} = \mathcal{B}^T(\mathbf{q}) \mathcal{F}_b + \boldsymbol{\mu}. \quad (6.15)$$

Вычисляя производные матрицы $A(\mathbf{q})$ в аналитической форме, получаем уравнение движения манипулятора в форме (5.52).

6.1.3. Численное решение уравнений движения

Выше мы рассмотрели способы численного решения уравнения (5.52). Однако для этого, т.е. для моделирования движения манипулятора, можно использовать и непосредственно уравнение (6.15). В этом случае на n -м шаге по значениям $\mathbf{q}^{(n)}$, $\dot{\mathbf{q}}^{(n)}$ методом конечных разностей вычисляются производные $\dot{A}(\mathbf{q})$ и $\frac{\partial A(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}}{\partial \mathbf{q}}$. Из приведенных выше формул следует, что они включают частные производные элементов матрицы $A(\mathbf{q})$ по \mathbf{q} . Эти частные производные можно приближенно найти по формуле

$$\frac{\partial a_{ij}(\mathbf{q})}{\partial q_k} \approx \frac{a_{ij}(\mathbf{q} + \Delta \mathbf{q}_k) - a_{ij}(\mathbf{q})}{\Delta q_k},$$

где

$$\mathbf{q} + \Delta \mathbf{q}_k = (q_1, \dots, q_{k-1}, q_k + \Delta q_k, q_{k+1}, \dots, q_N).$$

Таким образом, на каждом шаге необходимо приближенно вычислить N частных производных для каждого из N^2 элементов матрицы A .

Определив частные производные, можно вычислить ускорения обобщенных координат, используя формулу

$$\ddot{\mathbf{q}} = A^{-1}(\mathbf{q}) \left(\left(\frac{1}{2} \left(\frac{\partial A(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}}{\partial \mathbf{q}} \right)^T - \dot{A}(\mathbf{q}) \right) \dot{\mathbf{q}} + \mathcal{B}^T(\mathbf{q}) \mathcal{F}_b + \boldsymbol{\mu} \right).$$

После двукратного интегрирования этих ускорений определяем значения $\dot{\mathbf{q}}^{(n+1)}$ и $\mathbf{q}^{(n+1)} = \mathbf{q}(t_n + \Delta t)$, являющиеся начальными для следующего шага вычислений.

Метод, основанный на непосредственном интегрировании уравнений вида (6.15) называют *методом Лагранжа — Эйлера*. Он требует обычно больших затрат машинного времени, чем метод Ньютона — Эйлера (см. гл. 5). Кроме того, уравнения (6.15) получены при определенных допущениях, которые можно не учитывать при составлении уравнений движения в форме уравнений кинетостатики. Известные преимущества методы Лагранжа имеют в тех случаях, когда на движение механизма наложены дополнительные связи. Этому вопросу посвящен следующий параграф.

6.2. Движение при наличии внешних связей.

Уравнения Лагранжа первого рода

6.2.1. Определение реакции связей при использовании уравнений кинетостатики

Вернемся вначале к уравнениям кинетостатики, рассмотренным в главе 5. Уравнения движения в форме уравнений кинетостатики можно использовать и в том случае, когда на движение манипуляционного робота наложены геометрические, или дифференциальные (кинематические) связи. Иными словами, связи могут быть как голономными, так и неголономными*. В первом случае примером может служить сбороч-

* Связь называют неголономной, если она выражается дифференциальными и неинтегрируемыми соотношениями.

ная операция, при которой происходит проскальзывание подвижной детали относительно неподвижной при возникающих силах реакции. Второй случай характеризует, например, операцию сборки на движущемся конвейере или обработку роботом поверхности с помощью фрезерного или шлифовального инструмента.

В соответствии с основным принципом кинестатики наложенную связь заменяют силой реакции F_R и моментом реакции M_R , которые добавляют к уравнениям кинестатики. Так, в случае сборки сила реакции F_R возникает в контактной точке C_R . Если обозначить через $\rho_{i-1 N}^*$ радиус-вектор этой точки относительно начала $(i-1)$ -й системы координат (заданный в неподвижной системе координат) и считать, что внешние силы, действующие на остальные звенья манипулятора, являются силами тяжести, то уравнения кинестатики (5.47), (5.48) примут следующий вид ($\sigma_i = 1$):

$$z_{i-1}^T \left(\sum_{j=1}^N (G_j + F_{Ij}) + F_R \right) + \mu_i = 0,$$

$$z_{i-1}^T \left(\sum_{j=1}^N (M_R + M_{Ij}) + \lambda(\rho_{i-1 j}) (G_j + F_{Ij}) + \lambda(\rho_{i-1 j}^*) F_R \right) + \mu_i = 0.$$

Соответственно уравнение движения (5.17) можно записать так:

$$A(q)\ddot{q} = B(q, \dot{q})\dot{q} + B_v^T G + J^T \mathcal{F}_R + \mu, \quad (6.16)$$

где

$$J^T = (z^T ((E - \sigma) + \sigma \lambda(\rho^*))) z^T \sigma, \quad (6.17)$$

$$\Lambda(\rho^*) = \text{diag}(\lambda(\rho_{0N}^*), \lambda(\rho_{1N}^*), \dots, \lambda(\rho_{N-1N}^*)).$$

Остается определить силу (а в общем случае, и момент) реакции наложенных связей. В ряде случаев эту силу можно найти приближенно в зависимости от условий решаемой задачи. Так, при сборке можно считать, что сила реакции возникает при взаимодействии двух тел, обладающих конечной жесткостью. Предполагая, что деформация в направлении нормали к поверхности n в точке контакта составляет Δx , запишем проекцию силы реакции на эту нормаль:

$$F_{Rn} = F_R^T n = C \Delta x n.$$

Если C_1, C_2 — коэффициенты упругости каждого из тел, то можно положить, что $C^{-1} = C_1^{-1} + C_2^{-1}$.

Полная сила реакции включает также силу трения, действующую в направлении касательной к поверхности τ . Таким образом,

$$F_R = C \Delta x n + (\text{sign } v) k_{\text{тр}} C \Delta x \tau, \quad (6.18)$$

где $k_{\text{тр}}$ — коэффициент трения; v — относительная скорость в точке контакта.

Совместно решая уравнения, определяющие положение в пространстве собираемых деталей, вычислим величину Δx .

В случае сборки, например вала А и втулки Б (рис. 6.1), достаточно решить совместно уравнения окружности (отверстие втулки Б в плоскости S , ортогональной ее оси) и эллипса (сечение цилиндрической поверхности вала той же плоскостью S). При наличии точек пересечения нетрудно определить величину Δx , которая, в свою очередь, позволяет вычислить величину силы реакции в соответствии с формулами, приведенными выше.

В случае механической обработки поверхности также можно найти силу реакции, которая определяется режимом обработки, заданным в свою очередь из условий технологического процесса. При этом сила реакции состоит из силы прижима инструмента в направлении нормали к обрабатываемой поверхности F_n и силы резания F_τ , зависящей от скорости движения и ряда технологических параметров. Если справедлива приближенная формула

$$F_\tau = (\text{sign } v) k(\lambda) |F_n| \tau, \quad (6.19)$$

где $k(\lambda)$ — коэффициент, зависящий от технологических параметров λ , а τ — вектор касательной к поверхности, то сила реакции будет определяться скоростью v и силой прижима $|F_n|$. В соответствии с уравнением (5.21) получим

$$F_n = F^T n = (J_v^T)^{-1} (\mu + B_v^T(q)G)^T n. \quad (6.20)$$

Здесь μ — вектор сил и моментов, развиваемых приводами манипулятора, а второе слагаемое соответствует действию сил тяжести.

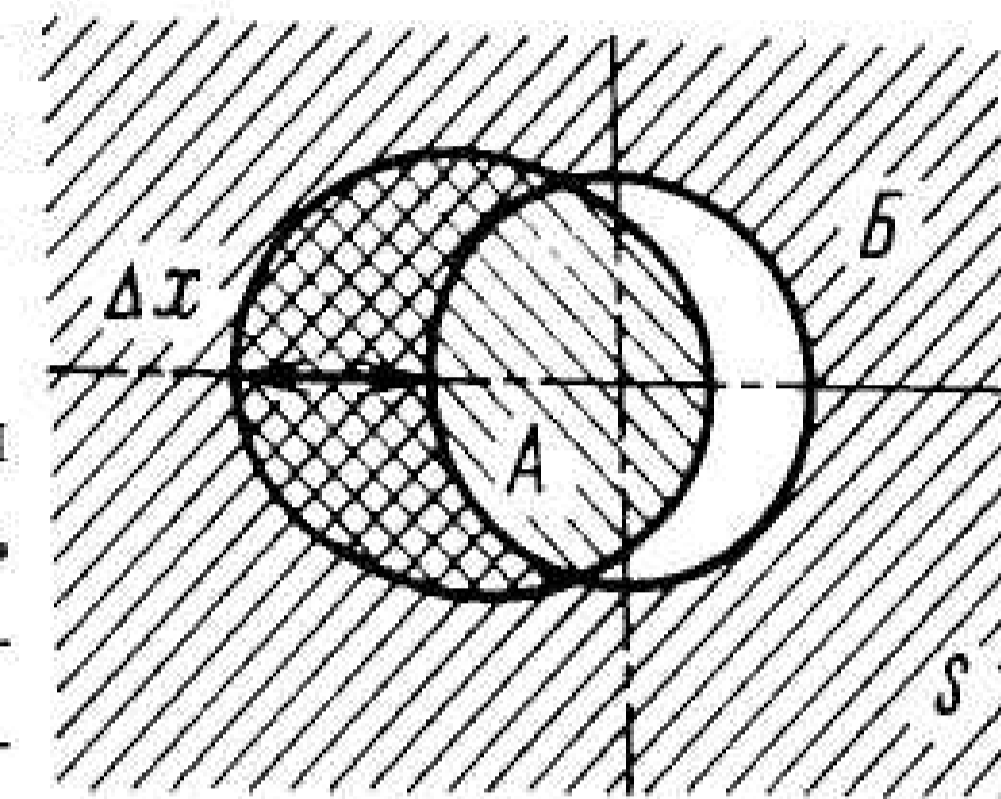


Рис. 6.1. К определению силы реакции при сборке вала А и втулки Б

Подставляя найденные значения сил реакции в уравнение кинетостатики (5.52), имеем возможность исследовать динамику манипуляционной системы при наличии связей для каждого из рассматриваемых частных случаев.

6.2.2. Уравнение Лагранжа при наличии связей

Общий подход к составлению уравнений движения манипулятора при наличии сил реакции связей можно сформулировать, дополнительно предположив, что эти связи идеальны. Пусть, например, объект, удерживаемый в схвате робота, перемещается по поверхности, описываемой уравнениями связи

$$f_v(\mathbf{x}, t) = 0; \quad v = 1, 2, 3; \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^T. \quad (6.21)$$

Поскольку связи предполагаются идеальными, то, согласно принципу виртуальных перемещений, работа сил реакции равна нулю:

$$\mathbf{F}_R^T \delta \mathbf{x} = 0. \quad (6.22)$$

Определяя силы \mathbf{F}_R в соответствии с уравнением динамики (6.16) в предположении о невырожденности матрицы J_N , получаем

$$\left[(J_v^{-1})^T (\mathcal{A}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} - \mathcal{B}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} - B_v^T \mathbf{G} - \boldsymbol{\mu}) \right]^T \delta \mathbf{x} = 0. \quad (6.23)$$

Такое уравнение, объединяющее принцип виртуальных перемещений и принцип Даламбера, называют *уравнением Даламбера — Лагранжа*. Учитывая, что

$$\delta \mathbf{x} = J_v \delta \mathbf{q},$$

перепишем его в виде

$$(\mathcal{A}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} - \mathcal{B}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} - B_v^T \mathbf{G} - \boldsymbol{\mu})^T \delta \mathbf{q} = 0. \quad (6.24)$$

Приращения δx_j связаны уравнениями

$$\sum_{j=1}^3 \frac{\delta f_v}{\delta x_j} \delta x_j = 0, \quad v = 1, 2, 3,$$

которые запишем в виде

$$J_f(\mathbf{x}, t) \delta \mathbf{x} = 0, \quad (6.25)$$

где $J_f(\mathbf{x}, t)$ — якобиева матрица, соответствующая уравнениям связи (6.21).

Переходя к обобщенным координатам и обозначая $\mathbf{x} = f_N(\mathbf{q})$,

$$J_f(f_N(\mathbf{q}), t) = J_f^*(\mathbf{q}, t),$$

вместо уравнения (6.25) получаем

$$J_f^*(\mathbf{q}, t) J_v(\mathbf{q}) \delta \mathbf{q} = 0. \quad (6.26)$$

Умножая выражение, стоящее в левой части этого равенства, на вектор неопределенных лагранжевых множителей $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ и прибавляя полученное выражение к левой части равенства (6.24), получим, принимая во внимание, что приращение $\delta \mathbf{q}$ произвольно

$$\mathcal{A}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} - \mathcal{B}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} - B_v^T \mathbf{G} - \boldsymbol{\mu} - J_{fN}^T(\mathbf{q}, t) \boldsymbol{\lambda}^T = 0, \quad (6.27)$$

где

$$J_{fN}(\mathbf{q}, t) = J_f^*(\mathbf{q}, t) J_v(\mathbf{q}).$$

Уравнение (6.27) совместно с уравнением связей

$$f_v(f_N(\mathbf{q}(t), t) = f^*(\mathbf{q}, t) = 0 \quad (6.28)$$

образует систему из $(N+3)$ -х уравнений, позволяющую определить как неизвестные q_i , $i=1, 2, \dots, N$, так и неопределенные множители $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$.

Сравнивая уравнения (6.27) и (6.16) видим, что силы реакции теперь можно вычислить по формуле

$$\mathbf{F}_R = J_f^T(\mathbf{q}, t) \boldsymbol{\lambda}^T. \quad (6.29)$$

Полученные уравнения (6.27), (6.28) образуют *систему уравнений движения Лагранжа первого рода*. Ее непосредственное интегрирование является достаточно сложной задачей, которую можно упростить путем линеаризации уравнений связи. В этом случае имеем

$$f(\mathbf{x}, t) = f(\mathbf{x}^*, t) + J_f(\mathbf{x}^*, t) \dot{\mathbf{x}} + \frac{\partial f(\mathbf{x}^*, t)}{\partial t} = 0,$$

или

$$J_{fN}(\mathbf{q}^*, t) \dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial f^*(\mathbf{q}^*, t)}{\partial t} = 0. \quad (6.30)$$

Дифференцируя выражение (6.30) по времени, получаем три уравнения вида

$$J_{fN}(\mathbf{q}^*, t) \ddot{\mathbf{q}} + \dot{J}_{fN}(\mathbf{q}^*, t) \dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial^2 f^*(\mathbf{q}^*, t)}{\partial t^2} = 0, \quad (6.31)$$

которые вместе с уравнениями (6.27)

$$H(\mathbf{q}^*)\ddot{\mathbf{q}} - B(\mathbf{q}^*, \dot{\mathbf{q}}^*)\dot{\mathbf{q}} - B_v^T(\mathbf{q}^*)\mathbf{G} - \boldsymbol{\mu}^* - J_{I,N}^T(\mathbf{q}^*, t)\boldsymbol{\lambda}^* = 0$$

позволяют на каждом шаге по известным значениям \mathbf{q}^* , $\dot{\mathbf{q}}^*$, $\boldsymbol{\mu}^*$ определить $N+3$ неизвестных $\ddot{\mathbf{q}}$ и $\boldsymbol{\lambda}$. Далее путем двукратного интегрирования $\ddot{\mathbf{q}}$ определяются последующие значения $\dot{\mathbf{q}}^*$, \mathbf{q}^* , а также силы реакции по формуле (6.29).

Очевидным недостатком такого подхода является возможное накопление ошибок из-за неточности интегрирования, приводящих к тому, что уравнение связи (6.30) нарушается. Это требует использования дополнительных корректирующих алгоритмов.

6.2.3. Применение уравнений Лагранжа для анализа движения манипуляционных механизмов с замкнутыми контурами

Метод Лагранжа обычно применяют в тех случаях, когда механизм манипулятора содержит замкнутые контуры, вследствие чего число звеньев оказывается больше, чем число степеней подвижности механизма (рис. 6.2, а). Для применения метода Лагранжа это не является препятствием, поскольку выражения кинетической и потенциальной энергии можно записать относительно координат звеньев, заданных в абсолютной системе координат, что позволяет, как и выше, добавить к уравнениям Лагранжа второго рода уравнения связей между звеньями механизма.

Проблема, однако, заключается в том, что рассмотренные выше способы решения уравнения Лагранжа второго рода, содержащие рекуррентные процедуры вычисления угловых и линейных скоростей на каждом шаге вычислений, справедливы, вообще говоря, только для разомкнутых кинематических цепей. Эту трудность можно преодолеть путем рассмотрения условной кинематической цепи, которая образуется путем разрыва всех замкнутых контуров (рис. 6.2, б). При этом число разрываемых соединений должно быть минимальным. Теперь можно составить выражение кинетической энергии системы точно также, как и прежде. Однако вектор обобщенных координат \mathbf{p} будет другим и его размерность будет больше, чем размерность вектора обобщенных координат реальной системы \mathbf{q} . Эти векторы связаны уравнениями

$$f(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = 0, \quad (6.32)$$

определяющими разорванные нами связи контуров кинематической цепи.

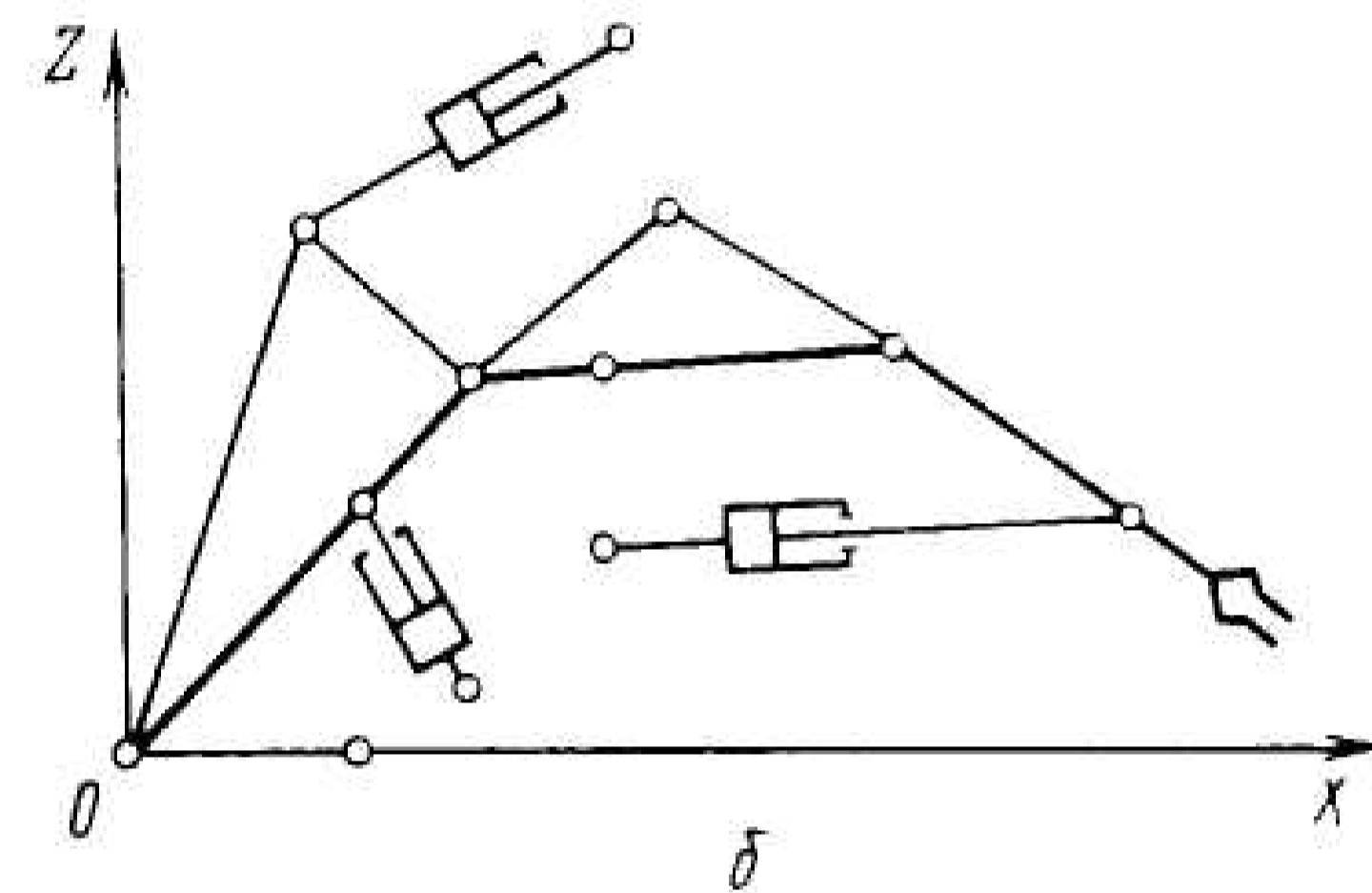
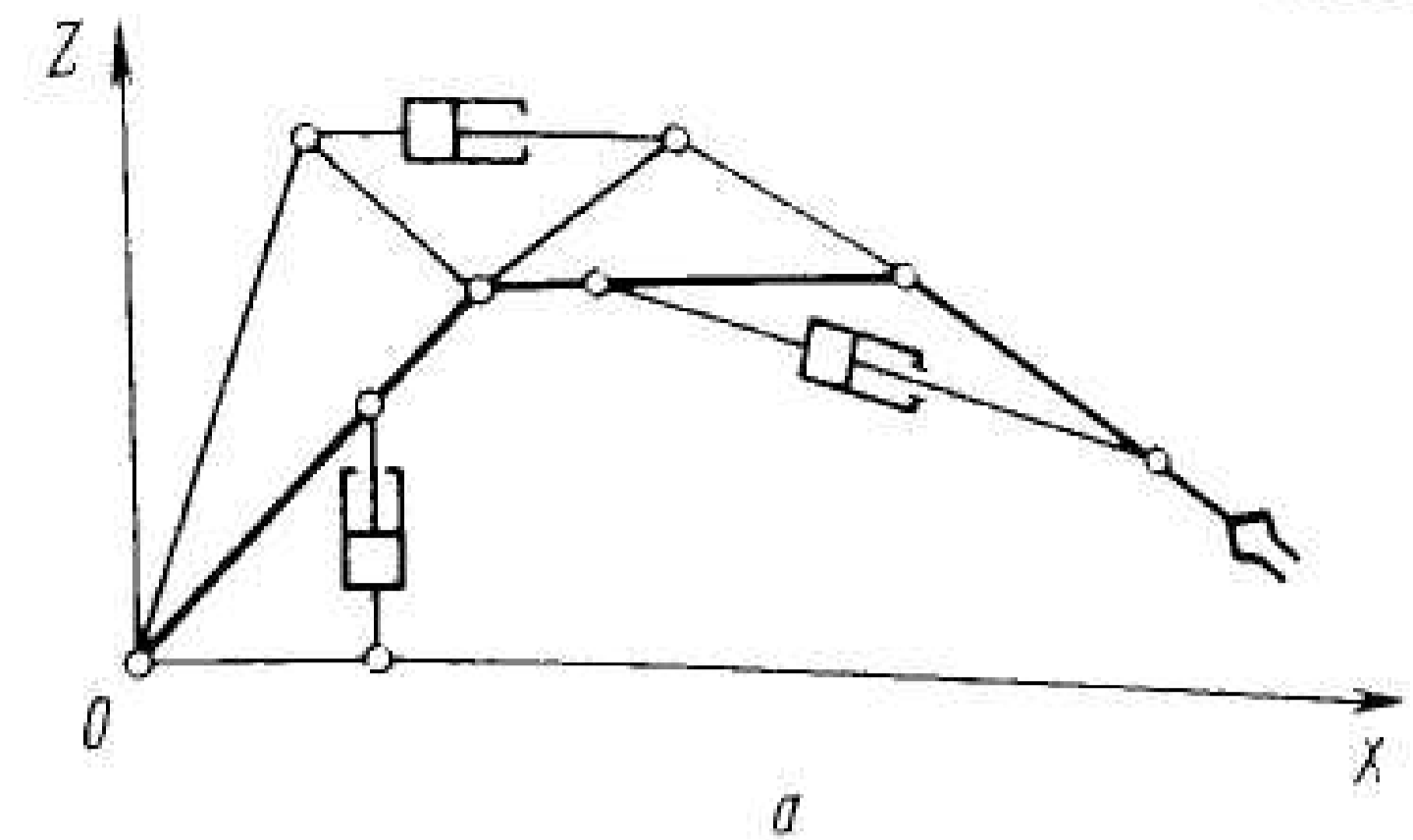


Рис. 6.2. Пример механизма, содержащего замкнутые контуры (а); условная разомкнутая кинематическая цепь (б)

К этим уравнениям следует добавить уравнения связи в частично разомкнутой цепи, определяющие координаты звеньев \mathbf{x} через новые обобщенные координаты \mathbf{p} :

$$\mathbf{x} = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{p}). \quad (6.33)$$

Кинетическая энергия механизма в этом случае равна

$$K = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{x}}^T M_x \dot{\mathbf{x}} = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{p}}^T J_\varphi^T(\mathbf{p}) M_x J_\varphi(\mathbf{p}) \dot{\mathbf{p}}, \quad (6.34)$$

где

$$J_\varphi(\mathbf{p}) = \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial p_j} \right) -$$

якобиева матрица преобразования (6.33).

Используя уравнение (6.32), получаем

$$\dot{\mathbf{p}} = -\tilde{f}_p^{-1}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \tilde{f}_q(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} = J_f \dot{\mathbf{q}}, \quad (6.35)$$

где \tilde{f}_p, \tilde{f}_q — матрицы частных производных $\left(\frac{\partial f_i}{\partial p_j}\right)$ и $\left(\frac{\partial f_i}{\partial q_j}\right)$; $J_j = -\tilde{f}_p^{-1} \tilde{f}_q$.

Воспользуемся еще одним допущением: число уравнений связи (6.32) должно быть равно числу новых обобщенных координат p и матрица \tilde{f}_p , которая в этом случае будет квадратной, невырожденная.

Тогда выражение для кинетической энергии K , как и раньше, можно записать в виде квадратичной формы от производных обобщенных координат \dot{q} :

$$K = \frac{1}{2} \dot{q}^T \tilde{A} \dot{q}, \quad (6.36)$$

в котором

$$\tilde{A} = J_{\tilde{f}}^T J_{\phi}^T M_x J_{\phi} J_{\tilde{f}}. \quad (6.37)$$

Рассмотренный способ позволяет использовать для расчета скоростей звеньев \dot{x} те же формулы, которые применялись для разомкнутых цепей, поэтому конструкция матриц J_{ϕ} будет такой же. Используя прежние обозначения, можно записать

$$J_{\phi}(p) = (B_v(p) \ B_w(p)). \quad (6.38)$$

Обобщенные координаты p можно выразить через обобщенные координаты q , приближенно решая уравнения связи (6.32):

$$p = \psi(q),$$

$$J_{\phi}(p) = J_{\phi}(\psi(q)) = \tilde{J}_{\phi}(q).$$

Уравнение (6.7), определяющее элементарную работу обобщенных сил относительно новых обобщенных координат, примет следующий вид:

$$\delta p^T Q_p = \delta q^T J_{\tilde{f}}^T Q_p = \delta q^T Q_q = \delta q^T (B^T F_s + \mu). \quad (6.39)$$

Отсюда

$$Q_p = (J_{\tilde{f}}^T)^{-1} (B^T F_s + \mu). \quad (6.40)$$

Подставляя полученное выражение в уравнение Лагранжа (6.1), получаем уравнение вида (6.15):

$$\tilde{A}(q) \ddot{q} + \left[\tilde{A}(q) - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \tilde{A}(q)}{\partial q} \dot{q} \right)^T \right] \dot{q} = (J_{\tilde{f}}^T)^{-1} (B^T F_s + \mu), \quad (6.41)$$

в котором производные от $\tilde{A}(q)$ в квадратных скобках определяются формулами, приведенными в § 6.1. Как было показано, задача их вычисления сводится к определению частных производных элементов $\tilde{A}(q)$ по обобщенным координатам q , на каждом шаге интегрирования. Учитывая, что

$$J_{\tilde{f}} = J_{\tilde{f}}(p, q), \quad J_{\phi} = J_{\phi}(p) \tilde{J}_{\phi}(q),$$

можно записать

$$\frac{\partial \tilde{A}(q)}{\partial q_j} = (J_{\tilde{f}}^T J_{\phi}^T)' M_x (J_{\phi} J_{\tilde{f}}) + (J_{\tilde{f}}^T J_{\phi}^T) M_x (J_{\phi} J_{\tilde{f}})'. \quad (6.42)$$

где

$$(J_{\tilde{f}}^T J_{\phi}^T)' = (J_{\tilde{f}}^T)' J_{\phi}^T + J_{\tilde{f}}^T (J_{\phi}^T)' = \left[\left(\frac{\partial J_{\tilde{f}}^T}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial q_j} + \frac{\partial J_{\tilde{f}}^T}{\partial q_j} \right) J_{\phi}^T + J_{\tilde{f}}^T \frac{\partial J_{\phi}^T}{\partial q_j} \right].$$

Заметим, что векторы $\frac{\partial p}{\partial q_j}$, $j = 1, 2, \dots, N$, определяются матрицей $J_{\tilde{f}}(p, q)$.

Вычисляя на каждом шаге q и \dot{q} , можно приближенно найти p из уравнения связи (6.32) и, рассчитав все составляющие, которые входят в уравнение (6.41), определить из него \ddot{q} . После двукратного интегрирования процедуру необходимо повторить.

Пример 6.1. Для кинематической схемы манипуляционного механизма с замкнутым контуром (рис. 6.3, а), характерным для гидравлических манипуляторов, обобщенные координаты q_1, q_2 можно выбирать обычным способом. Они однозначно определяют положение механизма. В частности, для характерной точки А схвата получим

$$\begin{aligned} x &= l_{10} \cos q_1 + l_{20} \cos q_2, \\ y &= l_{10} \sin q_1 + l_{20} \sin q_2. \end{aligned} \quad (6.43)$$

Разрывая замкнутый контур (см. рис. 6.3, б) и вводя новые обобщенные координаты углового p_1, p_2, p_3 и поступательного p_4 перемещений, запишем уравнения (6.32), связывающие новые p_1, p_2, p_3, p_4 и базовые q_1, q_2 обобщенные координаты:

$$p_1 - q_1 = 0, \quad p_2 - q_2 = 0,$$

$$\begin{aligned} l_1'' \cos \alpha_1 + (l_3 + l_4 + p_4) \cos(p_3 - \alpha_2) - l_1' - l_2 \cos(\alpha_3 + p_2) &= 0, \\ l_1'' \sin \alpha_1 + (l_3 + l_4 + p_4) \sin(p_3 - \alpha_2) - l_2 \sin(\alpha_3 + p_2) &= 0. \end{aligned} \quad (6.44)$$

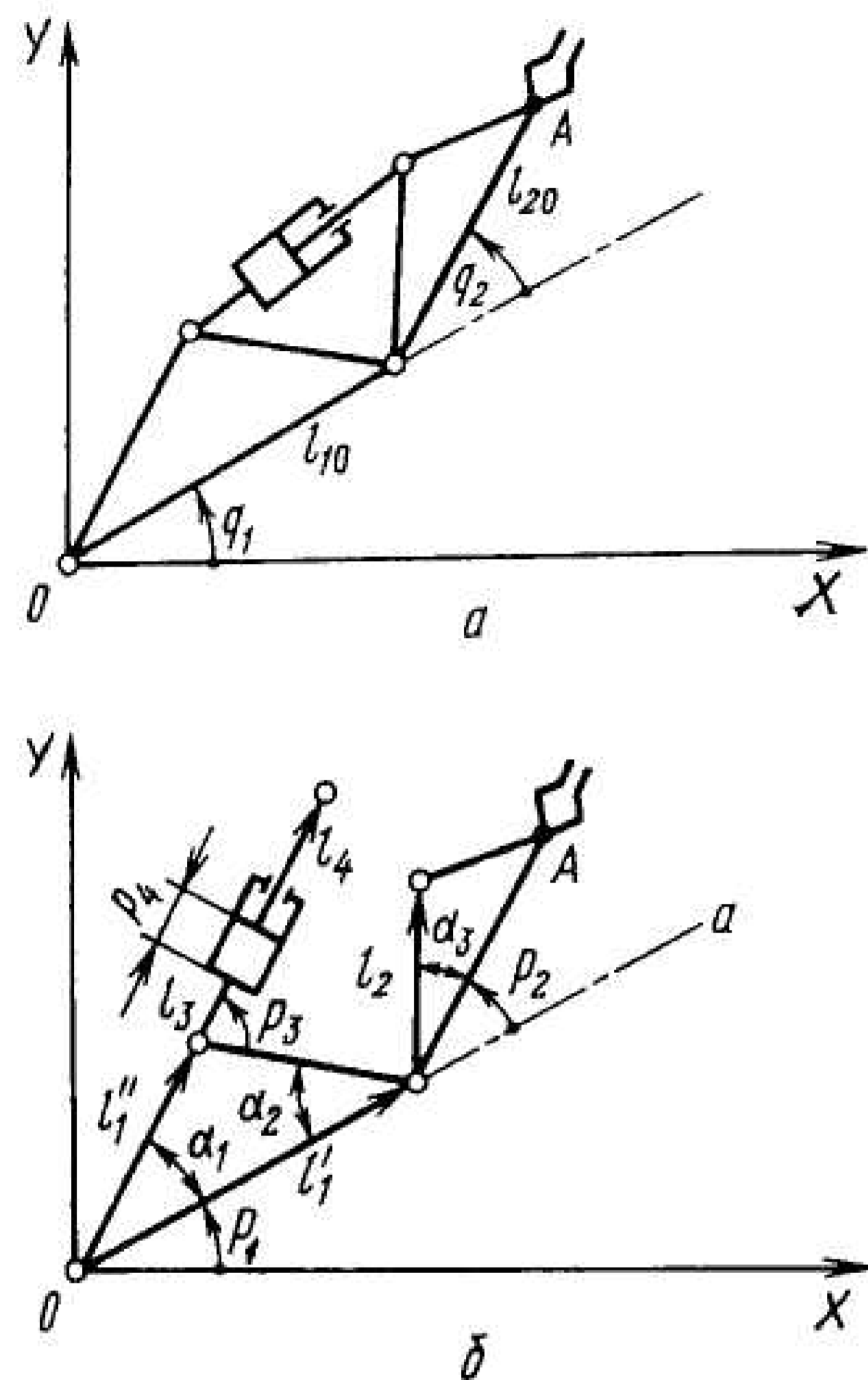


Рис. 6.3. Кинематическая схема манипуляционного механизма с замкнутым контуром

Смысл третьего и четвертого уравнений заключается в том, что эти уравнения выполняются при наложении связи (восстановлении замкнутого контура); они записаны в проекции на направление Oa и ортогонального к нему.

В качестве характерных точек четырех полученных звеньев выберем их центры масс. Считая для простоты для первых двух звеньев, что соответствующие точки лежат в середине отрезков l_{10} , l_{20} , получаем в проекциях на ось OX :

$$\begin{aligned} x_1 &= (l_{10}/2) \cos p_1, & x_2 &= (l_{20}/2) \cos p_2 + l_{10} \cos p_1, \\ x_3 &= (l_3 + l_3'/2) \cos(p_3 - \alpha_2 + p_1) + l_1'' \cos(\alpha_1 + p_1), \end{aligned}$$

$$x_4 = l_1'' \cos(\alpha_1 + p_1) + (l_3 + p_4 + l_3'/2) \cos(p_3 - \alpha_2 + p_1). \quad (6.45)$$

Уравнения в проекциях на ось OY записываются аналогично. Эти уравнения в совокупности и составляют систему (6.33), определяющую связи в частично разомкнутой цепи, причем

$$x = (x_1 y_1 \ x_2 y_2 \ \dots \ x_n y_n)^T.$$

Предполагая, что масса звеньев сосредоточена в их центрах, имеем

$$M_x = \text{diag}(m_1 E_2 \ m_2 E_2 \ m_3 E_2 \ m_4 E_2).$$

Определим якобиеву матрицу

$$J_q(p) = \begin{pmatrix} -(l_{10}/2) \sin p_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ (l_{10}/2) \cos p_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -l_{10} \sin p_1 & -(l_{20}/2) \sin p_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ l_{10} \cos p_1 & -(l_{20}/2) \cos p_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -(l_3 + l_3'/2) \sin(p_3 - \alpha_2 + p_1) - l_1'' \sin(\alpha_1 + p_1) & 0 & -(l_3 + l_3'/2) \cdot \sin(p_3 - \alpha_2 + p_1) & 0 & 0 \\ (l_3 + l_3'/2) \cos(p_3 - \alpha_2 + p_1) + l_1'' \cos(\alpha_1 + p_1) & 0 & (l_3 + l_3'/2) \cdot \cos(p_3 - \alpha_2 + p_1) & 0 & 0 \\ -l_1'' \sin(\alpha_1 + p_1) - (l_3 + p_4 + l_3'/2) \sin(p_3 - \alpha_2 + p_1) & 0 & -(l_3 + p_4 + l_3'/2) \cdot \sin(p_3 - \alpha_2 + p_1) & \cos(p_3 - \alpha_2 + p_1) & 0 \\ l_1'' \cos(\alpha_1 + p_1) - (l_3 + p_4 + l_3'/2) \cos(p_3 - \alpha_2 + p_1) & 0 & (l_3 + p_4 + l_3'/2) \cdot \cos(p_3 - \alpha_2 + p_1) & \sin(p_3 - \alpha_2 + p_1) & 0 \end{pmatrix} \quad (6.46)$$

Найдем также матрицы

$$\tilde{f}_p = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & l_2 \sin(\alpha_3 + p_2) & -(l_3 + l_4 + p_4) \sin(p_3 - \alpha_2) & \cos(p_3 - \alpha_2) \\ 0 & -l_2 \cos(\alpha_3 + p_2) & (l_3 + l_4 + p_4) \cos(p_3 - \alpha_2) & \sin(p_3 - \alpha_2) \end{pmatrix};$$

$$\tilde{f}_p^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & (l_2/\Delta) \cos(\alpha_3 + \alpha_2 + p_2 - p_3) & -(1/\Delta) \sin(p_3 - \alpha_2) & (1/\Delta) \cos(p_3 - \alpha_2) \\ 0 & -l_2 \sin(\alpha_3 + \alpha_2 + p_2 - p_3) & \cos(p_3 - \alpha_2) & \sin(p_3 - \alpha_2) \end{pmatrix},$$

где $\Delta = l_3 + l_4 + p_4$;

$$\tilde{f}_q = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Определим, наконец,

$$J_{\tilde{f}} = -\tilde{f}_p^{-1} \tilde{f}_q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & (l_2/\Delta) \cos(\alpha_3 + \alpha_2 + p_2 - p_3) \\ 0 & -l_2 \sin(\alpha_3 + \alpha_2 + p_2 - p_3) \end{pmatrix}.$$

Заметим, что в рассматриваемом примере матрицу $J_{\tilde{f}}$ проще найти путем непосредственного дифференцирования уравнений связи и определения из них зависимости \dot{p} от \dot{q} .

Кинетическая энергия механизма в новых координатах равна

$$K = \frac{1}{2} \dot{p}^T J_{\phi}^T(p) M_x J_{\phi}(p) \dot{p},$$

где $J_{\phi}(p)$ определяется формулой (6.46).

Вычисляя производные матрицы

$$\hat{A}(p) = J_{\phi}^T(p) M_x J_{\phi}(p),$$

можно получить движение механизма, используя уравнение (6.15):

$$\hat{A}(p) \ddot{p} + \left[\hat{A}(p) - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \hat{A}(p) \dot{p}}{\partial p} \right)^T \right] \dot{p} = B^T \mathcal{F}_s + \mu, \quad (6.47)$$

решая его совместно с уравнениями связи (6.44). Эту задачу, как мы видели, можно решать с помощью множителей Лагранжа, т.е. применяя уравнения Лагранжа первого рода.

Согласно рассмотренному выше подходу, следует вернуться к переменным q и записать кинетическую энергию в виде

$$K = \frac{1}{2} \dot{q}^T \tilde{A}(q) \dot{q},$$

где

$$\tilde{A}(q) = J_{\tilde{f}}^T \hat{A}(q) J_{\tilde{f}}.$$

Теперь можно интегрировать непосредственно уравнения (6.41), определяя производные от матрицы $\tilde{A}(q)$ с учетом формул, приведенных в § 6.1. Поскольку эта матрица зависит от p , то на каждом шаге необходимо решать уравнения связей (6.44), определяя новые значения обобщенных координат p , соответствующие полученным при интегрировании на одном шаге значениям q . Приближенно эта задача может быть решена путем линеаризации уравнения связи в форме (6.30).

При достижении координатами предельных значений p_i^* , обусловленных конструкцией механизма, происходит наложение дополнительных связей на его движение. К уравнению (6.32) в этом случае добавляют $p_i = \text{const} = p_i^*$, что приводит к изменениям матрицы $J_{\phi}(p)$ и выражения для кинетической энергии K . Обозначим \tilde{p} значения скоростей обобщенных координат в момент, предшествующий удару, $J_{\phi}^*(p)$ — соответствующую матрицу, вычисленную после наложения связи. Тогда, согласно теореме Карно, в предположении, что удар является абсолютно неупругим, получим

$$\frac{1}{2} \tilde{p} J_{\phi}^T(\tilde{p}) M_x J_{\phi}(\tilde{p}) \tilde{p} = \frac{1}{2} \dot{p}_0^T J_{\phi}^{*T}(p_0) M_x J_{\phi}^*(p_0) \dot{p}_0. \quad (6.48)$$

Отсюда можно найти начальные значения производных \dot{p}_0 для последующего интегрирования уравнений движения с наложенными связями и производных

$$\dot{q}_0 = J_{\tilde{f}}^{-1} \dot{p}_0.$$

Практически достаточно решить уравнение

$$J_{\phi}(\tilde{p}) \tilde{p} = J_{\phi}^{*T}(p_0) \dot{p}_0.$$

Поскольку $\tilde{p} = p_0$, получаем

$$\dot{p}_0 = (J_{\phi}^{*T}(\tilde{p}))^{-1} J_{\phi}(\tilde{p}) \tilde{p}. \quad (6.49)$$

Аналогичный подход следует применять и при наложении внешних связей, например при сборке. В момент удара необходимо определить новые начальные значения скоростей обобщенных координат в соответствии с теоремой Карно, после чего интегрировать уравнения движения с наложенными связями тем или иным способом.

6.3. Принцип Гаусса

6.3.1. Общая формулировка принципа Гаусса

Как известно, уравнения движения могут быть получены на основе вариационных принципов механики. Принцип Гаусса относится к числу вариационных принципов дифференциального типа. Он является наиболее общим принципом механики и позволяет получить уравнения движения системы при наложенных связях, как голономных, так и неголономных. Напомним, что принцип Даламбера — Лагранжа справедлив только для голономных и линейных неголономных связей.

В основе принципа Гаусса лежит понятие *принуждения (Zwang)*, под которым понимают меру отклонения истинного движения, происходящего при наложении связей, от свободного движения, которое имело бы место в их отсутствие. В частности, для системы материальных точек с массами m_i , $i = 1, 2, \dots, N$, принуждение определяют следующим образом:

$$Z = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \left(\mathbf{w}_i - \frac{\mathbf{F}_i}{m_i} \right)^T \left(\mathbf{w}_i + \frac{\mathbf{F}_i}{m_i} \right), \quad (6.50)$$

где $\mathbf{w}_i = \ddot{\mathbf{r}}_i$ — ускорение точек; \mathbf{F}_i — действующие на них силы. При этом \mathbf{w}_i — истинное ускорение, а $\frac{\mathbf{F}_i}{m_i} = \mathbf{w}_{i, \text{св}}$ — ускорение свободного движения.

Таким образом, принуждение — это скалярная величина, имеющая в каждый момент времени смысл среднего (для системы материальных точек) квадратичного отклонения истинного ускорения от ускорения свободного движения.

Принцип Гаусса заключается в том, что в каждый момент времени истинное движение системы происходит таким образом, что принуждение минимально.

Поскольку единственными переменными в выражении (6.50) являются ускорения, то в соответствии с принципом Гаусса эти ускорения выбирают из условия минимального принуждения

$$\min_{\mathbf{w}} Z(\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_N) \quad (6.51)$$

при дополнительных ограничениях, определяемых уравнениями связей. В общем случае эти связи могут быть нелинейными и неголономными, и их уравнения имеют вид

$$\Phi_i(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, \dot{\mathbf{r}}_1, \dots, \dot{\mathbf{r}}_N, t) = 0. \quad (6.52)$$

Продифференцировав левую часть этого равенства по t , получим выражение вида

$$\sum_{i=1}^N \frac{\partial \Phi_i}{\partial \dot{\mathbf{r}}_i} \dot{\mathbf{r}}_i + \Phi(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) = \sum_{i=1}^N C_i \mathbf{w}_i + \Phi(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) = 0. \quad (6.53)$$

Итак, задача сводится к определению ускорений \mathbf{w}_i из условия минимума выражения (6.50) при линейных относительно \mathbf{w}_i ограничениях (6.53). Эту задачу можно решить с помощью множителей Лагранжа, однако значительно более эффективным приемом является непосредственная (численная) минимизация принуждения, например с использованием методов динамического программирования.

6.3.2. Применение принципа Гаусса для исследования движения манипуляционных механизмов

Рассмотрим понятие принуждения для манипуляционного механизма. Для каждого из звеньев механизма, совершающих одновременно поступательное движение с ускорением \mathbf{w}_i и вращательное с ускорением $\boldsymbol{\varepsilon}_i$, меру принуждения можно определить следующим образом:

$$Z_i = \frac{1}{2} \left[(\mathbf{w}_i - \tilde{\mathbf{w}}_i)^T M_i (\mathbf{w}_i - \tilde{\mathbf{w}}_i) + (\boldsymbol{\varepsilon}_i - \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_i)^T I_i (\boldsymbol{\varepsilon}_i - \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_i) \right], \quad (6.54)$$

где

$$M_i = \begin{pmatrix} m_i & 0 & 0 \\ 0 & m_i & 0 \\ 0 & 0 & m_i \end{pmatrix}, \quad I_i = \Omega_{0i} I_i' \Omega_{0i}^T,$$

m_i — масса звена; I_i' — тензор инерции звена в связанной с ним системе координат; Ω_{0i} — матрица перехода к абсолютной системе координат. Здесь \mathbf{w}_i , $\boldsymbol{\varepsilon}_i$ — линейное и угловое ускорения звена в абсолютной системе координат, а $\tilde{\mathbf{w}}_i$, $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_i$ — их значения при свободном движении, которые определяются уравнениями свободного движения:

$$\begin{aligned} m_i \tilde{\omega}_i &= F_{v_i} + z_i \mu_i, \\ \lambda(\tilde{\omega}_i) I_i \tilde{\omega}_i - I_i \tilde{\epsilon}_i &= M_{v_i} + z_i \mu_i, \end{aligned} \quad (6.55)$$

где F_{v_i} , M_{v_i} — внешние силы и моменты, μ_i — силы, или моменты, приложенные к звену двигателем соответствующей степени подвижности и направленные вдоль орта оси z_i соответствующей кинематической пары; $\tilde{\omega}_i$ — угловые скорости звеньев; матрица $\lambda(\tilde{\omega}_i)$ определена в п. 3.1.3.

Для всего механизма меру принуждения определяют так:

$$Z = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N [(\omega_i - \tilde{\omega}_i)^T M_i (\omega_i - \tilde{\omega}_i) + (\epsilon_i - \tilde{\epsilon}_i)^T I_i (\epsilon_i - \tilde{\epsilon}_i)]$$

или

$$Z = \frac{1}{2} (\ddot{x} - \ddot{\tilde{x}})^T I (\ddot{x} - \ddot{\tilde{x}}), \quad (6.56)$$

где $\ddot{x} = (\omega \ \epsilon)^T$, $\ddot{\tilde{x}} = (\tilde{\omega} \ \tilde{\epsilon})^T$, $I = \text{diag}(M_1 \dots M_N \ I_1 \dots I_N)$ — матрица масс и моментов инерции звеньев.

Теперь задача сводится к определению ускорения \ddot{x} из условия $\min_{\ddot{x}} Z$ с учетом уравнений (6.55) для $\tilde{\omega}$ и $\tilde{\epsilon}$, т.е. для $\ddot{\tilde{x}}$, и уравнений связей, определяющих взаимное положение звеньев. Эти уравнения имеют вид

$$r^c = \varphi(q_1, \dots, q_N), \quad (6.57)$$

где r^c — вектор центров масс звеньев.

Дважды продифференцировав правую часть этих уравнений, мы в п. 3.1 получили выражение для ускорения (3.38), которое в данном случае определяет наложенные на движение звеньев связи:

$$\omega = B_v(q) \ddot{q} + \dot{B}_v(q, \dot{q}) \dot{q}. \quad (6.58)$$

Аналогичная формула справедлива для угловых ускорений

$$\epsilon = B_\omega(q) \ddot{q} + \dot{B}_\omega(q, \dot{q}) \dot{q}.$$

Эти формулы можно объединить

$$\ddot{x} = \mathcal{B} \ddot{q} + \dot{\mathcal{B}} \dot{q}, \quad (6.59)$$

где

$$\mathcal{B} = (B_v \ B_\omega)^T, \quad \dot{\mathcal{B}} = (\dot{B}_v \ \dot{B}_\omega)^T.$$

Если предположить, что закон управления известен, т.е. определены функции $\mu_i(t)$, играющие теперь роль внешних сил, приложенных к звеньям в свободном движении, то уравнения (6.55) позволяют на каждом шаге определить ускорения свободного движения $\tilde{\omega}$ и $\tilde{\epsilon}$. Теперь необходимо найти минимум квадратичной формы (6.56) относительно ускорений \ddot{q} обобщенных координат механизма, связанных с ускорениями \ddot{x} уравнениями (6.59). Заметим, что положения и скорости звеньев на каждом шаге вычисляются по ускорениям, определенным на предыдущем шаге. Таким образом, задача минимизации решается только для ускорений.

6.3.3. Определение ускорений вынужденного движения

Итак, при использовании принципа Гаусса задача сводится к определению ускорений истинного движения, минимизирующих принуждение. Эту задачу можно решить несколькими способами. Во-первых, можно получить выражение функции принуждения от ускорений обобщенных координат \ddot{q} и рассмотреть методы его численной минимизации. Во-вторых, можно использовать метод неопределенных множителей Лагранжа. Рассмотрим вначале первый подход.

Выразим из уравнений свободного движения ускорения $\tilde{\omega}_i$, $\tilde{\epsilon}_i$ для того, чтобы подставить их в выражение (6.56). Поскольку (см. (6.55))

$$\tilde{\omega}_i = \frac{F_{v_i}}{m_i} + z_i \frac{\mu_i}{m_i}, \quad (6.60)$$

$$\tilde{\epsilon}_i = I_i^{-1} \lambda(\tilde{\omega}_i) I_i \tilde{\omega}_i - I_i^{-1} M_{v_i} - I_i^{-1} z_i \mu_i,$$

то

$$\ddot{\tilde{x}}_i = (\tilde{\omega}_i \ \tilde{\epsilon}_i)^T = \Phi_i(M_{v_i}, F_{v_i}, \mu_i, q_i, \dot{q}_i), \quad (6.61)$$

причем функции Φ_i определяются как правые части равенств (6.60).

Теперь полученные выражения можно подставить в формулу (6.56) для меры принуждения, предварительно переписав ее как

$$Z = \frac{1}{2} \ddot{x}^T I \ddot{x} - \ddot{x}^T I \ddot{\tilde{x}} + \frac{1}{2} \ddot{\tilde{x}}^T I \ddot{\tilde{x}}. \quad (6.62)$$

Получим

$$Z = \frac{1}{2} \ddot{x}^T I \ddot{x} - \ddot{x}^T I \Phi + \dots \quad (6.63)$$

В последнем выражении мы выписали только слагаемые, зависящие от \ddot{q} . Вид остальных слагаемых, зависящих от обобщенных координат, их производных и внешних сил, не имеет значения при минимизации Z относительно ускорений \ddot{q} .

Во многих случаях полученное выражение нуждается в уточнениях, так как в кинематических парах могут действовать и другие силы, которые не учитываются нашей приближенной моделью. Например, при использовании двигателей постоянного тока с редуктором в выражении Z возникают дополнительные составляющие, обусловленные моментом инерции I'_i вращающихся частей редуктора и ротора двигателя вида $\left(\ddot{q}_i - \frac{\mu_i}{I'_i}\right)^2$. Их можно учесть, добавляя к значению I_i приведенный к валу нагрузки момент инерции вращающихся частей (см. далее гл. 7) или же добавляя дополнительные слагаемые, зависящие от \ddot{q} , к правой части (6.63). В последнем случае получим выражение следующего вида:

$$Z = \frac{1}{2} \ddot{x}^T I \ddot{x} - \ddot{x}^T I \Phi + \sum_{i=1}^N \left(\frac{1}{2} \ddot{q}_i^2 - \frac{\mu_i}{I'_i} \ddot{q}_i \right) + \dots \quad (6.64)$$

Задача состоит теперь в минимизации выражений (6.63) или (6.64) с учетом уравнения связей (6.59). Заметим, что в отсутствие связей, исходя из необходимого условия минимизации выражения (6.64), получим уравнения движения системы свободных тел

$$\ddot{x} = \Phi, \quad I'_i \ddot{q}_i = \mu_i, \quad i = 1, \dots, N.$$

Рассмотрим задачу об определении ускорений путем минимизации квадратичной формы (6.64) с учетом линейных ограничений (6.59) методом динамического программирования [45].

Пусть Z_{k-1} — функция принуждения для механизма, состоящего из последних $N - k + 1$ звеньев кинематической цепи манипулятора (т.е. от k -го звена до N -го — схвата):

$$Z_k = \left(\frac{1}{2} \sum_{i=k}^N \ddot{x}_i^T I_i \ddot{x}_i - \ddot{x}_i^T I_i \Phi_i + \dots \right) + \sum_{i=k}^N \left(\frac{1}{2} \ddot{q}_i^2 - \frac{\mu_i}{I'_i} \ddot{q}_i \right), \quad (6.65)$$

где I_i — элементы диагональной (блочной) матрицы I .

В соответствии с основным принципом динамического программирования минимизация Z_k позволяет записать следующее рекуррентное соотношение:

$$Z_k(\ddot{x}_k) = \min_{\ddot{q}_k} \left[\frac{1}{2} \ddot{x}_k^T I_k \ddot{x}_k - \ddot{x}_k^T I_k \Phi_k + \frac{1}{2} \ddot{q}_k^2 - \frac{\mu_k}{I'_k} \ddot{q}_k + Z_{k+1}(\ddot{x}_{k+1}) \right], \quad (6.66)$$

где Z_{k+1} — минимальное значение, полученное на предыдущем шаге минимизации.

В свою очередь, ускорение \ddot{x}_k с помощью соотношений, полученных в § 3.1, может быть рекуррентно вычислено по формуле вида

$$\ddot{x}_k = A_k \ddot{x}_{k-1} + B_k \ddot{q}_k + C_k, \quad (6.67)$$

в которой матрица A_k и векторы B_k , C_k зависят только от обобщенных координат и их первых производных.

Таким образом,

$$Z_k(\ddot{x}_k) = \min_{\ddot{q}_k} \left[\frac{1}{2} \ddot{x}_k^T I_k \ddot{x}_k - \ddot{x}_k^T I_k \Phi_k + \frac{1}{2} \ddot{q}_k^2 - \frac{\mu_k}{I'_k} \ddot{q}_k + Z_{k+1}(A_{k+1} \ddot{x}_k + B_{k+1} \ddot{q}_{k+1} + C_{k+1}) \right]. \quad (6.68)$$

При этом

$$Z_{k+1}(\ddot{x}_{k+1}) = \frac{1}{2} \ddot{x}_{k+1}^T I_{k+1} \ddot{x}_{k+1} - \ddot{x}_{k+1}^T I_{k+1} \Phi_{k+1} + \dots$$

(остальные слагаемые на данном шаге вычислений уже известны).

Дифференцируя выражение, стоящее в квадратных скобках, по \ddot{q}_k и приравнявая результат к нулю, получим ускорение \ddot{q}_k , минимизирующее правую часть равенства (6.68):

$$\ddot{q}_k = (1 + B_k^T I_k B_k)^{-1} \left(\frac{\mu_k}{I'_k} - B_k^T I_k (A_k \ddot{x}_{k-1} + C_k) + \Phi_k^T I_k B_k \right). \quad (6.69)$$

Дальнейшее решение задачи последовательно проводят в направлении от схвата к основанию, т.е. при $k = N, N-1, \dots, 0$. При этом необходимо знать управляющие и внешние силы и моменты μ_k , $F_{s,k}$, $M_{s,k}$, а также текущие обобщенные координаты q_k и их первые производные \dot{q}_k . На первом шаге с учетом (6.67), (6.69) определяется ускорение в последней степени подвижности \ddot{q}_N из рассмотрения движе-

ния N -го звена (схвата) под действием внешних и управляющих сил и моментов. Далее определяют матрицы, входящие в правую часть равенства (6.69), и ускорения \ddot{q}_k при $k = N - 1, N - 2, \dots, 0$. После двукратного интегрирования ускорений на одном шаге и определения новых значений \dot{q}_k, q_k процедуру повторяют.

Итак, рассмотренная численная процедура позволяет осуществить моделирование движения манипуляционного механизма. Более подробно она описана А. Ф. Верещагиным в [45], где решение задачи обобщено на случай, когда на движение схвата наложены дополнительные ограничения (например, при движении по поверхности), а также на случай, когда подвижно основание манипулятора. Там приведены также рекуррентные формулы для вычисления матричных коэффициентов уравнения (6.69), значительно упрощающие процедуру вычислений.

Кратко остановимся на процедуре минимизации принуждения Z с использованием метода Лагранжа. В этом случае для того, чтобы найти движение, минимизирующее Z и совместимое со связями (6.59), вводится вектор множителей Лагранжа $\lambda = (\lambda_1 \dots \lambda_N)$. образуем новый функционал вида

$$Z^* = Z(\ddot{x}, \ddot{q}) + \lambda(\ddot{x} - \mathcal{B}\ddot{q} - \dot{\mathcal{B}}\dot{q}) = \frac{1}{2} \ddot{x}^T I \ddot{x} - \ddot{x}^T I \Phi + \dots + \frac{1}{2} \left(\ddot{q} - \frac{\mu}{I'} \right)^T \left(\ddot{q} - \frac{\mu}{I'} \right) + \lambda(\ddot{x} - \mathcal{B}\ddot{q} - \dot{\mathcal{B}}\dot{q}). \quad (6.70)$$

Вычисляя вариацию этого функционала по \ddot{x}, \ddot{q} и приравнявая ее к нулю, получаем

$$\delta Z^* = \delta \ddot{x}^T (I \ddot{x} - I \Phi) + \delta \ddot{q}^T \left(\ddot{q} - \frac{\mu}{I'} \right) + \delta \ddot{x}^T \lambda^T - \lambda \mathcal{B} \delta \ddot{q} = 0.$$

Отсюда следуют два уравнения:

$$\begin{aligned} I(\ddot{x} - \Phi) + \lambda^T &= 0, \\ -\lambda \mathcal{B} + \ddot{q}^T - \frac{\mu^T}{I'} &= 0. \end{aligned} \quad (6.71)$$

Определяя из второго вектор λ и подставляя его в первое, получим уравнение, определяющее ускорение движения звеньев:

$$\ddot{x} = -I^{-1} (\mathcal{B}^T)^{-1} \left(\ddot{q} - \frac{\mu}{I'} \right) + \Phi. \quad (6.72)$$

Заметим, что подставив в это уравнение выражение \ddot{x} через производные обобщенных координат по формуле (6.59), вновь получим уравнение движения в форме уравнения кинетостатики (5.52). Преимущество метода Гаусса достигается, таким образом, именно в тех случаях, когда используются численные методы минимизации функции принуждения на каждом шаге интегрирования уравнений движения.

Контрольные вопросы и задания

1. При каких условиях справедливы уравнения Лагранжа? Сопоставьте области применения модели динамики манипулятора в форме Лагранжа и в форме Даламбера (см. гл. 5).

2. Запишите уравнения движения манипулятора в форме уравнений Лагранжа первого рода для случая, когда схват перемещается в вертикальной плоскости.

3. Каким образом можно составить уравнения Лагранжа для манипулятора, механизм которого содержит замкнутые контуры?

4. Как учитывается явление абсолютно неупругого удара при моделировании уравнений динамики манипулятора?

5. Сформулируйте принцип Гаусса для системы материальных точек и манипуляционного механизма. Каковы условия применимости этого принципа?

6. Составьте выражение, из которого путем минимизации можно найти ускорения обобщенных координат манипулятора для случая плоского двухзвенного механизма с вращательными парами.

7. Каким образом в выражении для принуждения по Гауссу можно учесть моменты инерции роторов двигателей вращательных степеней подвижности манипулятора?

8. Составьте алгоритм моделирования динамики манипулятора, согласно принципу Гаусса, с минимизацией принуждения методом динамического программирования (приведите пример).

7. СИСТЕМА УПРАВЛЕНИЯ ИСПОЛНИТЕЛЬНОГО УРОВНЯ

К исполнительному уровню системы управления обычно относят манипуляционный (исполнительный) механизм робота и приводы, которые приводят его в движение. Для манипуляторов, обеспечивающих контурный режим управления, приводы являются следящими системами, имеющими обратные связи по координате выхода, а также, возможно, по ее производной и развиваемому моменту (или силе). Таким образом, исполнительная система манипуляционного робота представляет собой комплекс из нескольких следящих систем, работающих на общую нагрузку, т.е. на механизм манипулятора. Независимо от способа управления — по заданной траектории, алгоритмам кинематического типа (см. гл. 4) или алгоритмам, учитывающим динамику манипулятора, — во всех случаях исполнительная система должна удовлетворять определенным техническим требованиям как многомерная следящая система. Она должна быть устойчива, переходные процессы в ней должны соответствовать заданным показателям качества, точность отработки управляющих сигналов — требованиям, предъявляемым к манипулятору условиями технологического процесса.

Перечисленные требования в большинстве случаев могут быть выполнены с использованием известных методов теории автоматического управления. В данной главе рассмотрены особенности их применения для манипуляционных исполнительных систем.

7.1. Математическая модель исполнительного уровня

7.1.1. Уравнения исполнительного уровня

Исполнительная система манипуляционного робота представляет собой N приводов, каждый из которых обеспечивает движение в одной

из степеней подвижности манипулятора (рис. 7.1). Нагрузкой всех приводов является механизм манипулятора, динамика которого описана в гл. 5 и 6. На вход каждого из приводов подается управляющий сигнал $q_j(t)$, который в данном случае полагается известным. Выходом системы является вектор обобщенных координат манипулятора $q_j(t)$, $j = 1, 2, \dots, N$, или же векторы перемещений и ориентации схвата (полезной нагрузки) манипулятора в рабочем пространстве, связанные с q_j известными кинематическими соотношениями.

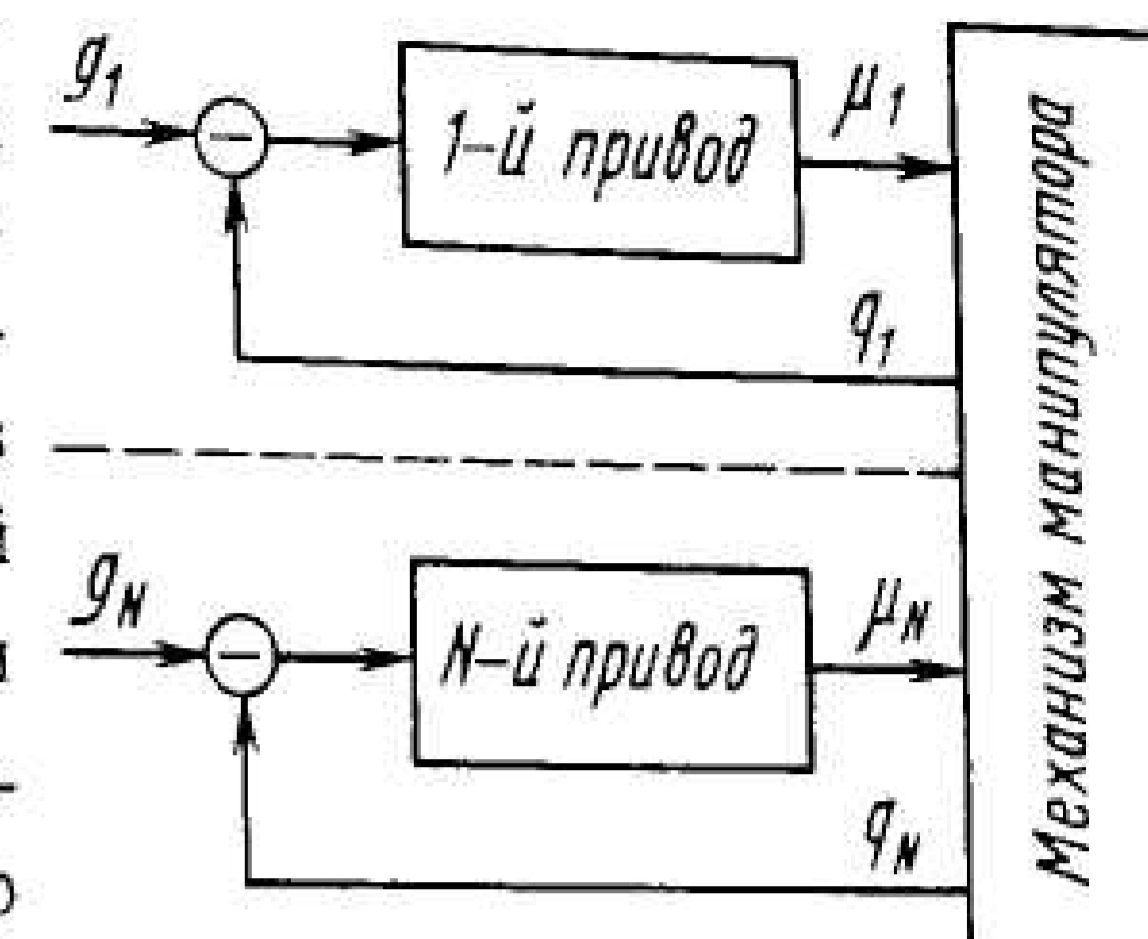


Рис. 7.1. Схема исполнительного уровня манипуляционного робота

Математическая модель исполнительного уровня включает в себя уравнение движения механизма манипулятора (см. гл. 5, 6), а также уравнения приводов его степеней подвижности. Ограничимся здесь рассмотрением приводов на базе *электродвигателей постоянного тока*. Математические модели приводов других типов, используемых в робототехнике, можно найти в [2; 24; 38]. Методика составления и анализа математической модели исполнительного уровня, в общих чертах, сохраняется для различных типов силовых агрегатов.

Напомним читателю математическую модель двигателя постоянного тока. Уравнения двигателя в операторной форме имеют следующий вид:

$$(Lp + R)i_a = y - k_\omega p x, \quad p \equiv \frac{d}{dt}, \quad (7.1)$$

$$I_a p^2 x = k_m i_a - \mu/i. \quad (7.2)$$

Здесь x — угол поворота вала двигателя; L, R — индуктивность и сопротивление цепи якоря; i_a — ток в цепи якоря; y — сигнал управления (управляющее напряжение); I_a — момент инерции ротора двигателя; μ — момент нагрузки; i — передаточное число редуктора; k_ω — коэффициент противоЭДС; k_m — коэффициент пропорциональности, связывающий ток и развиваемый двигателем момент.

В свою очередь, момент на валу нагрузки определяется уравнением механизма передачи движения (редуктора)

$$\mu = (c + \chi p)(x/i - q), \quad (7.3)$$

где c и χ — коэффициенты жесткости и потерь на деформацию соответственно; q — угол поворота вала нагрузки (обобщенная координата соответствующей степени подвижности механизма). Если, в частности, считать элементы механизма абсолютно жесткими, то $q = x/i$. Приведенные соотношения позволяют составить структурную схему привода (рис. 7.2).

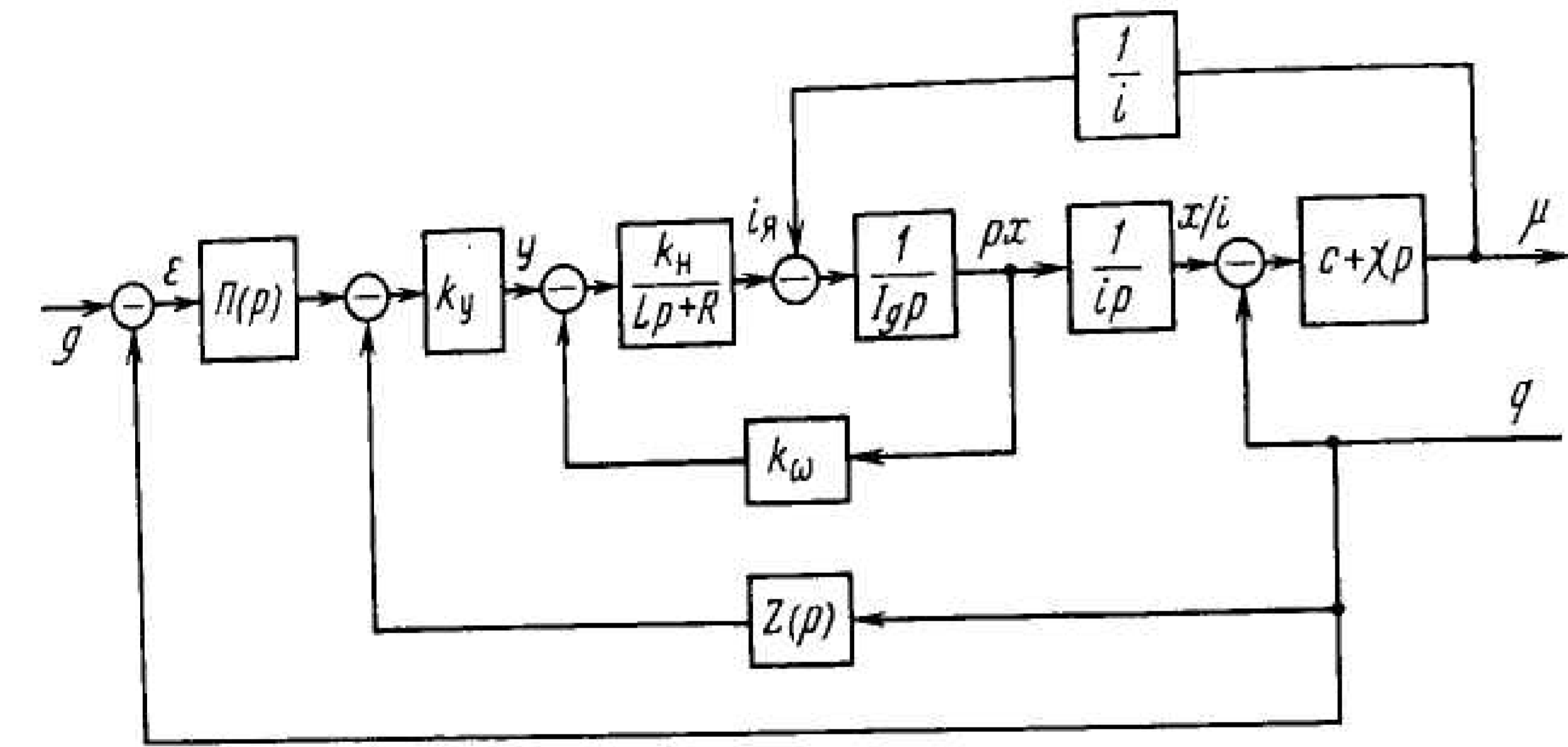


Рис. 7.2. Структурная схема привода на базе двигателя постоянного тока

Управляющее напряжение $y(t)$ формируется регулятором, на вход которого подаются сигналы управления приводом $g(t)$ с верхнего уровня управления и сигналы обратной связи. Последние вырабатываются датчиками угла q (например, потенциометрами), датчиками угловой скорости \dot{q} (тахогенераторами, цифровыми датчиками вращений), а также датчиками момента μ .

Например, при использовании пропорционально-интегро-дифференциального (ПИД) регулятора

$$y = (k_0 + k_1 p + k_2 / p)\epsilon(t), \quad (7.4)$$

где $\epsilon(t) = g(t) - x(t)$ — сигнал ошибки, а k_0, k_1, k_2 — коэффициенты регулятора, которые должны быть рассчитаны заранее при синтезе привода.

Для улучшения динамических свойств привода в его контур могут вводиться корректирующие устройства. При использовании последо-

вательного и параллельного корректирующих устройств (см. рис. 7.2) с передаточными функциями

$$H(p) = \frac{M_{11}(p)}{N_{11}(p)}, \quad Z(p) = \frac{M_{22}(p)}{N_{22}(p)}$$

получим следующее дифференциальное соотношение, связывающее сигнал управления $y(t)$ с ошибкой $\epsilon(t)$ и сигналом обратной связи $q(t)$:

$$\tilde{N}(p)y = M_1(p)\epsilon - M_2(p)q, \quad (7.5)$$

где

$$\tilde{N}(p) = N_{11}(p)N_{22}(p), \quad M_1 = M_{11}N_{22}, \quad M_2 = N_{11}M_{22}.$$

Это соотношение можно рассматривать в качестве обобщенного уравнения регулятора, включающего выражение (7.4) как частный случай.

Используя уравнения двигателя (7.1), (7.2), механизма передачи движений (7.3) и регулятора (7.5), получаем уравнение привода в виде

$$N(p)\mu = M_\epsilon(p)\epsilon - M_q(p)q. \quad (7.6)$$

где

$$N(p) = [i^2(I_a p^2(Lp + R) + k_\omega k_\alpha p) + (c + \chi p)(Lp + R)]\tilde{N}(p),$$

$$M_\epsilon(p) = iM_1(p)k_\omega(c + \chi p).$$

$$M_q(p) = (c + \chi p)[ik_\omega M_2(p) + i^2(I_a p^2(Lp + R) + k_\omega k_\alpha p)\tilde{N}(p)].$$

Без учета потерь на деформацию вала нагрузки эти формулы упрощаются, при этом с учетом $q = x/i$:

$$N(p) = \tilde{N}(p)(Lp + R),$$

$$M_\epsilon(p) = ik_\omega M_1(p),$$

$$M_q(p) = ik_\omega M_2(p) + i^2(I_a p^2(Lp + R) + k_\omega k_\alpha p)\tilde{N}(p).$$

Коэффициенты операторных полиномов $N(p), M_\epsilon(p), M_q(p)$, описывающих разомкнутый привод, обуславливаются характеристиками двигателя и механизма передачи движений, которые определяются в результате энергетического расчета манипулятора на предполагаемую нагрузку и режимы движения [38], а также параметрами регулятора. Последние выбираются из регулировочного расчета привода, обеспечивающего его устойчивость и заданные параметры качества переходных процессов. Эти параметры могут корректироваться с учетом динамики манипуляционного механизма, на чем мы остановимся далее.

Заметим, что уравнение j -го привода (7.6) при $\varepsilon_j(t) = g_j(t) - q_j(t)$ необходимо решать совместно с уравнениями динамики механизма манипулятора (5.52). В соответствии с этими уравнениями момент μ_j нагрузки на валу j -го двигателя зависит как от изменения соответствующей ему обобщенной координаты q_j , так и от обобщенных координат других степеней подвижности манипулятора.

Итак, математическая модель исполнительной системы манипуляционного робота включает в себя уравнения динамики манипуляционного механизма (5.52) и уравнения приводов степеней подвижности манипулятора (7.6), которые можно записать в виде одного матричного уравнения:

$$N(p)\mu = M_\varepsilon(p)\varepsilon - M_q(p)q, \quad (7.7)$$

где $N(p)$, $M_\varepsilon(p)$, $M_q(p)$ — матрицы следующего вида:

$$N(p) = \text{diag } N_{\mu_j}(p), \quad M_\varepsilon(p) = \text{diag } M_{\varepsilon_j}(p), \quad M_q(p) = \text{diag } M_{q_j}(p),$$

причем $j = 1, \dots, N$ — номер степени подвижности.

Теперь уравнения исполнительной системы можно записать в виде следующей системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} A(q)p^2q = B(q, pq)pq + C(q)\mathcal{F}_s + \mu, \\ N(p)\mu = M_\varepsilon(p)\varepsilon - M_q(p)q, \\ \varepsilon = g - q. \end{cases} \quad (7.8)$$

Если задан вектор управляющих сигналов $g(t)$, то полученная система дифференциальных уравнений определяет изменение вектора обобщенных координат $q(t)$ в степенях подвижности манипулятора. Движение его схвата в рабочем пространстве может быть определено в функции от обобщенных координат путем решения прямой кинематической задачи о положении (см. § 2.1).

В данном случае ограничимся рассмотрением линейной модели привода, которая вполне приемлема для следящих систем на двигателях постоянного тока с учетом малости отклонений $\varepsilon(t)$. При использовании двигателей других типов, в частности двигателей переменного тока, а также гидравлических двигателей математическая модель приводов существенно нелинейна, что осложняет задачу анализа исполнительной системы (см. [2; 38]).

Если же гипотеза о линейности модели привода принимается, то целесообразно провести линеаризацию и уравнений механизма с тем, чтобы использовать мощный аппарат анализа и синтеза линейных автоматических систем.

7.1.2. Линеаризация модели исполнительной системы

Мы условились рассматривать линейную модель привода, поэтому проблема заключается в линеаризации уравнений динамики манипуляционного механизма (5.52) относительно некоторой опорной траектории $q^*(t)$ в пространстве обобщенных координат, обеспечивающей требуемое движение схвата манипулятора в рабочем пространстве (см. § 4.1).

Для опорной траектории нелинейные матричные коэффициенты уравнения динамики (5.52) становятся известными функциями времени, и это уравнение приобретает вид

$$A^*(t)\ddot{q}^* = B^*(t)\dot{q}^* + C^*(t)\mathcal{F}_s^* + \mu^*. \quad (7.9)$$

где

$$A^*(t) = A(q^*(t)), \quad B^*(t) = B(q^*(t), \dot{q}^*(t)), \quad C^*(t) = C(q^*(t)),$$

т.е. индексом «*» обозначены значения коэффициентов и переменных, соответствующие опорной траектории. Значения q^* , \dot{q}^* и \ddot{q}^* определяют на этапе кинематического планирования траектории. Предполагается, что вектор внешних сил и моментов $\mathcal{F}_s^* = (F_s^* \ M_s^*)^T$ вдоль заданной траектории также известен: в частном случае свободного движения компонентами вектора F_s^* являются силы тяжести звеньев, а $M_s^* = 0$.

Из уравнения (7.9) может быть определен вектор сил и моментов μ^* , который должен быть развит приводами степеней подвижности для движения по опорной траектории.

Для возмущенного движения $q_s(t) = q^*(t) + \Delta q(t)$, где $\Delta q(t)$ — малое отклонение от опорного движения, получим

$$\begin{aligned} A^*(q^* + \Delta q)(\ddot{q} + \Delta\ddot{q}) &= B(q^* + \Delta q, \dot{q}^* + \Delta\dot{q})(\dot{q}^* + \Delta\dot{q}) + \\ &+ C(q^* + \Delta q)\mathcal{F}_s^* + \mu^* + \Delta\mu. \end{aligned}$$

Разложим нелинейные матричные коэффициенты A , B , C в ряд Тейлора и отбросим слагаемые, имеющие порядок малости выше первого. Тогда с учетом (7.9) уравнение в приращениях будет иметь вид

$$\begin{aligned} & A^* \Delta \ddot{q} + (A_q^* \Delta q) \ddot{q}^* = \\ & = (B_q^* \Delta q) \dot{q}^* + (B_{\dot{q}}^* \Delta \dot{q}) \dot{q}^* + B^* \Delta \dot{q} + C^* \Delta \mathcal{F}_s + (C_q^* \Delta q) \mathcal{F}_s^* + \Delta \mu. \end{aligned} \quad (7.10)$$

Здесь приняты следующие обозначения:

$$\begin{aligned} A_q^* \Delta q &= \sum_{i=1}^N A_{q_i}^* \Delta q_i, \quad B_q^* \Delta q = \sum_{i=1}^N B_{q_i}^* \Delta q_i, \\ B_{\dot{q}}^* \Delta \dot{q} &= \sum_{i=1}^N B_{\dot{q}_i}^* \Delta \dot{q}_i, \quad C_q^* \Delta q = \sum_{i=1}^N C_{q_i}^* \Delta q_i, \end{aligned}$$

где

$$A_{q_i}^* = \left(\frac{\partial A}{\partial q_i} \right)_{q=q^*}, \quad B_{q_i}^* = \left(\frac{\partial B}{\partial q_i} \right)_{q=q^*}, \quad B_{\dot{q}_i}^* = \left(\frac{\partial B}{\partial \dot{q}_i} \right)_{\dot{q}=\dot{q}^*}, \quad C_{q_i}^* = \left(\frac{\partial C}{\partial q_i} \right)_{q=q^*},$$

$i=1, 2, \dots, N$.

Подставим теперь последние выражения в уравнение в приращениях (7.10) и преобразуем соответствующие слагаемые таким образом, чтобы получить произведение матричных коэффициентов и приращений Δq , $\Delta \dot{q}$, $\Delta \ddot{q}$. Для слагаемого в левой части уравнения получим

$$(A_q^* \Delta q) \ddot{q}^* = \hat{A}^* \Delta q,$$

где \hat{A}^* — матрица:

$$\hat{A}^* = (A_{q_1}^* \ddot{q}^* \quad A_{q_2}^* \ddot{q}^* \quad \dots \quad A_{q_N}^* \ddot{q}^*).$$

Аналогично для остальных слагаемых будем иметь

$$(B_q^* \Delta q) \dot{q}^* = B_1^* \Delta q,$$

где

$$B_1^* = (B_{q_1}^* \dot{q}^* \quad B_{q_2}^* \dot{q}^* \quad \dots \quad B_{q_N}^* \dot{q}^*),$$

$$(B_{\dot{q}}^* \Delta \dot{q}) \dot{q}^* = B_2^* \Delta \dot{q},$$

$$B_2^* = (B_{\dot{q}_1}^* \dot{q}^* \quad B_{\dot{q}_2}^* \dot{q}^* \quad \dots \quad B_{\dot{q}_N}^* \dot{q}^*),$$

$$(C_q^* \Delta q) \mathcal{F}_s^* = \hat{C}^* \Delta q,$$

$$\hat{C}^* = (C_{q_1}^* \mathcal{F}_s^* \quad C_{q_2}^* \mathcal{F}_s^* \quad \dots \quad C_{q_N}^* \mathcal{F}_s^*).$$

С учетом введенных обозначений уравнение в приращениях (7.10) можно записать так:

$$A^* \Delta \ddot{q} + \hat{A}^* \Delta q = B^* \Delta \dot{q} + B_1^* \Delta q + B_2^* \Delta \dot{q} + C^* \Delta \mathcal{F}_s + \hat{C}^* \Delta q + \Delta \mu;$$

группируя слагаемые при Δq , $\Delta \dot{q}$ и $\Delta \ddot{q}$, запишем это уравнение в виде

$$a^* \Delta \ddot{q} + b^* \Delta \dot{q} + c^* \Delta q = \Delta \mu + \Delta \mu_s, \quad (7.11)$$

где

$$a^* = A^*, \quad b^* = -B^* - B_2^*, \quad c^* = \hat{A}^* - B_1^* - \hat{C}^*, \quad \Delta \mu_s = C^* \Delta \mathcal{F}_s.$$

Таким образом, получена система линейных дифференциальных уравнений $2N$ -порядка (7.11), описывающая движение манипуляционного механизма в окрестности опорной траектории.

Для заданной во времени траектории $q^*(t)$ матрицы a^* , b^* , c^* будут определены как матрицы с переменными во времени коэффициентами, причем

$$\begin{aligned} a^*(t) &= a^*(q^*(t)), \quad b^*(t) = b^*(q^*(t), \dot{q}^*(t)), \\ c^*(t) &= c^*(q^*(t), \dot{q}^*(t), \ddot{q}^*(t), \mathcal{F}_s^*(t)). \end{aligned}$$

Иногда возникает необходимость анализировать движение манипуляционного механизма не в окрестности траектории, а в окрестности некоторой точки q^* , например конечной точки $q^*(t)$ заданной траектории. В этом случае $\dot{q}^* = \ddot{q}^* = \Delta \mathcal{F}_s^* = 0$, $b^* = 0$, матричные коэффициенты a^* , c^* постоянны, причем $c^* = \hat{C}^*$, и уравнение (7.11) принимает более простой вид

$$a^* \Delta \ddot{q} + c^* \Delta q = \Delta \mu. \quad (7.12)$$

В отсутствие внешних сил коэффициент c^* также равен нулю; получим

$$a^* \Delta \ddot{q} = \Delta \mu. \quad (7.13)$$

Заметим, что матрицы b^* и c^* могут быть получены в явном виде, поскольку матрицы A , B и C были определены выше в гл. 3. Эти выражения приведены также в [35].

Запишем теперь уравнения линеаризованной модели исполнительного уровня с учетом уравнений приводов. Чтобы упростить запись, условимся опустить знак Δ , обозначающий отклонения соответствующих переменных; получим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} a^* p^2 q + b^* p q + c^* q &= \mu + \mu_s, \\ N(p) \mu &= M_\varepsilon(p) \varepsilon - M_q(p) q, \\ \varepsilon &= g - q. \end{aligned} \quad (7.14)$$

Обозначая

$$h^*(p) = a^* p^2 + b^* p + c^*, \quad (7.15)$$

можно представить исполнительную систему в виде многосвязной линейной следящей системы (рис. 7.3). Дифференциальное уравнение системы в матричной форме имеет вид

$$(N(p)h^*(p) + M_q(p))q = M_\varepsilon(p)\varepsilon + N(p)\mu_s. \quad (7.16)$$

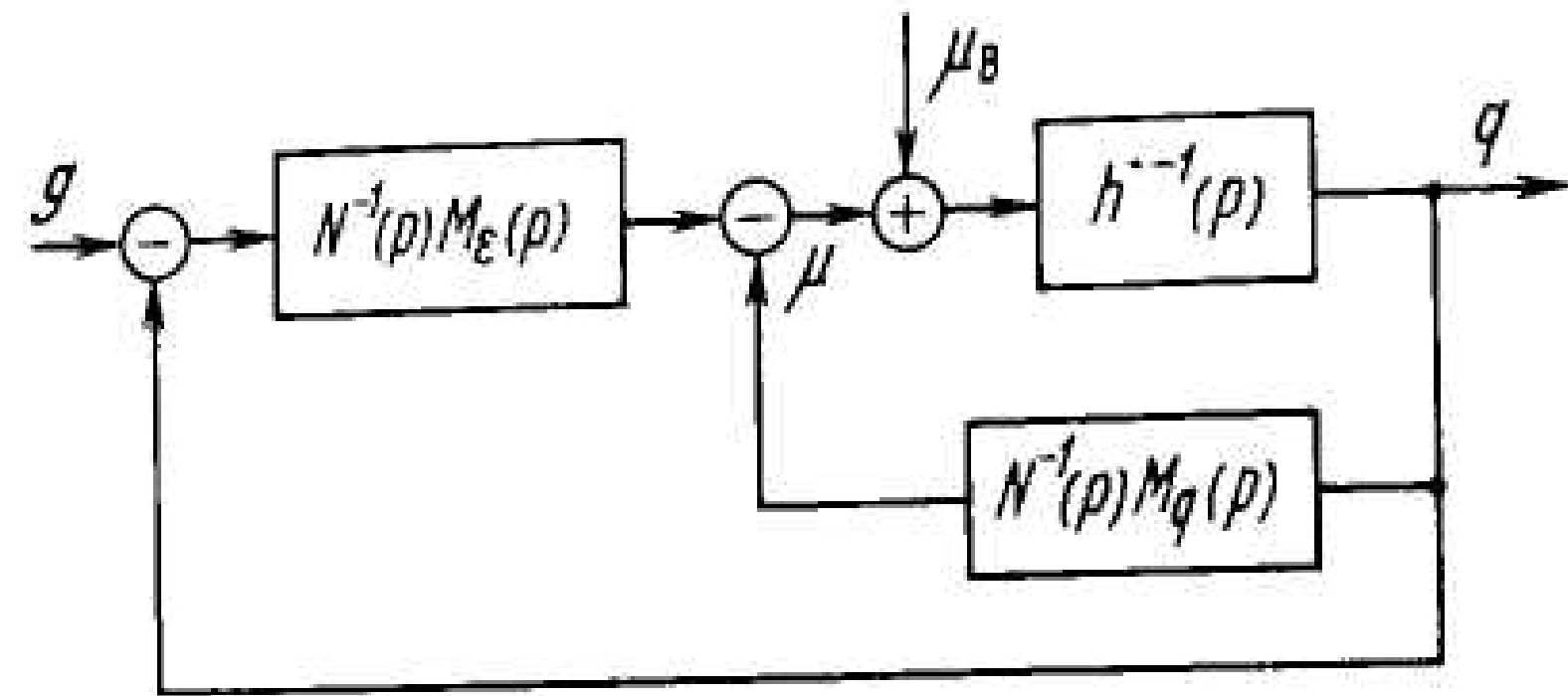


Рис. 7.3. Схема линейризованной исполнительной системы

Добавляя к нему условие замыкания $\varepsilon = g - q$, получаем уравнение относительно обобщенных координат манипулятора

$$(N(p)h^*(p) + M_q(p) + M_\varepsilon(p))q = M_\varepsilon(p)g + N(p)\mu_s. \quad (7.17)$$

Заметим, что при выборе другой опорной траектории изменяются только коэффициенты матричного трехчлена $h^*(p)$, которые зависят от геометрических и инерционных характеристик манипулятора, а также от параметров q^* , \dot{q}^* и \ddot{q}^* опорной траектории. Поскольку эта траектория предполагается известной, то коэффициенты $h^*(p)$ являются известными функциями времени. Коэффициенты матричных полиномов $N(p)$, $M_q(p)$ и $M_\varepsilon(p)$ зависят только от параметров приводов степеней подвижности манипулятора.

Следует также иметь в виду, что коэффициенты a^* , b^* , c^* полинома $h^*(p)$ изменяются медленно по сравнению с длительностью переходных процессов в электромеханических приводах, описываемых вторым уравнением системы (7.14). Это позволяет воспользоваться методом замороженных параметров при приближенном анализе динамики исполнительной системы.

Опорную траекторию можно при этом считать заданной в $3 \times N$ -пространстве обобщенных координат и их производных $\vec{q} = [q, \dot{q}, \ddot{q}]$. В малой окрестности точки \vec{q}^* этой траектории матричные коэффициенты a^* , b^* , c^* полагаем постоянными. Тогда в этой же окрестности может быть введена в соответствии с (7.16) матричная передаточная функция разомкнутой исполнительной системы $W(p)$, т.е. (при $\mu_s = 0$)

$$q = W(p)\varepsilon, \quad (7.18)$$

где

$$W(p) = (h^*(p) + W_q(p))^{-1}W_\varepsilon(p), \quad (7.19)$$

причем

$$W_q(p) = N^{-1}(p)M_q(p) \text{ —}$$

передаточная матрица местных обратных связей, а

$$W_\varepsilon(p) = N^{-1}(p)M_\varepsilon(p) \text{ —}$$

передаточная матрица приводов по каналу ошибки.

Передаточная матрица замкнутой системы $\Phi(p)$, связывающая вектор управления $g(t)$ и вектор обобщенных координат $q(t)$:

$$q = \Phi(p)g, \quad (7.20)$$

имеет следующий вид:

$$\Phi(p) = (h^*(p) + W_q(p) + W_\varepsilon(p))^{-1}W_\varepsilon(p). \quad (7.21)$$

Заметим, что матричное выражение (7.21) нетрудно представить в виде уравнения

$$\Phi(p) = (E + W(p))^{-1}W(p),$$

аналогичного уравнению, связывающему передаточные функции разомкнутой и замкнутой систем в теории автоматического регулирования.

Можно ввести также передаточную функцию системы по возмущениям μ_s , полагая, что в отсутствие управляющих сигналов (при $g = 0$)

$$q = \Phi_s(p)\mu_s; \quad (7.22)$$

тогда

$$\Phi_s(p) = (h^*(p) + W_q(p) + W_\varepsilon(p))^{-1}. \quad (7.23)$$

В частном случае линейризации в окрестности стационарной точки $q^* = \text{const}$, $\dot{q}^* = \ddot{q}^* = 0$ выражение $h^*(p)$ в соответствии с (7.12) упрощается и принимает вид

$$h^*(p) = a^* p^2 + c^*,$$

или, в случае отсутствия внешних сил,

$$h^*(p) = a^* p^2.$$

Итак, мы получили линеаризованную математическую модель исполнительской системы манипуляционного робота. Для ее исследования и синтеза можно применять методы теории линейных систем автоматического управления.

7.2. Исследование линеаризованной модели исполнительской системы

7.2.1. Частотные характеристики и обобщенные показатели качества

Возьмем за основу модель исполнительской системы в форме (7.18). Матрица $h^*(p)$, характеризующая динамику манипуляционного механизма, не является диагональной, поэтому не диагональна и передаточная матрица $W(p)$. Ее диагональные элементы $W_{ij}(p)$ характеризуют преобразование сигнала ошибки i -го привода в движение i -й степени подвижности $q_i(t)$. Недиагональные же элементы $W_{ik}(p)$ определяют перекрестные связи, т.е. влияние перемещения по координате q_k на движение i -й степени подвижности.

Введем матрицу амплитудно-фазовых частотных (АФЧХ) характеристик разомкнутой исполнительской системы

$$W(j\omega) = (h^*(j\omega) + W_q(j\omega))^{-1} W_e(j\omega). \quad (7.24)$$

Здесь

$$W_q(j\omega) = \text{diag} W_{q_i}(j\omega), \quad W_e(j\omega) = \text{diag} W_{e_i}(j\omega) \quad \text{—}$$

диагональные матрицы, определяемые характеристиками приводов степеней подвижности манипулятора, причем

$$W_{q_i}(j\omega) = M_{q_i}(j\omega)/N_i(j\omega), \quad W_{e_i}(j\omega) = M_{e_i}(j\omega)/N_i(j\omega)$$

(см. п. 7.1.1).

Матрица

$$h^*(j\omega) = a^*(j\omega)^2 + b^*(j\omega) + c^* \quad (7.25)$$

характеризует динамику манипулятора в окрестности исследуемой точки опорной траектории.

Матрица частотных характеристик $W(j\omega)$ описывает работу исполнительской системы в целом. Вид ее диагональных элементов $W_{ii}(j\omega)$ позволяет судить о точности слежения i -й подсистемы на рабочих частотах и качестве ее переходных процессов.

Недиагональные элементы $W_{ik}(j\omega)$ позволяют определить уровень взаимовлияния и диапазон частот, в которых такое взаимовлияние существенно. Выводы о характере взаимовлияния можно получить непосредственно из формулы (7.21), построив амплитудные и фазовые частотные характеристики для замкнутой системы.

Матрицу частотных характеристик замкнутой системы запишем в виде

$$\Phi(j\omega) = (h^*(j\omega) + W_q(j\omega) + W_e(j\omega))^{-1} W_e(j\omega). \quad (7.26)$$

Взаимовлияние каналов управления характеризуется прежде всего недиагональными членами матрицы $\Phi(j\omega)$. Например, частотная характеристика $\Phi_{12}(j\omega)$ в соответствии с (7.20) определяет влияние управляющего воздействия по второму каналу $g_2(t)$ на динамические процессы в первом канале управления, т.е. на изменение переменной $q_1(t)$.

Однако взаимовлияние проявляется и в выражениях для диагональных частотных характеристик $\Phi_{ii}(j\omega)$. Действительно, в том случае, когда взаимовлияние полностью отсутствует и динамика процессов в каждом канале управления определяется уравнениями движения отдельно взятого привода, в выражении (7.21)

$$h^*(p) = h_0^*(p) = \text{diag}[h_{ii}^*(p)]. \quad (7.27)$$

При этом выражения для $h_{ii}^*(p)$ зависят от приведенных к валу i -го привода сил и моментов инерции механизма. Формула (7.27) соответствует случаю, когда работает только один i -й привод; остальные приводы находятся в «заторможенном» состоянии и, следовательно, не влияют на работу i -го привода.

Диагональную передаточную матрицу комплекса отдельно взятых приводов можно представить в виде

$$\Phi_0(p) = (h_0^*(p) + W_q(p) + W_e(p))^{-1} W_e(p). \quad (7.28)$$

Передаточную матрицу исполнительской системы с учетом взаимовлияния (7.21) можно выразить через передаточную матрицу $\Phi_0(p)$ по формуле

$$\Phi(p) = \hat{\Phi}(p)\Phi_0(p), \quad (7.29)$$

где

$$\hat{\Phi}(p) = [(h_0^*(p) + W_q(p) + W_e(p))^{-1} \tilde{h}(p) + E]^{-1},$$

$$\tilde{h}(p) = h^*(p) - h_0^*(p) \quad —$$

матрица, характеризующая влияние перекрестных связей. Переходя к частотным характеристикам, получим

$$\Phi(j\omega) = \hat{\Phi}(j\omega)\Phi_0(j\omega).$$

Таким образом,

$$\Phi_{ii}(j\omega) = \hat{\Phi}_{ii}(j\omega)\Phi_{i0}(j\omega),$$

и сомножители $\hat{\Phi}_{ii}(j\omega)$ позволяют определить, насколько существенно взаимовлияние каналов для отдельных приводов в форме частотных характеристик.

Отметим, что влияние перекрестных связей обычно проявляется в среднем диапазоне частот. Действительно, в области низких частот

$$h^*(j\omega) \approx c^*,$$

$$\Phi(j\omega) \approx (c^* + W_q(j\omega) + W_e(j\omega))^{-1} W_e(j\omega).$$

Однако в диапазоне низких частот приближенно выполняется условие $|\Phi_{ii}(j\omega)| \approx 1$, что и обеспечивает процесс слежения. Обычно это условие выполняется за счет выбора большого коэффициента усиления (добротности) передаточной функции разомкнутого привода, благодаря чему в этой области частот

$$|W_{ei}(j\omega)| \gg |W_{qi}(j\omega)| + c_{ii}^*.$$

Следовательно, матрица $c^* + W_q(j\omega) + W_e(j\omega)$ близка к диагональной матрице $W_e(j\omega)$ и перекрестные связи, возникающие за счет недиагональных членов c_{ik}^* , несущественны. По этой же причине несущественно влияние перекрестных связей на низких частотах и на частотные характеристики отдельных приводов, так как здесь $\tilde{h}(j\omega) \approx 0$ и в соответствии с (7.29) $\hat{\Phi}(j\omega) \approx E$.

В области высоких частот $h^*(j\omega) \approx a^*(j\omega)^2$, и частотные характеристики

$$\Phi(j\omega) \approx [a^*(j\omega)^2 + W_e(j\omega) + W_q(j\omega)]^{-1} W_e(j\omega)$$

для любой реальной механической системы удовлетворяют условию

$$|\Phi(j\omega)| \rightarrow 0 \text{ при } \omega \rightarrow \infty.$$

Таким образом, в области высоких частот взаимовлияние каналов управления также не имеет существенного значения.

Из наших рассуждений следует, что может существовать некоторая область средних частот $\omega \in \Omega_c$, в которой взаимовлияние существенно.

Определим

$$\max_{\omega \in \Omega_c} |\Phi_{ik}(j\omega)| = \mu_{ik}$$

как показатель влияния k -го канала на i -й. Если a_{pk} — рабочая амплитуда эквивалентного гармонического сигнала управления $g_k(t)$, то погрешность за счет взаимовлияния в i -м канале δq_{si} можно оценить, используя неравенство

$$|\delta q_{si}| \leq \delta q_{si}^*,$$

где

$$\delta q_{si}^* = \sum_{k=1, k \neq i}^N \mu_{ik} a_{pk}.$$

Вызванная взаимовлиянием каналов управления погрешность в положении схвата δr_N характеризуется неравенством

$$\|\delta r_N\| \leq \|J(q^*)\| \|\delta q_s^*\|, \quad (7.30)$$

где $\|\delta r_N\|$, $\|\delta q_s^*\|$ — евклидова норма соответствующих векторов, т.е.

$$\|\delta r_N\| = \left(\sum_{i=1}^m (\delta r_{Ni})^2 \right)^{1/2}.$$

Величину $\|J(q^*)\|$ в правой части неравенства (7.30) можно рассматривать как обобщенный показатель уровня взаимовлияния каналов исполнительной системы.

Помимо взаимовлияния, матрица частотных характеристик исполнительной системы позволяет оценить и другие показатели ее качества.

По виду амплитудно-частотных характеристик (АЧХ) $|\Phi_{ii}(j\omega)|$ можно судить о показателях колебательности M_i по отдельным каналам управления:

$$M_i = \max_{\omega \in (0, \infty)} |\Phi_{ii}(j\omega)|.$$

Для обобщенной оценки манипулятора можно ввести средний показатель колебательности в данной точке q^* :

$$\bar{M} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N M_i. \quad (7.31)$$

Заметим, что в общем случае показатель \bar{M} зависит также от \dot{q}^* и \ddot{q}^* , что следует из приведенных выше формул для $\Phi(j\omega)$.

Показатель колебательности характеризует качество переходных процессов, возникающих при резких изменениях сигнала управления $g(t)$. Это не характерно для программных движений, построенных с использованием интерполяционных полиномов (см. § 4.1), но может приводить к потере точности, ударам и другим нежелательным явлениям в случае неожиданной остановки, включения, перехода манипулятора с одного режима управления на другой. Поэтому величину \bar{M} необходимо ограничить некоторым числом M^* , определяемым условиями работы: $\bar{M} < M^*$.

Другой характеристикой переходных процессов является их время t_n , связь которого с частотными характеристиками хорошо известна (см. [54], (время t_n определяет переход системы в режим нормального функционирования после завершения переходных процессов). Целесообразно использовать следующий обобщенный показатель времени переходных процессов для исполнительной системы:

$$t_n = \max_{i \in [1, N]} t_{ni}, \quad (7.32)$$

определяющий момент времени, после которого завершатся переходные процессы во всех каналах управления манипулятора.

Нетрудно определить оценки и для динамической ошибки системы. Для выбранной программной траектории $g(t)$ можно определить условную рабочую частоту

$$\omega_p = \ddot{g}_{\max} / \dot{g}_{\max}$$

и условную амплитуду

$$a_p = \dot{g}_{\max}^2 / \ddot{g}_{\max}$$

эквивалентного гармонического воздействия, при котором динамическая ошибка по амплитуде в i -м канале ε_{di} оценивается с помощью

частотной характеристики i -го канала по ошибке. Из выражения (7.16) следует, что матрица частотных характеристик по ошибке равна

$$\Phi_\varepsilon(j\omega) = (N(j\omega)h^*(j\omega) + M_q(j\omega))^{-1} M_\varepsilon(j\omega).$$

Для астатических систем в области рабочих частот

$$\Phi_{\varepsilon ii}(j\omega) \approx W_{ii}^{-1}(j\omega).$$

Если взаимовлиянием каналов в области рабочих частот можно пренебречь, то для динамической ошибки ε_{di} в i -м канале управления справедлива оценка

$$\varepsilon_{di} \leq a_p |\Phi_{\varepsilon i}(j\omega_p)| \approx \frac{a_p}{|W_{ii}(j\omega_p)|}.$$

Ошибка ε_d возрастает по мере увеличения частоты ω_p (уменьшения $|W_{ii}(j\omega_p)|$). Поэтому имеет смысл оценить ее на правой границе допустимого диапазона, т.е. при $\omega_p = \omega_{p\max}$:

$$\varepsilon_{di} \leq a_p |\Phi_\varepsilon(j\omega_{p\max})| = \varepsilon_{di\max}.$$

Введем вектор динамических ошибок каналов управления $\varepsilon_d = [\varepsilon_{di}]$. В рабочем пространстве манипулятора динамические ошибки приводят к отклонению схвата от требуемого положения в соответствии с кинематическим соотношением

$$\delta r_N = J(q^*) \varepsilon_d.$$

Для этой величины справедливо неравенство

$$\|\delta r_N\| \leq \|J(q^*)\| \|\varepsilon_{d\max}\|. \quad (7.33)$$

правая часть которого определяет радиус сферы, построенной около исследуемой точки рабочего пространства, $r_N^* = f(q^*)$. Эта ошибка обусловлена динамикой исполнительной системы; она не должна превышать значение допустимой погрешности при выполнении заданной технологической операции.

Пример 7.1. Приведем некоторые результаты частотного анализа манипулятора УЭМ-1 (рис. 7.4). Манипулятор оснащен двигателями постоянного тока серии ДПМ. Основные технические характеристики манипулятора УЭМ-1 можно найти в [33].

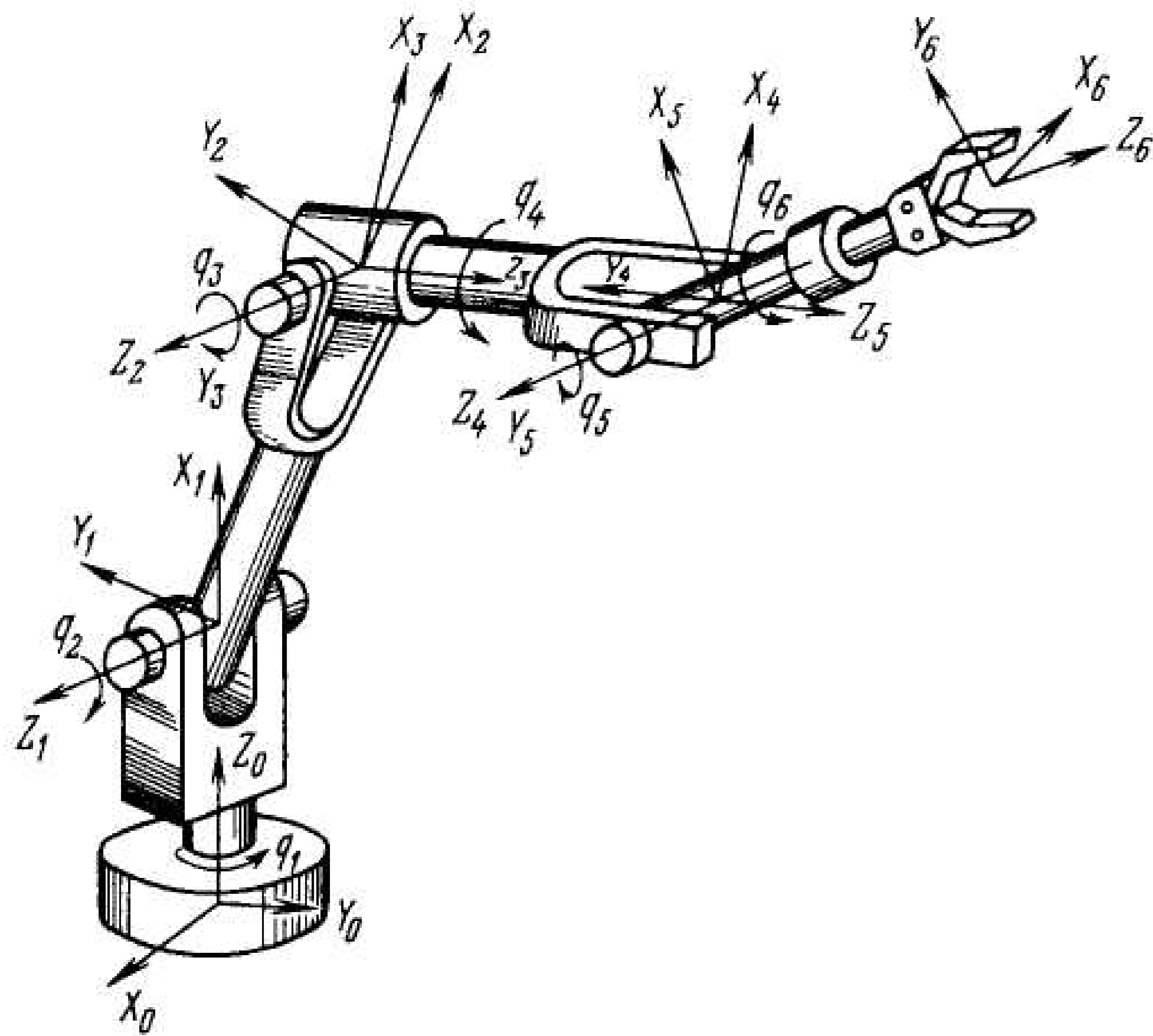


Рис. 7.4. Схема манипулятора УЭМ-1

Исследование проводилось в окрестности рабочей точки, заданной вектором обобщенных координат $q^* = 0$. На рис. 7.5 показаны логарифмические амплитудно-частотные характеристики (ЛАЧХ) и фазо-частотные характеристики (ФЧХ) разомкнутой системы управления по координате q_2 . Сплошной линией показаны ЛАЧХ и ФЧХ разомкнутого канала управления, построенные без учета динамического взаимодействия. В этом случае частотная характеристика $W_{220}(j\omega)$ является одним из диагональных элементов матрицы (7.24) при $h^*(j\omega) = h_0^*(j\omega)$ (см. (7.27)). Пунктирной линией обозначены ЛАЧХ и ФЧХ для этого же канала управления с учетом взаимодействия, т.е. частотные характеристики диагонального элемента $W_{22}(j\omega)$ матрицы частотных характеристик (7.24). Связь между передаточными матрицами отдельно взятых приводов и с учетом взаимодействия определяется, как было показано выше, формулой (7.29). Из рисунка ясно, что до частоты $\omega = 10 \text{ с}^{-1}$ взаимодействие практически отсутствует. После частоты $\omega = 1000 \text{ с}^{-1}$ ЛАЧХ различаются между собой на постоянную величину

ну, а ФЧХ практически совпадают. Это соответствует сделанному выше выводу о том, что взаимодействие несущественно на низких и высоких частотах. Однако в данном случае взаимодействие несущественно и в области средних частот; оно приводит лишь к небольшому снижению запасов устойчивости. Показатели колебательности и динамической точности в рабочем диапазоне частот $\omega \leq 10 \text{ с}^{-1}$ остаются практически неизменными.

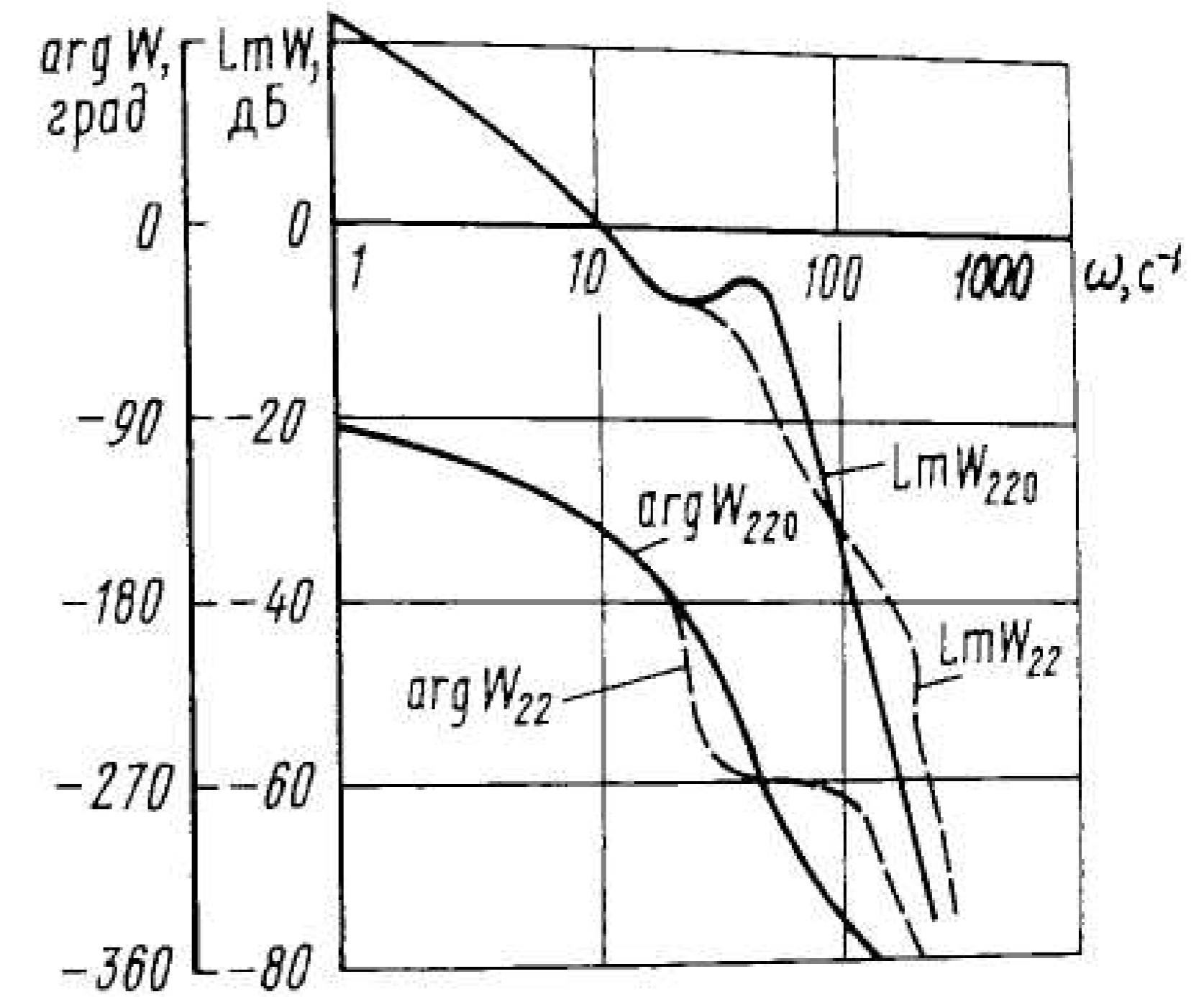


Рис. 7.5. ЛАЧХ и ФЧХ системы управления по координате q_2

На рис. 7.6 показаны графики АФЧХ и ФЧХ, соответствующие элементу $W_{23}(j\omega)$, матрицы частотных характеристик разомкнутой исполнительной системы $W(j\omega)$ (7.19). Они характеризуют влияние процессов управления по третьему каналу на процесс управления во втором канале. Как и в предыдущем случае, влияние проявляется только в среднем диапазоне частот $10 \text{ с}^{-1} \leq \omega \leq 100 \text{ с}^{-1}$. Взаимодействие носит резонансный характер и достигает максимума для $W_{23}(j\omega)$ при $\omega \approx 12 \text{ с}^{-1}$.

На этих частотах взаимодействие третьего канала на работу второго будет заметным, однако в диапазоне рабочих частот $\omega \leq 10 \text{ с}^{-1}$ им можно пренебречь.

Влияние процессов управления во втором канале на работу третьего и пятого каналов управления иллюстрируется во временной области

рис. 7.7. Здесь представлены результаты моделирования динамики системы, когда при нулевых начальных условиях на вход второго привода подается управляющий сигнал. За счет динамического взаимовлияния переходные процессы возникают и в остальных каналах управления.

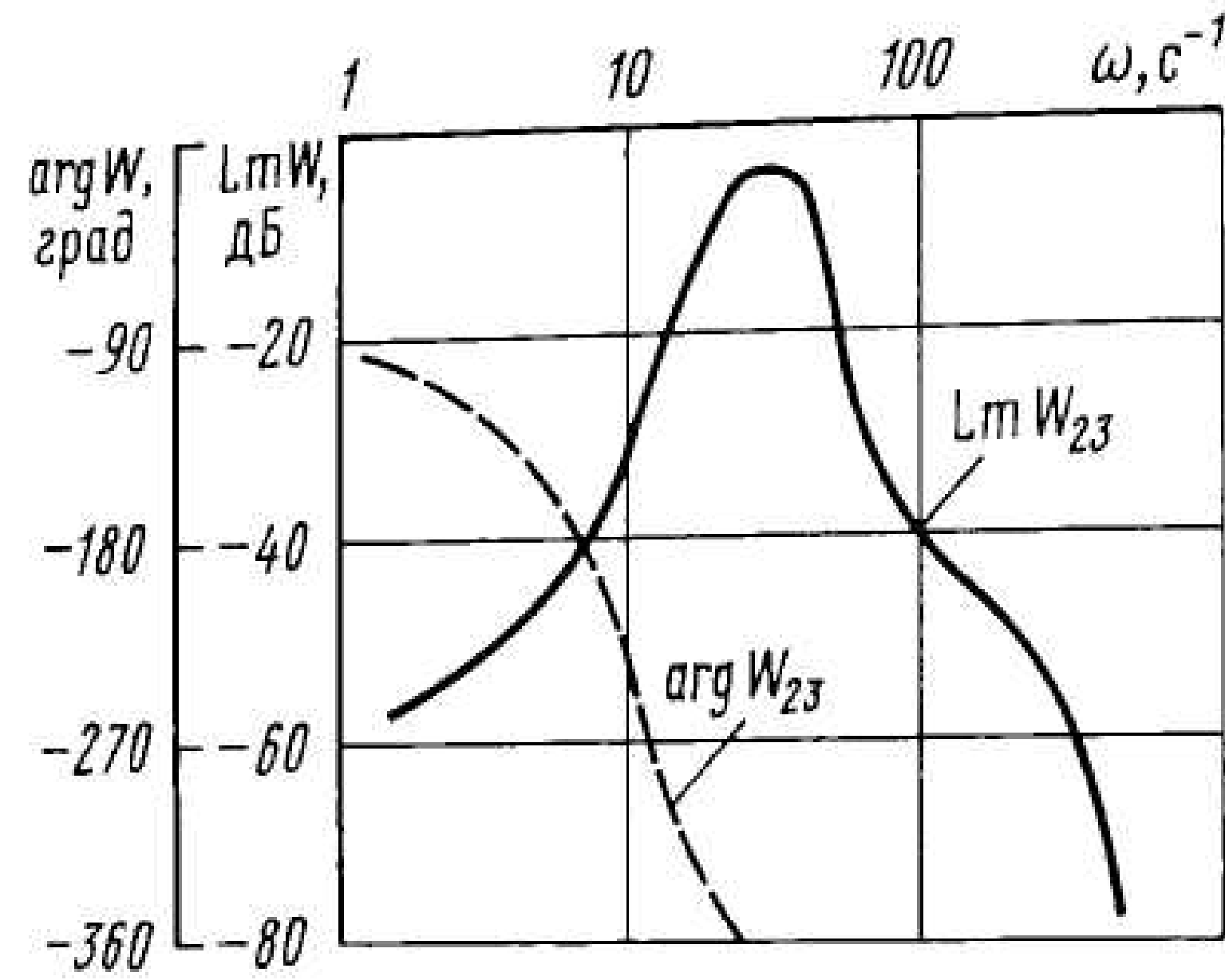


Рис. 7.6. ЛАЧХ и ФЧХ влияния процесса управления в третьем канале на работу второго канала

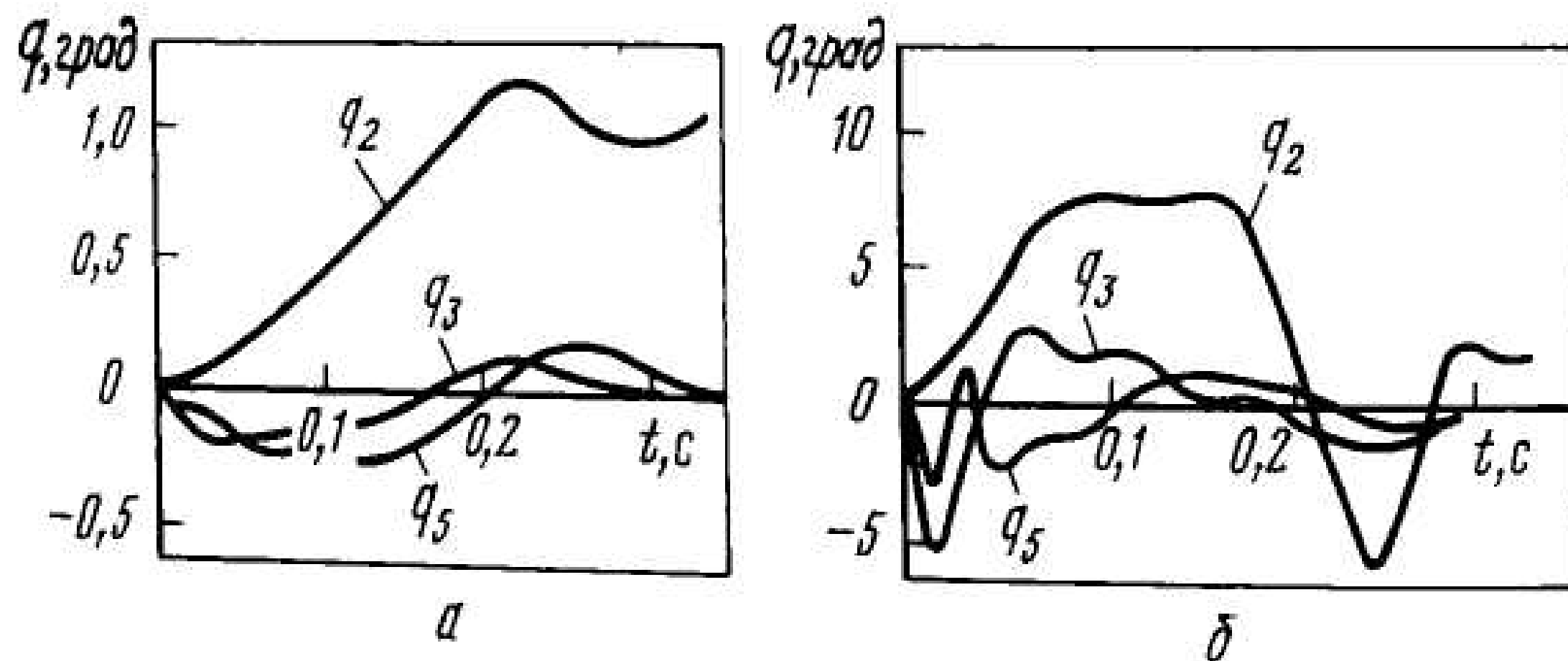


Рис. 7.7. Влияние процесса управления во втором канале на работу третьего и пятого каналов: единичное ступенчатое воздействие на входе второго привода (а); прямоугольный импульс (б)

7.2.2. Устойчивость исполнительной системы

Полученные в п. 7.2.1 соотношения позволяют проанализировать устойчивость линеаризованной исполнительной системы. Эта задача может быть решена одним из способов, принятых в теории линейных

автоматических систем. Наиболее простой способ заключается в непосредственном анализе характеристического многочлена системы дифференциальных уравнений (7.17), описывающих замкнутую исполнительную систему. Этот многочлен имеет вид

$$G(\lambda) = \det(N(\lambda)h^*(\lambda) + M_q(\lambda) + M_\varepsilon(\lambda)). \quad (7.34)$$

В соответствии с критерием Гурвица исполнительная система устойчива, если главные диагональные миноры матрицы Гурвица, составленной из коэффициентов характеристического многочлена $G(\lambda)$, будут строго положительны ([54, с. 135]):

$$\Delta_i > 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (7.35)$$

Заметим, что если рассматривать устойчивость каждого привода по отдельности, то его характеристический многочлен $G_{0i}(\lambda)$ будет включать только соответствующие диагональные элементы матрицы $h_i^*(\lambda)$:

$$G_{0i}(\lambda) = \det(N_i(\lambda)h_i^*(\lambda) + M_{q_i}(\lambda) + M_{\varepsilon_i}(\lambda)), \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (7.36)$$

Следовательно,

$$G_0(\lambda) = \prod_{i=1}^n G_{0i}(\lambda) = \det(N(\lambda)h_0^*(\lambda) + M_q(\lambda) + M_\varepsilon(\lambda)),$$

где

$$h_0^*(\lambda) = \text{diag}[h_i^*(\lambda)].$$

Из соотношения (7.34) следует, что

$$G(\lambda) = G_0(\lambda)\hat{G}(\lambda). \quad (7.37)$$

Здесь

$$\hat{G}(\lambda) = \det(E + R(\lambda)), \quad (7.38)$$

$$R(\lambda) = [N(\lambda)h_0^*(\lambda) + M_q(\lambda) + M_\varepsilon(\lambda)]^{-1} N(\lambda)\tilde{h}(\lambda),$$

$$\tilde{h}(\lambda) = h^*(\lambda) - h_0^*(\lambda).$$

Таким образом, исполнительная система устойчива при выполнении следующих условий:

- а) устойчивы все отдельно взятые приводы (корни характеристического многочлена $G_0(\lambda)$ лежат в левой полуплоскости);
- б) корни характеристического многочлена $\hat{G}(\lambda)$ также лежат в левой полуплоскости.

Следует иметь в виду, что $\hat{G}(\lambda)$ — это характеристический многочлен, соответствующий введенной выше передаточной матрице $\hat{\Phi}(p)$, определяющей эффект взаимовлияния каналов управления в соответствии с (7.29). Поэтому смысл условия б заключается в том, чтобы взаимовлияние каналов не нарушало устойчивость системы.

Выражение $R(\lambda)$ связано с выражением передаточной матрицы комплекса отдельно взятых приводов $\Phi_0(p)$ равенством

$$R(\lambda) = \Phi_0(\lambda)W_\varepsilon^{-1}(\lambda)\tilde{h}(\lambda). \quad (7.39)$$

Поскольку $\tilde{h}(\lambda)$ — матрица, состоящая из полиномов второго порядка (см. (7.15)),

$$\Phi_0(\lambda)W_\varepsilon^{-1}(\lambda) = [h_0^*(\lambda) + W_q(\lambda) + W_\varepsilon(\lambda)]^{-1} —$$

диагональная матрица дробно-рациональных функций, то полином $\hat{G}(\lambda)$, определяемый в соответствии с (7.38), также является дробно-рациональной функцией. Это выражение всегда можно привести к виду

$$\hat{G}(\lambda) = \det(E + R(\lambda)) = 1 + K(\lambda), \quad (7.40)$$

где

$$K(\lambda) = P(\lambda)/Q(\lambda) —$$

дробно-рациональная функция от λ .

Полученное выражение позволяет применить для анализа устойчивости исполнительной системы критерий Найквиста. Действительно, согласно (7.37), получаем

$$\hat{G}(\lambda) = 1 + K(\lambda) = \frac{G(\lambda)}{G_0(\lambda)}. \quad (7.41)$$

Подобное выражение, являющееся отношением характеристических полиномов, используется при доказательстве критерия Найквиста (см., например, [54, с.141]). Однако следует отметить, что при использовании критерия Найквиста $G(\lambda)$ и $G_0(\lambda)$ являются характеристическими полиномами замкнутой и разомкнутой системы соответственно. В данном случае их смысл иной: если $G(\lambda)$ — это по-прежнему характеристический полином замкнутой исполнительной системы, то $G_0(\lambda)$ — характеристический полином комплекса отдельно взятых приводов. Тем не менее это не отражается на ходе доказательства условия Найквиста, которое приобретает следующий смысл: если система,

состоящая из комплекса отдельно взятых приводов, устойчива асимптотически (все корни $G_0(\lambda)$ лежат строго в левой полуплоскости), и годограф $K(j\omega)$ при изменении ω от 0 до ∞ не охватывает точку $(-1, j0)$ на комплексной плоскости, то замкнутая исполнительная система асимптотически устойчива.

Итак, если отдельно взятые приводы устойчивы (это условие выполняется при их регулировочном расчете), то для проверки устойчивости исполнительной системы следует построить годограф $K(j\omega)$ и воспользоваться критерием Найквиста. Поскольку для этого предварительно нужно вычислить $\hat{G}(j\omega)$, проще построить годограф $\hat{G}(j\omega)$, который в соответствии с критерием Найквиста не должен охватывать начало координат на комплексной плоскости.

При построении годографа $K(j\omega)$ или $\hat{G}(j\omega)$, следует иметь в виду, что при $\omega \rightarrow 0$, как мы уже видели выше,

$$\tilde{h}(j\omega) \rightarrow c^* - \text{diag } c^*; h_0^*(j\omega) \rightarrow \text{diag } c^*; |\Phi_{q,ii}(j\omega) \rightarrow E|; |W_{\varepsilon,ii}^{-1}(j\omega)| \rightarrow 0.$$

Таким образом, из выражения (7.39) следует, что при $\omega \rightarrow 0$ выполняется условие $R(j\omega) \rightarrow 0$, а следовательно, $K(j\omega) \rightarrow 0$ и $\hat{G}(j\omega) \rightarrow 1$.

При $\omega \rightarrow \infty$ можно положить

$$h_0^*(j\omega) \approx \text{diag } a^*(j\omega)^2, \quad \tilde{h}^*(j\omega) \approx (a^* - \text{diag } a^*)(j\omega)^2;$$

$$|W_{q,ii}(j\omega)| \approx 0; |W_{\varepsilon,ii}(j\omega)| \approx 0.$$

а значит,

$$R(j\omega) \approx [\text{diag } a^*(j\omega)^2]^{-1} (a^* - \text{diag } a^*)(j\omega)^2 = (\text{diag } a^*)^{-1} a^* - E,$$

т.е. $R(j\omega)$ при $\omega \rightarrow \infty$ стремится к постоянной матрице, составленной из постоянных коэффициентов.

Характеристический многочлен $\hat{G}(j\omega)$ при этом стремится к константе, которую нетрудно найти [33]:

$$\hat{G}(j\omega) = \det(E + R(j\omega)) \rightarrow \det[(\text{diag } a^*)^{-1} a^*] = \frac{\det a^*}{\prod_{i=1}^N a_{ii}} = G^*. \quad (7.42)$$

Заметим, что полученная величина по модулю не превышает единицы; таким образом, годограф $\hat{G}(j\omega)$ имеет вид, показанный на рис. 7.8. Годограф $K(j\omega)$ выходит из начала координат и заканчивается

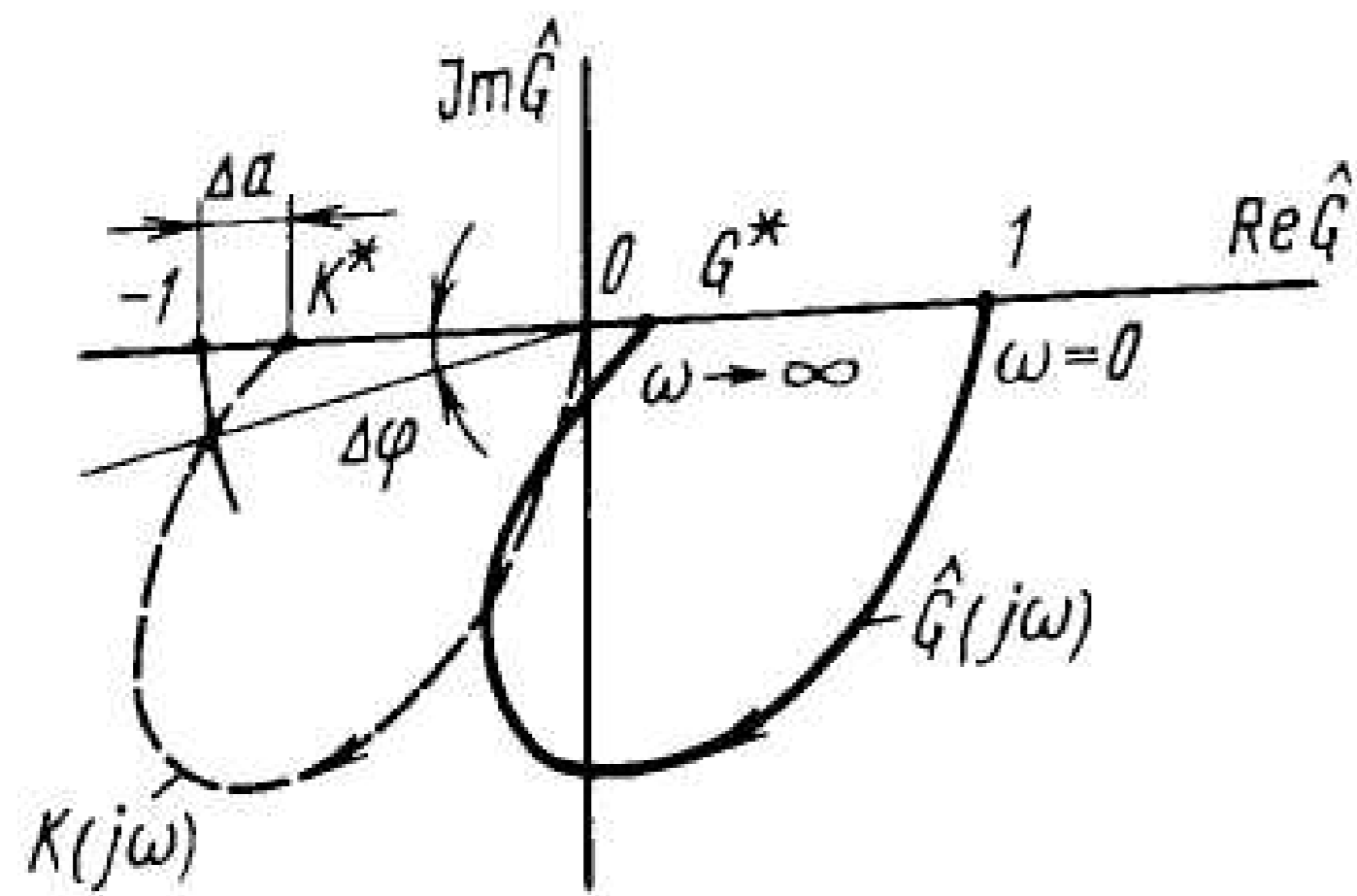


Рис. 7.8. Годографы характеристического многочлена исполнительной системы

на вещественной оси в точке, соответствующей $\omega \rightarrow \infty$: при этом $K(j\omega) \rightarrow K^* = G^* - 1 \leq 0$.

При исследовании $K(j\omega)$ можно вместо годографа строить ЛФЧХ и ФЧХ; при этом для устойчивости исполнительной системы должно выполняться по отношению к $Lm K(j\omega)$ и $arg K(j\omega)$ условие критерия Найквиста для системы, устойчивой в разомкнутом состоянии: ФЧХ не должна пересекать ось $arg K(j\omega) = -\pi$ (или пересекать ее четное число раз) в области, где $Lm K(j\omega) > 0$.

В качестве примера на рис. 7.9 показаны ЛАЧХ и ФЧХ, построенные для функции $K(j\omega)$, соответствующей исполнительной системе, рассмотренной выше в примере 7.1. Условие устойчивости выполняется. Подчеркнем, что речь идет о дополнительном условии устойчивости (условие б на стр. 275), характеризующем устойчивость вследствие взаимовлияния каналов управления. Взаимовлияние, определяемое функцией $K(j\omega)$, проявляется только в среднем диапазоне частот $10 \text{ с}^{-1} \leq \omega \leq 1000 \text{ с}^{-1}$, как и в рассмотренном выше примере.

Заметим, что годограф $K(j\omega)$ или соответствующие ему ЛАЧХ и ФЧХ позволяют не только проверить сам факт устойчивости или неустойчивости исполнительной системы, но и установить запасы устойчивости. Запасы устойчивости по амплитуде и фазе показаны на графике рис. 7.8 ($\Delta a = G^*$).

При синтезе системы можно задать требование, чтобы запасы устойчивости по амплитуде и фазе были не меньше заданных значе-

ний: $\Delta a \leq \Delta a^*$, $\Delta \varphi \leq \Delta \varphi^*$. Это требование является необходимым дополнением рассмотренных в п. 7.2.1 обобщенных показателей качества исполнительной системы.

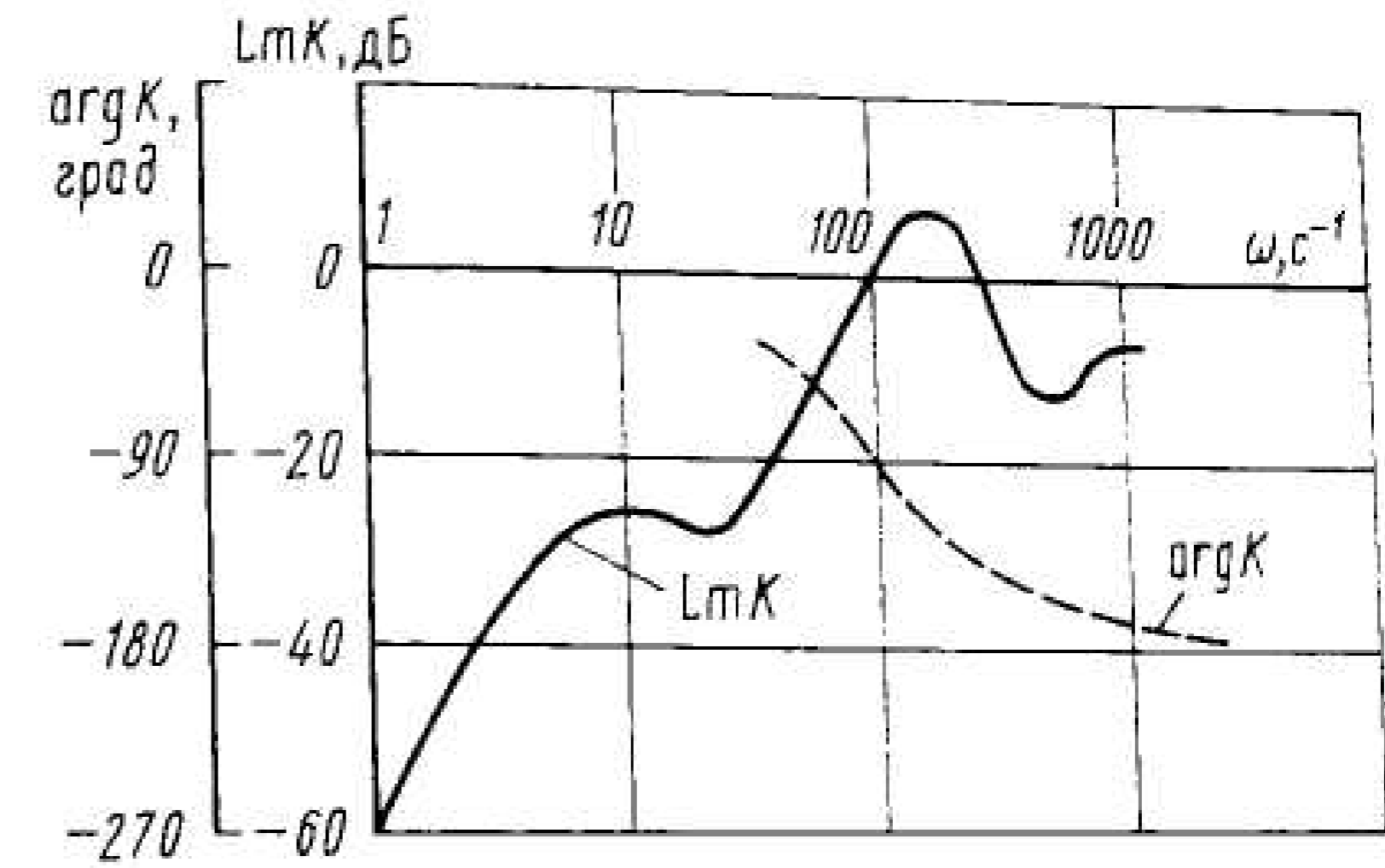


Рис. 7.9. ЛАЧХ и ФЧХ, соответствующие годографу $K(j\omega)$ устойчивой системы

Возвращаясь к началу п. 7.2.2, обратим внимание на то, что нами был использован метод замороженных параметров. Следовательно, в каждой точке опорной траектории, относительно которой линеаризована математическая модель динамики, параметры построенных частотных характеристик и характеристических уравнений будут различными. Поэтому анализ устойчивости, согласно рассмотренной методике, необходимо проводить в различных точках опорной траектории, проверяя требования по устойчивости в тех точках, где она оказывается наихудшей. Показатели Δa_{\min} , $\Delta \varphi_{\min}$ характеризуют устойчивость системы на выбранной траектории.

В частности, если исследуется устойчивость в стационарных точках рабочего пространства, каждая из этих точек будет обладать своей степенью устойчивости, которую будем оценивать показателями запасов устойчивости. В рабочем пространстве можно определить зоны Γ , в которых запасы устойчивости системы будут не меньше известных значений Δa^* , $\Delta \varphi^*$, что позволит правильно планировать выполнение рабочих операций.

В том случае, если исполнительная система функционирует в неопределенных заранее условиях и траекторию движения задает человек-оператор или верхний уровень управления в зависимости от теку-

щей ситуации, необходимо, чтобы исполнительная система была устойчивой для любых возможных движений. Анализируя это условие, следует проверить устойчивость рассматриваемой модели во всех точках ограниченного объема $3 \times N$ -мерного фазового пространства обобщенных координат q и их производных \dot{q} , \ddot{q} при $q \in Q$; $\dot{q} \in R$; $\ddot{q} \in L$.

7.3. Автоматизированный синтез исполнительной системы

7.3.1. Вычисление показателей качества исполнительной системы и отдельных приводов

Подведем итог рассмотренным в § 7.2 показателям качества и устойчивости исполнительной системы. Для выбранной траектории движения схвата или нагрузки манипулятора в каждой ее точке можно вычислить:

- а) матрицу взаимовлияния каналов управления $\mu = [\mu_{ik}]$, $i \neq k$;
- б) ошибку положения схвата, обусловленную взаимовлиянием δq , (см. с. 269);
- в) средний показатель колебательности переходных процессов \bar{M} (7.31);
- г) показатель времени переходных процессов t_n (7.32);
- д) динамическую ошибку положения схвата δr_N (7.33);
- е) запасы устойчивости Δa , $\Delta \phi$.

В процессе анализа мы показали, как эти показатели могут быть вычислены по соответствующим показателям отдельных каналов управления. При синтезе исполнительной системы в начале должны быть заданы обобщенные характеристики системы, позволяющие сформулировать требования к отдельным каналам управления и отдельным приводам степеней подвижности. Задание этих обобщенных характеристик зависит от конкретного назначения системы. Так, если манипулятор должен выполнять основную технологическую операцию, связанную с точным манипулированием в пространстве (при измерении, окраске поверхности, термообработке и т.д.), то основными требованиями будут точность положения и ориентации, плавность переходных процессов и устойчивость. Если скорости и ускорения существенны, то необходимо также учесть динамическую ошибку и взаимовлияние каналов. При полуавтоматическом управлении важную

роль играет вид матрицы взаимовлияния и ее отклонение от диагональной. Требования к соответствующим показателям в данном случае определяются не только условиями технологического процесса, но и эргономическими требованиями, обеспечивающими эффективное участие человека в управлении манипулятором.

Теперь, согласно приведенным выше формулам (см. п. 7.2.1), можно задать требования к отдельным приводам по каждому из перечисленных показателей, т.е. по уровню взаимовлияния в i -м канале, колебательности M_i , времени переходного процесса t_{ni} , динамической ошибке $\delta \varepsilon_{di}$ и устойчивости Δa_i , $\Delta \phi_i$. «Распределение» требований по приводам можно осуществить многими способами. Здесь проявится опыт проектировщика. Например, при задании допустимого времени переходного процесса t_{ni} , он должен представлять себе, как соотносятся времена переходного процесса, достижимые с помощью приводов «тяжелых» степеней подвижности и более «легких», например приводов «кисти» манипулятора.

7.3.2. Расчет приводов исполнительной системы. Синтез корректирующих устройств и регуляторов

После того, как определены требования к исполнительной системе в целом и к каждому из ее приводов, происходит процесс расчета приводов системы. Если он оказывается неудачным при имеющейся неизменяемой части системы и выбранных показателях, их можно перераспределить еще раз по приводам манипулятора, сохраняя значения обобщенных показателей качества.

Ранее в п. 7.2.1 было установлено, что во многих случаях взаимовлияние каналов управления является дополнительным фактором, оказывающим решающее влияние на показатели качества исполнительной системы. Это дает основание разбить задачу синтеза на два отдельных этапа: а) синтез исполнительной системы, состоящей из отдельных приводов (в том смысле, как это было определено в п. 7.2.1), передаточная матрица которой описывается выражением (7.28); и б) исследование и коррекция взаимовлияния каналов управления, т.е. синтез исполнительной системы с учетом передаточной матрицы (7.21). Такой подход практически всегда позволяет получить хорошие результаты при синтезе манипуляционных систем, использующих вы-

сокооборотные двигатели постоянного тока. Большой коэффициент редукции передаточного механизма в этом случае «диагонализует» матрицу $h(p)$ динамики механизма, а следовательно, и матрицу $\Phi(p)$, т.е. приводит к эффекту «развязки» каналов управления. Однако такой подход не применим для высокомоментных (безредукторных) электродвигателей, а также манипуляционных систем с гидро- и электрогидроприводом. В этих случаях выделить подсистему без взаимовлияния отдельных приводов друг на друга невозможно. Для подобных систем более приемлемы методы динамического синтеза, которые будут рассмотрены в гл. 8.

В настоящее время применяют различные методы расчета отдельных приводов. Выбор того или иного метода зависит от опыта пользователя, имеющихся в его распоряжении пакетов программ автоматизированного синтеза. Одним из наиболее широко распространенных является метод синтеза последовательных и параллельных корректирующих устройств с использованием логарифмических частных характеристик.

Здесь надо упомянуть о том, что исполнительный двигатель и механизм передачи движений (силовой модуль) выбираются заранее по результатам энергетического расчета. При этом принимают во внимание максимальные скорости и ускорения, а также силы и моменты, которые должны быть развиты в данной степени подвижности. Скорости и ускорения \dot{q}_i , \ddot{q}_i определяют исходя из заданных скоростей и ускорений схвата манипулятора, что и представляет собой решение обратной кинематической задачи (см. гл. 3). Развиваемые двигателем моменты (силы) определяют путем решения обратной задачи динамики (см. гл. 5). Собственно энергетический расчет, предназначенный для выбора мощности двигателя его типа, а также коэффициента передачи и типа редуктора, достаточно полно описан в специальной литературе [2; 24; 29; 38].

Каждый канал управления описывается схемой (см. рис. 7.2), в которой уже выбрана неизменяемая часть силового модуля. Задача проектировщика — выбрать последовательное $P(s)$ и параллельное $Z(s)$ корректирующие устройства так, чтобы ЛЧХ синтезированной системы удовлетворяли заданным требованиям.

Особенность синтеза приводов исполнительной системы заключается в том, что параметры передаточной матрицы $\Phi_o(p)$ зависят от

параметров опорной траектории q^* , \dot{q}^* , \ddot{q}^* . Таким образом, неизменяемая часть системы, включающая манипуляционный механизм, зависит от его положения и движения в пространстве. В случае высокооборотных двигателей влияние динамики механизма на характеристики привода может быть несущественным за счет приведения моментов инерции к валу двигателей с помощью коэффициента передачи редуктора. Поэтому вполне можно выбрать одну или несколько характерных точек на траектории, для которых следует определить неизменяемую часть и провести регулировочный расчет. Далее необходимо проверить, чтобы синтезированный регулятор обеспечивал удовлетворительные результаты на всей траектории.

В большинстве случаев, задавая предельные скорости, ускорения и нагрузки для данного манипулятора, удается синтезировать стационарные (с постоянными коэффициентами) регуляторы, которые дают хороший результат практически для любых программных движений. Однако, учитывая, что процедура синтеза регуляторов в настоящее время в высокой степени автоматизирована, можно сформулировать и задачу создания «сопровождающего» математического обеспечения, которое одновременно с процедурой программирования off-line позволит пользователю подстраивать параметры регуляторов с целью повышения качественных показателей системы и лучшего использования ее динамических возможностей.

Отметим, что такой подход является достаточно общим, так как выбирая различные типы корректирующих устройств $P(s)$ и $Z(s)$, можно реализовать различные способы управления [54]. В частности, полагая $P(s) = k_n$, $Z(s) = k_z s$, получаем сигнал управления двигателем в виде

$$u = k_1(k_n(q^* - q) - k_z \dot{q}),$$

что соответствует пропорционально-дифференцирующему (ПД) линейному регулятору, параметры которого можно найти различными способами, в том числе и путем непосредственного расчета зависимости показателей качества от параметров регулятора k_n , k_z . Нередко используют методы распределения нулей и полюсов передаточной функции синтезируемой системы в зависимости от заданных показателей качества. Задавая k_n , k_z , можно добиться необходимого расположения полюсов на комплексной плоскости.

Выбирая $P(s) = k_n(1 + \tau s)/s$, $Z(s) = k_z s$, получаем формулу, определяющую ПИД-регулятор

$$u = k_1 \left(k_n \int_0^t \varepsilon(t) dt + k_n \tau_n \varepsilon(t) - k_z \dot{q}(t) \right),$$

где $\varepsilon(t) = q^*(t) - q(t)$.

Введение последовательной коррекции $P(s)$ рассматриваемого вида позволяет повысить точность системы (ее порядок астатизма) без снижения степени устойчивости, т.е. преодолеть обычное при синтезе подобных систем противоречие между точностью и устойчивостью.

Отметим еще одно важное достоинство ПИД-регулятора, обусловленное введением интеграла от сигнала ошибки: Передаточная функция отдельно взятого привода по возмущению $\Phi_f(s)$ в этом случае имеет множитель s в числителе. Действительно, если в системе, схема которой приведена на рис. 7.2 (при $q = x/i$), выбрать

$$P(s) = k_n \frac{1 + \tau s}{\tau s}, \quad Z(s) = k_z,$$

то для передаточной функции неизменяемой части $W(s) = \frac{k}{s(1 + Ts)}$

будем иметь

$$\Phi_f(s) = \frac{k \tau s}{s^3 \tau^2 + s^2 \tau + s(k_z k \tau + k_n k \tau) + k_n k}.$$

Следовательно, при постоянном возмущающем воздействии $f(t) = k_f l(t)$ статическая ошибка привода, обусловленная возмущением, стремится к нулю:

$$\varepsilon_f = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{k_f}{s} \Phi_f(s) = 0.$$

Таким свойством не обладает привод с пропорционально-дифференцирующим (ПД)-регулятором. Если, в частности, $Z(s) = k_z$, а $P(s) = k_n$, то

$$\Phi_f(s) = \frac{k}{Ts^2 + s + k_n k_z k},$$

и установившаяся статическая ошибка привода равна

$$\varepsilon_f = \lim_{s \rightarrow 0} k_f \Phi_f(s) = \frac{k_f}{k_n k_z}.$$

что приводит и к статической ошибке положения схвата манипулятора. Практика показывает, что во многих случаях целесообразно выбирать более сложные корректирующие устройства для обеспечения заданных свойств системы. Например, можно использовать обратную связь по ускорению (или по моменту) вида

$$Z(s) = k_{z1}s + k_{z2}s^2.$$

а также ввести дробно-рациональные сомножители в выражения $P(s)$, $Z(s)$, обеспечивающие необходимый корректирующий эффект в определенной частотной области в зависимости от характеристик неизменяемой части системы.

Заметим, что по схеме, представленной на рис. 7.2, нельзя судить о способе реализации коррекции, которую можно осуществить с помощью аналоговых или цифровых корректирующих устройств. В последнем случае в схему вводят аналого-цифровые и цифроаналоговые преобразователи, а необходимые вычисления выполняются с помощью микропроцессора. Будем считать в этом случае, что частота квантования дискретного сигнала достаточно высока по сравнению с рабочими частотами привода. Это условие, обеспечиваемое современной микропроцессорной техникой, позволяет ограничиться методикой синтеза исполнительной системы как непрерывной. В противном случае можно воспользоваться методикой синтеза дискретных систем, рассматриваемой в [22].

Наиболее удобным методом расчета сложных корректирующих связей является метод логарифмических частотных характеристик (ЛЧХ); сложность процедуры синтеза при этом не зависит от вида регулятора как элемента системы управления. Геометрическая интерпретация метода позволяет разработчику непосредственно по виду ЛЧХ предвидеть результаты коррекции по отношению к тем или иным показателям качества системы. Метод синтеза приводных систем с помощью ЛЧХ подробно изложен в литературе [30], [38].

Имеются пакеты программ, максимально облегчающие пользователю применение метода ЛЧХ [43; 44]. Они обеспечивают возможность автоматизации процедуры построения модели исполнительной системы, выбора ее параметров и структуры.

Примером пакета автоматизированного синтеза исполнительных систем, разработанного за рубежом, служит пакет MANSIM, разработанный под руководством М. Вукобратовича в Институте автоматизации им. М. Пулина в Белграде (Югославия) [77; 78]. Достоинство этого пакета заключается в том, что в нем автоматизированное построение модели динамики механизма совмещено с расчетом исполнительных систем. Пакет позволяет выбирать структуру обратных связей исполнительных систем, проводить синтез как непрерывных, так и дискретных (цифровых) систем. В отличие от упомянутых выше пакетов, основным методом синтеза параметров регуляторов в данном пакете является метод, основанный на выборе расположения нулей и полюсов синтезированной системы, обеспечивающий заданные показатели качества. Наряду с этим пользователь может воспользоваться методом синтеза оптимальных по критерию среднеквадратической ошибки регуляторов для отдельных каналов управления.

Развитием рассмотренного выше подхода, основанного на использовании частотных характеристик, является метод подчиненного регулирования [43; 44]. В приводе манипулятора организуются в общем случае контуры управления по положению, скорости и моменту (рис. 7.10).

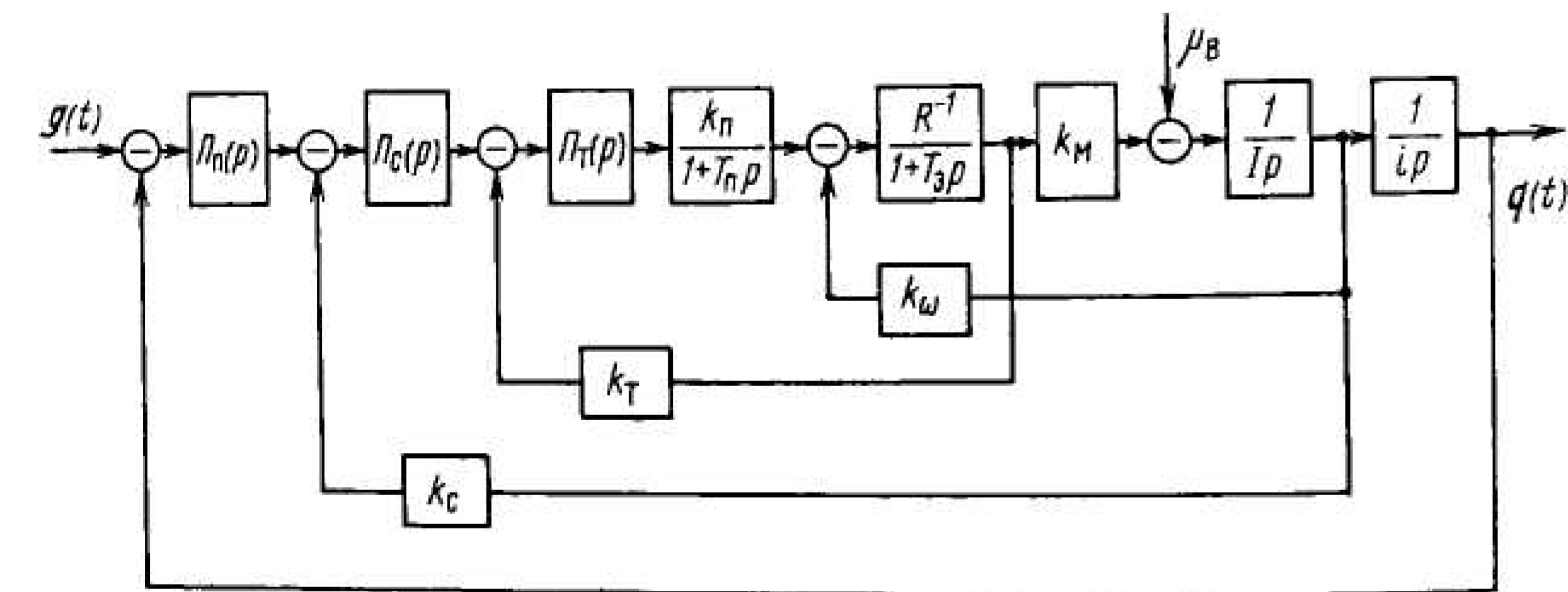


Рис. 7.10. Схема подчиненного регулирования: P_n , P_c и P_t — передаточные функции регуляторов контуров положения, скорости и тока; T_n и T_3 — постоянные времени электронного преобразователя и электромагнитная постоянная якорной цепи; I — суммарный момент инерции всех движущихся частей; остальные обозначения аналогичны введенным в § 7.1

Обратная связь по моменту в электроприводе на двигателях постоянного тока обычно реализуется путем измерения тока якоря двигателя, который приближенно пропорционален развиваемому моменту.

В свободном движении эта связь характеризует развиваемое в данной степени подвижности ускорение.

Наличие в общем случае трех контуров регулирования расширяет возможности использования привода. Методика расчета при этом усложняется, хотя она по-прежнему основана на тех же принципах, которые были описаны выше.

Для расчета системы управления методом подчиненного регулирования в МГТУ им. Н. Э. Баумана разработан специальный пакет программ пользователя-проектировщика [44]. Пользователь может с его помощью выбрать структуру обратных связей, коэффициенты усиления в соответствующих обратных связях и регуляторы пропорционального (П-регуляторы) или пропорционально-интегрирующего (изодромного) типа (ПИ-регуляторы) в каждом из этих контуров таким образом, чтобы обеспечить нужные показатели качества работы каналов управления исполнительных систем.

В процессе работы пользователю предоставляются данные о получаемых в системе процессах, формируются запросы о требованиях и даются необходимые советы, т.е. пользователь не использует собственно процедуру синтеза. Однако в случаях, когда диалог не удовлетворяет пользователя, возможен переход на уровень прямого синтеза частотных характеристик (формируемых с помощью того же пакета). В отличие от рассмотренного выше метода синтез корректирующих устройств методом подчиненного регулирования проводится отдельно по каналам управления моментом, скоростью и положением. Такой подход оказался особенно удобен для современных микропроцессорных систем управления приводами манипуляторов, позволяющих реализовать и настроить каждый из упомянутых каналов управления по отдельности.

7.3.3. Анализ синтезированной системы. Введение корректирующих связей

После того, как синтез отдельных приводов исполнительных систем выполнен, необходимо убедиться в том, что перекрестные связи в каналах управления не приведут к существенному ухудшению работы системы. Это можно выполнить путем анализа недиагональных членов матрицы частотных характеристик $\Phi(j\omega)$ (7.26). Если это

влияние в области рабочих частот существенно, то необходимо использовать способы коррекции перекрестных связей.

Из формул, приведенных в § 7.1, 7.2, следует, что наиболее радикальным способом борьбы с взаимовлиянием каналов является формирование управляющих моментов как суммы собственно управляющих μ_y и корректирующих μ_k моментных воздействий:

$$\mu = \mu_y + \mu_k,$$

причем

$$\mu_k = \tilde{h}(p)q, \quad (7.43)$$

где

$$\tilde{h}(p) = h^*(p) - h_0^*(p) \quad —$$

недиагональная матрица, характеризующая динамику манипулятора.

К сожалению, такой способ можно реализовать только в приводах, допускающих прямое управление моментом, но и в этом случае он очень сложен в силу того, что элементы матрицы $\tilde{h}(p)$ необходимо рассчитывать в реальном масштабе времени. Для электропривода определенное снижение взаимовлияния достигается за счет применения ПИД-регулятора, который снижает ошибку при статическом воздействии. Однако это не снимает проблему динамического взаимовлияния.

В значительной мере она может быть решена путем введения специальных корректирующих связей, вид которых может быть установлен из уравнений системы (7.20), (7.21). Из них, в частности, следует, что если выбрать управляющее воздействие $g(t)$ как сумму собственно управляющего $g_y(t)$ и корректирующего $g_k(t)$ воздействий:

$$g(t) = g_y(t) + g_k(t),$$

причем

$$g_k(t) = W_\epsilon^{-1}(p)\tilde{h}(p)q, \quad (7.44)$$

то задача коррекции будет решена. Учитывая, что $\tilde{h}(p)$ — матрица, составленная из полиномов второго порядка относительно p (см. (7.15)), эту коррекцию приближенно можно реализовать, измеряя ускорения (моменты), скорости и координаты степеней подвижности. Однако, принимая во внимание, что порядок числителя элементов диагональной матрицы $W_\epsilon^{-1}(p)$, как правило, выше порядка знаменателя,

7.4. Анализ исполнительных систем при кинематическом управлении

необходимо либо определять производные более высокого порядка от этих переменных (что приведет к быстрому накоплению ошибок), либо получить приближенные выражения, аппроксимирующие матрицу $W_\epsilon^{-1}(j\omega)\tilde{h}(j\omega)$ в той полосе частот, в которой взаимовлияние существенно. Именно последний способ обычно и используют на практике, хотя он требует определенного мастерства от разработчика системы.

После расчета приводов манипулятора необходимо смоделировать исполнительную систему с учетом полных уравнений динамики (см. § 7.1), чтобы убедиться в выполнении заложенных требований. Для этой цели также разработаны специальные пакеты программ, облегчающие труд проектировщика. Пакет РОБОТ, созданный в МГТУ им. Н. Э. Баумана [29], обеспечивает автоматизацию составления математической модели манипулятора для произвольных кинематических схем разомкнутого типа. Он позволяет использовать модель привода с любой структурной схемой и провести моделирование полной модели исполнительной системы вида (7.8).

Отметим, что пакеты автоматизированного моделирования динамики обычно не включают процедуру синтеза исполнительной системы. Единственным известным авторам исключением является упомянутый пакет MANSIM, позволяющий решать задачи анализа и синтеза в рамках единого программного обеспечения при определенных ограничениях на сложность описания исполнительных приводов и типа регуляторов.

В результате моделирования пользователь либо убеждается в том, что проведенный синтез оказался успешным, либо выявляет оставшиеся дефекты системы и возвращается к процедуре синтеза.

7.4. Анализ исполнительной системы при кинематическом управлении

Система управления манипулятором включает в себя исполнительную систему, а также устройство управления, вырабатывающее сигналы управления $g(t)$ и необходимые обратные связи (рис. 7.11). Здесь предполагается, что на верхнем (планирующем) уровне управления формируется траектория движения схвата манипулятора или полезной нагрузки в пространстве рабочей сцены. Эта информация является входной для устройства управления, которое с использованием

информации о текущих значениях обобщенных координат механизма $q(t)$ и их производных вычисляет в реальном времени требуемые значения $\dot{q}^*(t)$, которые и являются управляющими сигналами для приводов исполнительной системы. При этом используются кинематические алгоритмы управления, рассмотренные выше в гл. 3.

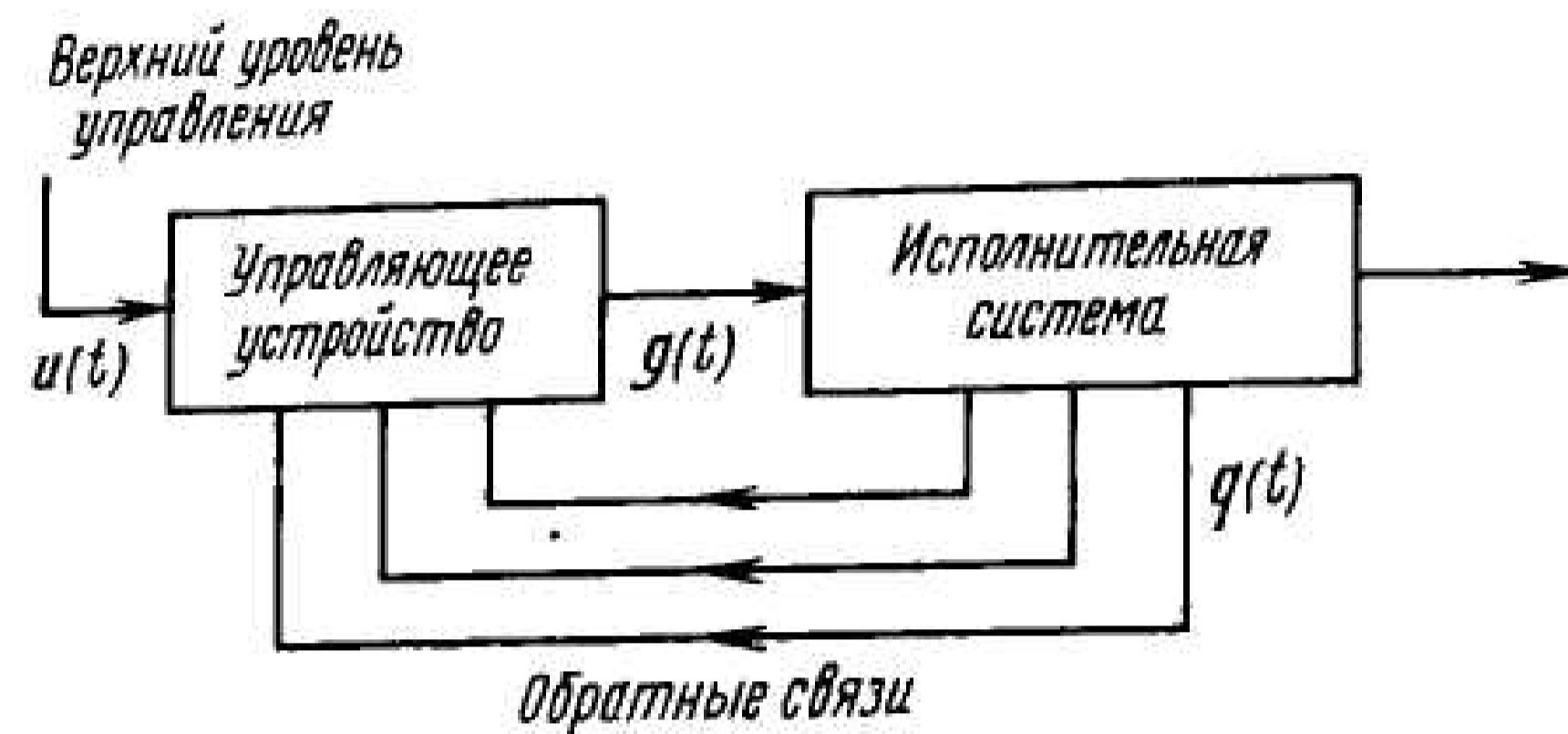


Рис. 7.11. Схема системы управления манипулятором

Для того чтобы построить математическую модель системы управления, необходимо дополнить уравнения исполнительной системы (см. § 7.2 и 7.3) соотношениями, связывающими сигналы управления исполнительной системой $g(t)$, сигналы управления, поступающие с верхнего уровня $u(t)$, и сигналы обратных связей. Эти соотношения зависят от выбранного способа кинематического управления.

7.4.1. Управление по вектору скорости

При управлении по вектору скорости с верхнего уровня управления задаются линейная и угловая скорости схвата манипулятора в абсолютной системе координат:

$$\dot{r}_N^* = [v_N \omega_N]^T = J(q)\dot{q}, \quad (7.45)$$

где

$$J(q) = [J_v(q) \quad J_\omega(q)] \quad \text{—}$$

якобиева матрица $6 \times N$, определяемая по формулам, полученным в п. 3.3.1. Если $J(q)$ — матрица квадратная и при данном значении q невырожденная, то из выражения (7.45) следует, что сигналы управления по скорости исполнительной системой могут быть записаны в виде

$$g(t) = \dot{q}^*(t) = J^{-1}(q(t))\dot{r}_N^*(t), \quad (7.46)$$

где $\dot{r}_N^*(t)$ — заданный в функции времени вектор скорости схвата.

Если этот вектор формируется верхним уровнем управления, то его можно считать вектором управления в системе: $u(t) = \dot{r}_N^*(t)$. Однако управление по вектору скорости часто используется в системах полуавтоматического управления (см. [18]), когда вектор скорости движения схвата формирует человек. При этом используются многостепенные рукоятки управления, перемещая которые оператор формирует компоненты вектора \dot{r}_N^* . В этом случае удобнее в качестве вектора управления $u(t)$ рассматривать именно тот вектор отклонений по угловым или линейным координатам многостепенной рукоятки, который формируется оператором. Поскольку коэффициенты, связывающие компоненты вектора $u(t)$ с требуемыми линейными $v_N(t)$ и угловыми $\omega_N(t)$ скоростями (коэффициенты масштаба), обычно различны, то имеем

$$u = [u_1 \quad u_2]^T = \text{diag}[k_1^{-1} E_3 \quad k_2^{-1} E_3] \dot{r}_N^* = K^{-1} \dot{r}_N^*,$$

где k_1 и k_2 — коэффициенты масштаба по линейной и угловой скорости.

Таким образом, требуемые значения скоростей равны

$$v_N = k_1 u_1, \quad \omega_N = k_2 u_2.$$

В частности, при $K = E$ получаем $\dot{r}_N^* = u$.

Как было показано в гл. 3, матрица $J(q)$ может вырождаться при определенных значениях q за счет особенностей кинематической схемы и вследствие ограничений, наложенных на изменение самих обобщенных координат. Кроме того, она может быть прямоугольной. В этих случаях применяют методы приближенного решения кинематического уравнения манипулятора и методы квазиобращения матрицы Якоби (см. п. 3.3.4). При этом все последующие рассуждения справедливы при условии, что вместо матрицы $J^{-1}(q)$ в (7.46) используется ее аппроксимация.

Перейдем к рассмотрению математической модели исполнительной системы. Исполнительная система может быть описана уравнением, линеаризованным в окрестности опорной траектории (см. (7.17)). Это уравнение системы, замкнутой по положению, что характерно для большинства манипуляторов, допускающих контурное

управление. В то же время, приводы манипуляторов должны обрабатывать заданный в соответствии с (7.46) закон изменения скорости соответствующей обобщенной координаты. Для сохранения без изменений системы управления манипулятора следует ввести интегратор в цепь формирования управляющего сигнала, т.е. выбрать $g(t)$ согласно формуле (см. гл. 4)

$$g(t) = \frac{1}{p} J^{-1}(q^*(t)) K u(t). \quad (7.47)$$

Если исполнительная система способна отслеживать как управляющий сигнал, так и его скорость $\dot{g}(t)$ (т.е. она является астатической), то, естественно, будет отслеживаться и заданная скорость изменения обобщенных координат.

Заметим, что если речь идет об исполнительной системе, которая специально предназначена для управления по скорости, то возможна ее реализация с приводами, замкнутыми по скорости. Тогда интегрирование в правой части равенства (7.47) не потребуется.

Записывая дифференциальные уравнения исполнительной системы с использованием формул (7.20), (7.21) в виде

$$(h^*(p) + W_q(p) + W_\varepsilon(p))q(t) = W_\varepsilon(p)g(t), \quad (7.48)$$

получаем линеаризованную математическую модель системы управления по вектору скорости в виде системы матричных уравнений (7.47) и (7.48).

Схема системы управления по вектору скорости с учетом этих соотношений представлена на рис. 7.12.

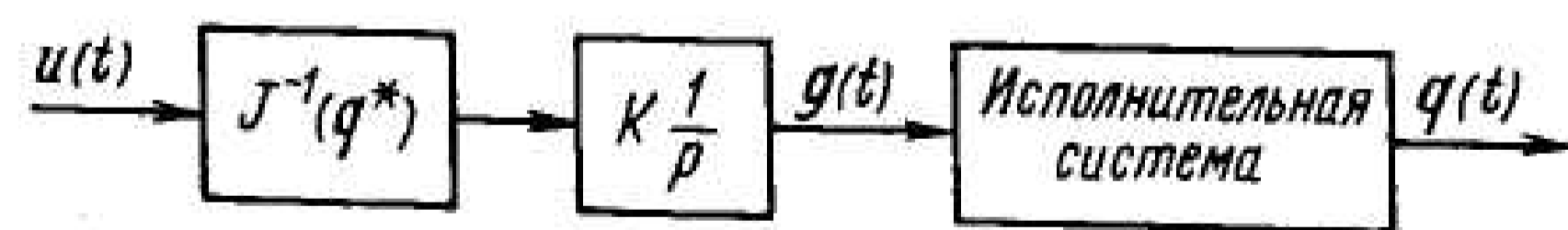


Рис. 7.12. Схема системы управления по вектору скорости

Связь между управляющим сигналом и вектором обобщенных координат можно записать с помощью передаточной матрицы исполнительной системы $\Phi(p)$, определяемой по формуле (7.21)

$$q(t) = \frac{\Phi(p)}{p} J^{-1}(q^*(t)) K u(t), \quad (7.49)$$

где

$$\Phi(p) = (h^*(p) + W_q(p) + W_\varepsilon(p))^{-1} W_\varepsilon(p).$$

Приращению δq вектора q в окрестности опорной точки q^* соответствует приращение вектора положения схвата r_N :

$$\delta r_N = J(q^*) \delta q.$$

Поскольку δq определяется формулой (7.49), которая справедлива только в малой окрестности опорной траектории, то с ее учетом получаем

$$\delta r_N = J(q^*) \frac{\Phi(p)}{p} J^{-1}(q^*) K \delta u = \hat{W}(p) \delta u, \quad (7.50)$$

где симметрическая операторная матрица

$$\hat{W}(p) = J(q^*) \frac{\Phi(p)}{p} J^{-1}(q^*) K \quad (7.51)$$

определяет преобразование управляющих сигналов $\delta u(t)$ в фактическое перемещение схвата в окрестности данной точки.

Наличие интегратора в выражении (7.50) означает, что управление манипулятором происходит именно по скорости. Например, задавая постоянное значение вектора управления u (требуемую скорость), получаем движение с постоянной скоростью $\delta \dot{r}_N$ после завершения переходных процессов. При этом остаются открытыми вопросы о длительности этих процессов, их качественных характеристиках, а также о точности отработки скорости исполнительной системой.

Необходимый анализ исполнительной системы при управлении по скорости можно провести, как и в § 7.2, методом частотных характеристик. Введем матрицу частотных характеристик

$$\hat{W}(j\omega) = J(q^*) \frac{\Phi(j\omega)}{j\omega} J^{-1}(q^*) K. \quad (7.52)$$

Ее диагональные элементы $\hat{W}_{ii}(j\omega)$ характеризуют преобразование управляющих сигналов $u_i(t)$ в перемещения схвата со скоростью, имеющей соответствующее $u_i(t)$ направление в рабочем пространстве, например направление одной из координатных осей, связанных с рабочей сценой.

В диапазоне рабочих частот $\Phi(j\omega) \approx 1$, поскольку исполнительная система рассчитана так, что в этом диапазоне управляющий сигнал

отслеживается с необходимой точностью. Из выражения (7.52) следует, что в этом же диапазоне частот

$$\hat{W}(j\omega) \approx \frac{1}{j\omega} K$$

и, следовательно,

$$\delta r_N \approx \frac{1}{j\omega} K \delta u,$$

т.е. система описывается интегратором с коэффициентом усиления k . Отклонению управляющего сигнала δu соответствует движение схвата с постоянной скоростью δr_N , имеющей заданное направление и пропорциональной по величине управляющему сигналу. Отметим, что характеристики системы практически не зависят в диапазоне низких частот от параметров привода и кинематической схемы.

В среднечастотном диапазоне для каждого из компонент δr_i вектора δr_N можно записать

$$\delta r_i = \hat{W}_{ii}(j\omega) \delta u_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \hat{W}_{ij}(j\omega) \delta u_j.$$

Диагональные элементы $\hat{W}_{ii}(j\omega)$, определяющие динамику управления по i -му каналу, зависят от положения манипулятора (вектора q^*). Недиагональные элементы $\hat{W}_{ij}(j\omega)$ определяют перекрестные связи, т.е. дополнительные отклонения, обусловленные в i -м канале за счет управления по остальным каналам. Анализ частотных характеристик $\hat{W}_{ij}(j\omega)$ позволяет выявить диапазон частот, в котором это взаимовлияние существенно.

Пример 7.2. Рассмотрим схему управления по вектору скорости электрогидравлическим манипулятором РБ-211 (см. рис. 2.11).

В данном случае управление по скорости осуществляется по трем обобщенным координатам, обеспечивающим поступательное движение схвата: q_1 — углу поворота манипулятора относительно вертикальной оси; q_2 и q_3 — углам поворота в суставах базового двухзвенника. Длины звеньев двухзвенника составляют 0,94 и 1,63 м, а их массы — 27 и 44 кг; моменты инерции относительно центра масс — 4,8 и 10,3 кг·м².

Передаточная матрица $\Phi(p)$ исполнительной системы имеет размер 3×3 , причем с достаточной точностью можно считать, что $\Phi_{12} = \Phi_{13} = \Phi_{21} = \Phi_{31} = 0$, а ее остальные компоненты имеют следующий вид:

$$\Phi_{11}(p) = \frac{k_1}{a_{11}p^2 + k_{11}p + k_1},$$

$$\Phi_{ii}(p) = \frac{k_i(a_{ii}p^2 + k_{ii}p + k_{2i})}{G(p)}, \quad i = 2, 3,$$

$$G(p) = b_0p^4 + b_1p^3 + b_2p^2 + b_3p + b_4,$$

$$\Phi_{ij}(p) = -\frac{a_{ij}k_{ii}p^2}{G(p)} \quad \text{при } i=2, j=3 \text{ и при } j=2, i=3.$$

Для конфигурации манипулятора, соответствующей $q = [0,1 \ 0,5 \ 2,5]$ рад на графиках рис. 7.13 приведены компоненты матрицы ЛАЧХ $Lm \hat{W}_{ij}(j\omega)$, соответствующих матрице $\hat{W}(j\omega)$, определяемой по формуле (7.51) (при $K = E$).

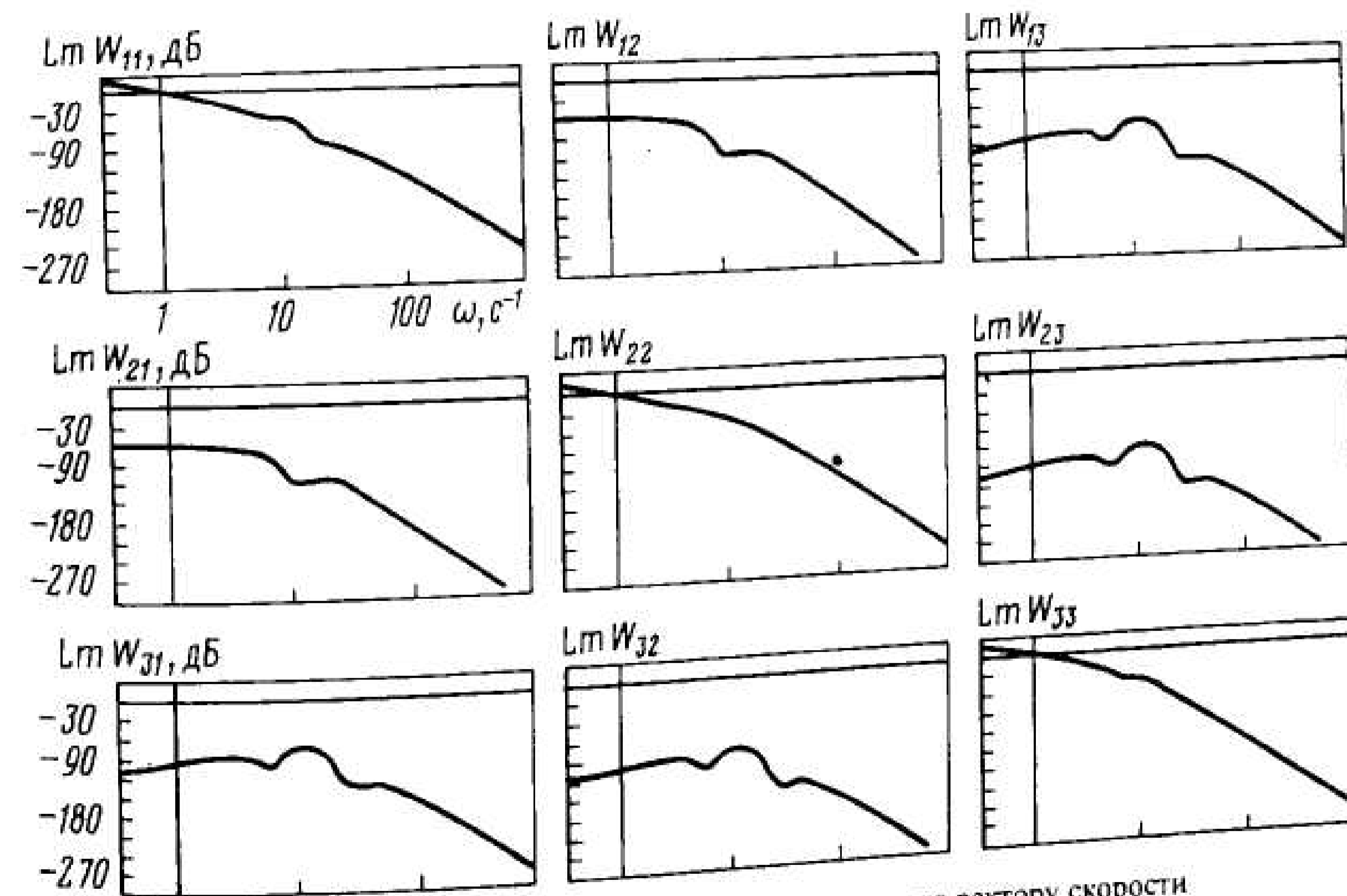


Рис. 7.13. Матрица ЛАЧХ системы управления по вектору скорости

Анализ этих графиков показывает, что взаимовлияние, в отличие от случая, рассмотренного в § 7.3, обусловлено здесь не только дина-

микой исполнительной системы, но и кинематическим алгоритмом управления. Несмотря на то, что «динамическое» взаимовлияние по некоторым каналам отсутствует, «кинематическое» взаимовлияние имеет место по всем каналам управления, причем оно зависит от конфигурации манипулятора.

Диагональные элементы матрицы $\hat{W}(j\omega)$ определяют интегратор с единичным коэффициентом усиления в диапазоне $\omega \leq 6 \text{ с}^{-1}$. Взаимовлияние каналов управления в этом диапазоне частот несущественно. При этом характеристики $\text{Lm}W_{21}(j\omega)$ и $\text{Lm}W_{12}(j\omega)$ убывают монотонно, т.е. взаимовлиянием первого и второго каналов можно пренебречь во всем диапазоне частот. Перекрестные связи по остальным каналам характеризуются резонансом взаимовлияния на частотах, близких к $\omega = 10 \text{ с}^{-1}$, причем наибольшим оказывается взаимовлияние первого и третьего каналов.

7.4.2. Управление положением и устойчивость системы управления

С помощью рассмотренной схемы управления по вектору скорости можно осуществить управление положением, если ввести в систему главную обратную связь (рис. 7.14), положив

$$g(t) = \frac{1}{p} J^{-1}(q^*) K(u - r_N), \quad (7.53)$$

где r_N — вектор, определяющий фактическое положение и ориентацию схвата манипулятора в пространстве, а $u = r_N^*$ — вектор, определяющий его желаемое положение и ориентацию.

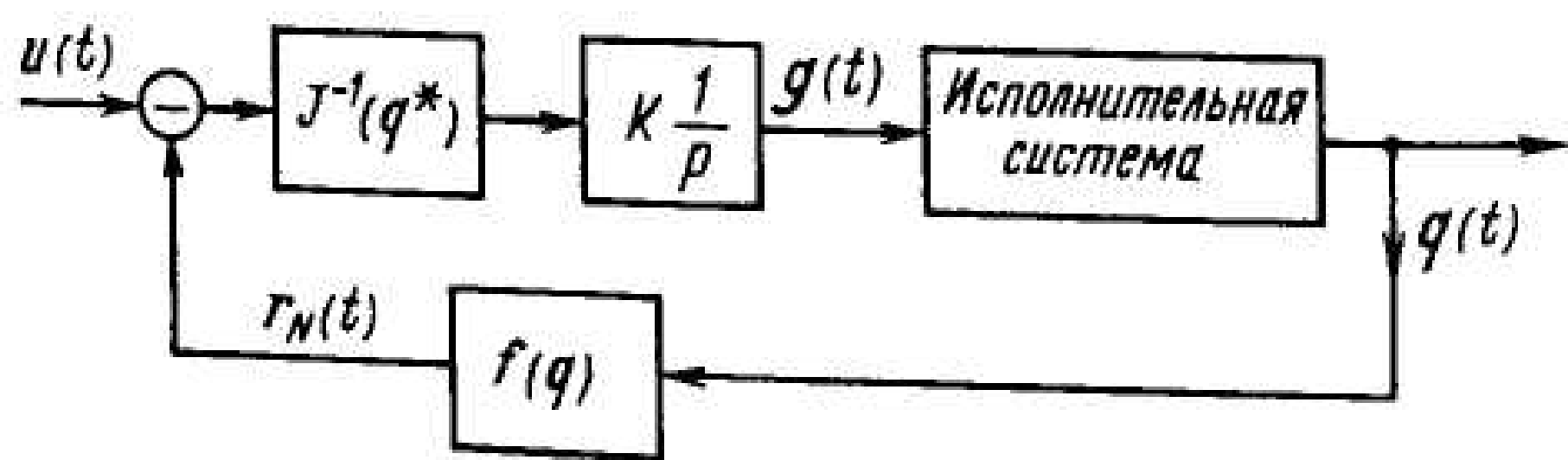


Рис. 7.14. Схема системы управления по положению

Такой способ позволяет приближенно реализовать контурное управление. В силу простоты реализации его широко используют в системах полуавтоматического управления, поскольку он позволяет легко переходить от режима управления по вектору скорости к режиму управления по положению.

Учитывая, что для малых отклонений

$$\delta q = J^{-1}(q^*) \delta r_N,$$

можно записать уравнение для системы управления, линеаризованной в окрестности точки q^* , следующим образом:

$$\delta r_N = \hat{W}(p)(\delta r_N^* - \delta r_N),$$

где $\hat{W}(p)$ — передаточная матрица разомкнутой системы управления по вектору скорости, определяемая формулой (7.51).

Из последнего соотношения следует, что

$$\delta r_N = \hat{\Phi}(p) \delta r_N^*, \quad (7.54)$$

где передаточная матрица

$$\hat{\Phi}(p) = (E + \hat{W}(p))^{-1} \hat{W}(p) \quad (7.55)$$

характеризует преобразование желаемого отклонения по положению схвата δr_N^* в фактическое δr_N , осуществляемое замкнутой системой управления.

Характер процесса управления, как и выше, можно проанализировать с помощью матрицы частотных характеристик $\hat{\Phi}(j\omega)$, соответствующей $\hat{\Phi}(p)$.

Как было показано в п. 7.4.1, в диапазоне низких частот матрица $\hat{W}(j\omega)$ становится близкой к диагональной:

$$\hat{W}(j\omega) \approx \frac{K}{j\omega}.$$

В этом случае

$$\hat{\Phi}(j\omega) = (K + j\omega)^{-1} K = \text{diag}(1 + Tj\omega)^{-1}, \quad (7.56)$$

где $T = K^{-1}$, т.е. система в замкнутом состоянии приближается к апериодическому звену с единичным коэффициентом усиления и с постоянной времени T , обратной коэффициенту масштаба.

Коэффициенты масштаба, а следовательно, и постоянные времени могут быть различны для каналов управления перемещением и ориентацией. Однако смысл коэффициентов масштаба теперь изменился по сравнению с коэффициентами системы, рассмотренной в п. 7.4.1. В данном случае это коэффициенты усиления разомкнутых систем (добротности), которые могут быть различны для каждого канала управления, и их выбирают из соображений точности, устойчивости и качества замкнутой системы управления по положению.

Из наших рассуждений следует, что влияние перекрестных связей на работу системы в низкочастотной области несущественно и ее динамика определяется, в основном, выбранными коэффициентами масштаба. В высокочастотной области это влияние также не имеет значения, поскольку $\hat{\Phi}(j\omega) = \hat{W}(j\omega)$.

Таким образом, представляет интерес построение матрицы частотных характеристик только в среднечастотной области. Ее диагональные элементы $\hat{\Phi}_{ii}(j\omega)$ являются частотными характеристиками замкнутых систем по i -му сигналу управления, а $\hat{\Phi}_{ik}(j\omega)$ при $i \neq k$ — частотными характеристиками, определяющими перекрестное влияние изменения k -й координаты на процесс управления в i -м канале. Отметим, что перекрестные связи, как и при управлении по скорости, характеризуются не только динамическим взаимодействием в исполнительной системе, но и взаимодействием, обусловленным кинематическим алгоритмом управления.

Пример 7.3. На рис. 7.15 показаны ЛАЧХ, построенные для двух каналов управления манипулятором УЭМ-1 (см. пример 7.1), которые являются элементами $\hat{\Phi}_{ij}(j\omega)$ матрицы (7.55) при $i, j = 1, 2$, и построены для положения манипулятора, соответствующего $q_i^* = 0,1$ рад $i = 1, 2$ и для $k_1 = k_2 = 0,75 \text{ с}^{-1}$.

В низкочастотном диапазоне $\omega = 0,2 \text{ с}^{-1}$ выполняется условие $|\hat{\Phi}_{ii}(j\omega)| \approx 1$. Однако при дальнейшем расширении диапазона частот $\hat{\Phi}_{ii}(j\omega)$ представляют собой характеристики апериодического звена с сопрягающей частотой, близкой к значению $0,75 \text{ с}^{-1}$. При частотах $\omega \geq 10 \text{ с}^{-1}$ они уже существенно отличаются от такой характеристики.

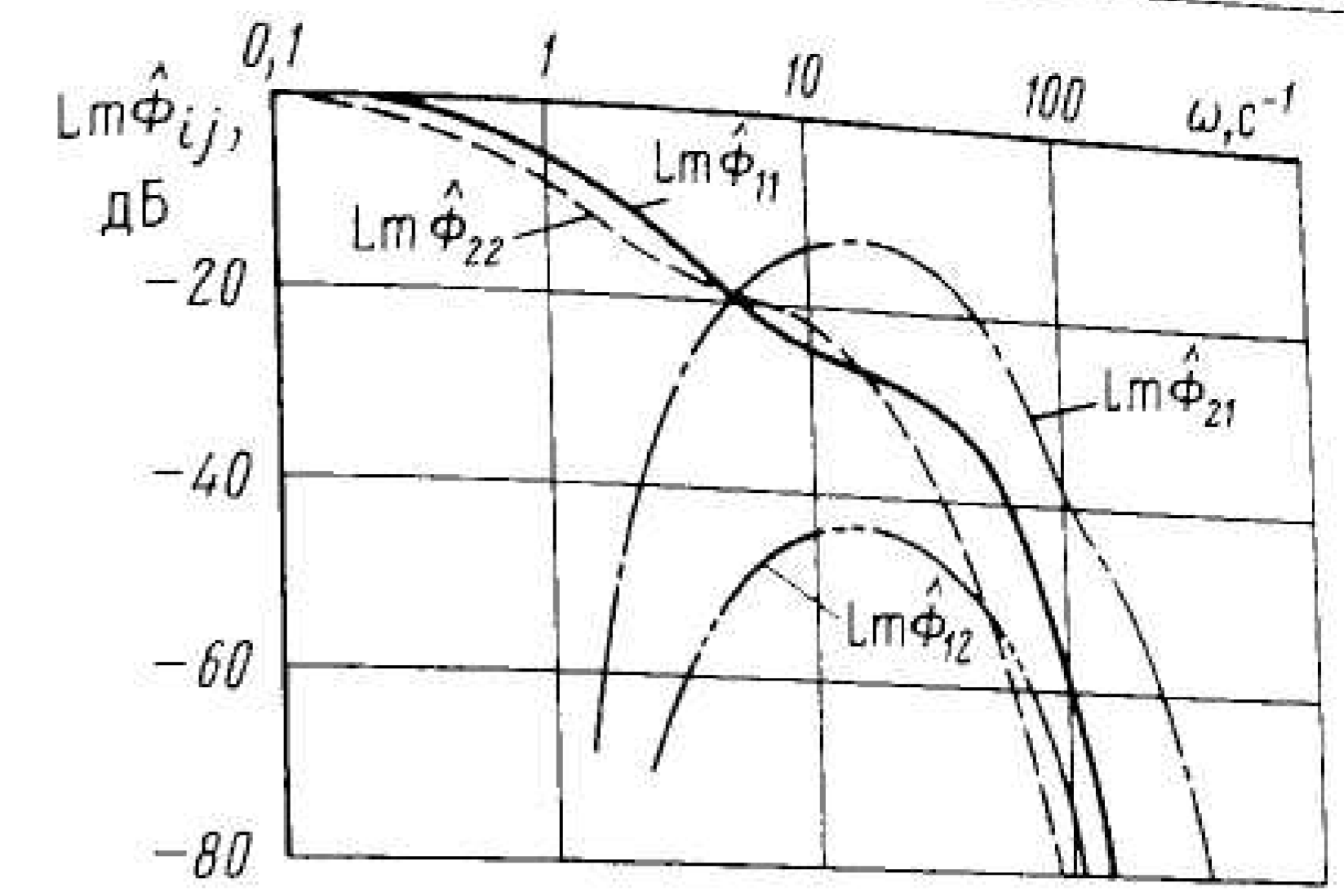


Рис. 7.15. ЛАЧХ системы управления по положению для двух каналов

Взаимовлияние проявляется только в среднечастотной области, достигая максимума при $\omega \approx 10 \text{ с}^{-1}$. При этом влияние первого канала управления на второй оказывается значительно больше, чем второго на первый.

Поскольку при организации управления по положению была введена отрицательная обратная связь, необходимо исследовать вопрос об устойчивости системы.

Запишем дифференциальное уравнение замкнутой системы управления по положению относительно обобщенных координат. В соответствии с соотношениями (7.54), (7.55)

$$(E + \hat{W}(p))J^*q = \hat{W}(p)u, \quad J^* = J(q^*)$$

Подставим сюда $\hat{W}(p)$ из (7.51):

$$(E + J^*\Phi(p)/pJ^{*-1}K)J^*q = J^*\Phi(p)/pJ^{*-1}Ku$$

Левая часть этого уравнения преобразуется к виду

$$J^*(E + \Phi(p)/pK)$$

и, следовательно, характеристическое уравнение замкнутой системы не включает якобиеву матрицу J^* ; оно имеет вид

$$\det(E + K\Phi(\lambda)/\lambda) = 0$$

С учетом (7.21) это уравнение можно записать в виде

$$\det(h^*(\lambda) + W_q(\lambda) + W_c(\lambda)(1 + K/\lambda)) = 0$$

Характеристический многочлен системы, таким образом, равен

$$\tilde{G}(\lambda) = \det[\lambda(N(\lambda)h^*(\lambda) + M_q(\lambda)) + M_c(\lambda)(\lambda + K)]. \quad (7.57)$$

Если все корни характеристического многочлена замкнутой системы (7.57) лежат в левой полуплоскости, то система асимптотически устойчива. Для того чтобы в этом убедиться, можно не вычислять эти корни, а воспользоваться алгебраическим критерием Гурвица.

Для анализа устойчивости замкнутой системы управления по положению может быть также применен частотный критерий Найквиста. Учитывая, что для исполнительной системы характеристический многочлен $G(\lambda)$ имеет вид (7.34), можно записать, что

$$\tilde{G}(\lambda) = G(\lambda) \det\left(E + K \frac{\Phi(\lambda)}{\lambda}\right), \quad (7.58)$$

где

$$\Phi(\lambda) = (h^*(\lambda) + W_q(\lambda) + W_c(\lambda))^{-1} W_c(\lambda) \quad \text{—}$$

передаточная матрица исполнительной системы (7.21) при $p = \lambda$.

Выражение, стоящее под знаком определителя, как и выше в п. 7.3.2, можно представить в виде

$$\det\left(E + K \frac{\Phi(\lambda)}{\lambda}\right) = 1 + \tilde{K}(\lambda), \quad (7.59)$$

где $\tilde{K}(\lambda)$ — дробно-рациональная функция. Поскольку члены матрицы $E + K \frac{\Phi(\lambda)}{\lambda}$ имеют вид $1 + k \Phi_{ij}(\lambda)/\lambda$, то функция $\tilde{K}(\lambda)$ имеет полюс порядка N в нуле, т.е.

$$\tilde{K}(\lambda) = \frac{P(\lambda)}{\lambda^N Q(\lambda)},$$

где $P(\lambda)$, $Q(\lambda)$ — полиномы от λ , такие, что $P(0)$, $Q(0) \neq 0$.

Из (7.58) видно, что

$$1 + \tilde{K}(\lambda) = \frac{\tilde{G}(\lambda)}{G(\lambda)}.$$

Поэтому, применяя принцип аргумента, можно заключить, что

$$\Delta \arg(1 + \tilde{K}(j\omega)) = \Delta \arg \tilde{G}(j\omega) - \Delta \arg G(j\omega) = 0, \quad (7.60)$$

если устойчива как исполнительная система, так и замкнутая система управления, поскольку в этом случае все корни как полинома $G(\lambda)$,

так и полинома $\tilde{G}(\lambda)$ лежат в левой полуплоскости. Годограф $\tilde{K}(j\omega)$ необходимо при $\omega \rightarrow 0$ дополнить окружностью бесконечно большого радиуса, с центром в начале координат, которая обходит в отрицательном (по часовой стрелке) направлении N квадрантов (т.е. обходит начало координат $N/4$ раза), причем именно полученный сложный годограф в соответствии с (7.60) не должен охватывать точку $(-1, j0)$ (или годограф $1 + \tilde{K}(j\omega)$, дополненный окружностью не должен охватывать начало координат) при изменении ω от 0 до ∞ (см. [54]).

Отсюда следует, что условие (7.60) выполняется лишь в том случае, когда собственно годограф $\tilde{K}(j\omega)$ обходит точку $(-1, j0)$ в положительном направлении (против часовой стрелки) таким образом, чтобы выполнялось условие

$$\Delta \arg(1 + \tilde{K}(j\omega)) = \frac{\pi}{2} N, \quad (7.61)$$

т.е. годограф $\tilde{K}(j\omega)$ обходит $N/4$ раза точку $(-1, j0)$.

Отсюда следует, что система управления по положению асимптотически устойчива, если выполняются следующие условия [33]:

а) асимптотически устойчива исполнительная система: корни характеристического многочлена $G(\lambda)$ лежат в левой полуплоскости;

б) годограф $\tilde{K}(j\omega)$ при изменении ω от 0 до ∞ последовательно и в положительном направлении обходит точку $(-1, j0)$ $N/4$ раз, т.е. выполняется условие (7.61).

Годограф $1 + \tilde{K}(j\omega)$ может быть легко построен по формуле (7.59):

$$1 + \tilde{K}(j\omega) = \det\left(E + K \frac{\Phi(j\omega)}{j\omega}\right),$$

содержащей матрицу частотных характеристик $\Phi(j\omega)$ исполнительной системы, уже исследованную нами выше в § 7.3.

Заметим в заключение, что матрица $\frac{\Phi(j\omega)}{j\omega}$ представляет собой

матрицу частотных характеристик разомкнутой системы управления по положению. Таким образом, мы получили аналог критерия Найквиста устойчивости замкнутых автоматических систем по годографу соответствующей разомкнутой системы.

Контрольные вопросы и задания

1. При каких предположениях справедливо уравнение исполнительной системы (7.7)? Для каких типов силовых агрегатов?
2. В каких случаях система уравнений (7.8) распадается на отдельные, независимые между собой дифференциальные уравнения степеней подвижности манипулятора?
3. Как записать слагаемые в уравнении (7.9), определяющие действие на механизм манипулятора сил тяжести?
4. Оцените точность математической модели (7.10), полученной в результате линеаризации уравнений динамики манипулятора (7.9).
5. Как можно задать опорную траекторию $q^*(t)$ при линеаризации уравнений (7.9)? Какой вид примут коэффициенты линеаризованного уравнения (7.11) при использовании сплайнов? Приведите пример.
6. Справедливо ли утверждение: при достаточно большом передаточном числе редуктора i уравнения (7.17) распадаются на уравнения отдельных приводов (т.е. взаимовлияние приводов практически отсутствует)?
7. Как, на Ваш взгляд, можно определить временной интервал, в течение которого коэффициенты уравнения (7.10) считаются постоянными? Как использовать метод «замороженных» параметров при необходимости исследования движения манипулятора вдоль заданной траектории?
8. Что характеризуют диагональные и недиагональные элементы матрицы $W(p)$ в уравнении (7.18)? В каких случаях эта матрица является диагональной?
9. Как исследовать взаимовлияние степеней подвижности манипулятора с помощью частотных характеристик?
10. Какой физический смысл имеет передаточная матрица (7.28) комплекса отдельно взятых приводов и как ее используют при анализе динамики исполнительной системы?
11. Почему взаимовлияние каналов управления исполнительной системы, как правило, несущественно в диапазонах низких и высоких частот. Каким образом можно численно оценить это взаимовлияние?
12. Как оценить показатели качества исполнительной системы: время переходного процесса, колебательность, динамическую ошибку?
13. Сформулируйте условие устойчивости исполнительной системы в соответствии с критерием Гурвица. Определите порядок необходимых вычислений.
14. Определите условие устойчивости исполнительной системы по частотному критерию Найквиста. Укажите порядок необходимых вычислений.
15. В чем отличие формулировки критерия Найквиста для многоканальной исполнительной системы манипулятора от его обычной формулировки?

16. Как провести анализ устойчивости исполнительной системы на заданной траектории движения?
17. Какие способы коррекции исполнительной системы Вам известны? Как реализуется метод подчиненного регулирования?
18. Как реализуется управление манипулятором по вектору скорости?
19. Опишите вид частотных характеристик системы управления манипулятором по вектору скорости в диапазоне рабочих частот.
20. Как реализовать исполнительную систему, позволяющую управлять манипулятором как по скорости, так и по положению? Требуется ли подстройка параметров системы при переходе от одного принципа управления к другому?
21. Как оценить наибольшую постоянную времени исполнительной системы, управляемой по положению в соответствии со схемой на рис. 7.14?
22. Как исследовать устойчивость исполнительной системы, замкнутой по положению (рис. 7.14)?

8. МЕТОДЫ ДИНАМИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ МАНИПУЛЯТОРАМИ

При выборе управляющих сигналов в главе 4 использовались только кинематические соотношения, далее, в главе 7, проводился анализ кинематического управления с учетом динамики манипулятора.

К методам динамического управления обычно относят такие, при которых формирование управляющих сигналов осуществляется с учетом уравнений динамики манипулятора. При этом за счет усложнения управления удается преодолеть негативное влияние нелинейностей и перекрестных связей, повысить качество процесса управления, обеспечить его устойчивость независимо от конкретной траектории. Такое управление приобретает особенно важное значение для манипуляторов, снабженных высокомоментными безредукторными электродвигателями, поскольку в этом случае неприемлемы методы расчета, основанные на разделении каналов управления (см. гл. 7).

Динамические методы представляют интерес при управлении крупными манипуляторами, перемещающими значительные инерционные нагрузки, например манипуляторами космических станций. Пренебрежение динамикой манипуляционных механизмов в этом случае принципиально не позволяет добиться необходимого качества и точности выполнения операций. Рассматриваемые в данной главе методы целесообразно использовать и при управлении промышленными манипуляторами, занятыми на операциях, связанных с преодолением внешних сил, в том числе на операциях сборки и механической обработки.

8.1. Методы, основанные на решении обратных задач динамики

К обратным задачам динамики относят задачи, связанные с вычислением сил и моментов по заданному движению. Этот подход используется и в данном случае.

Обратимся к уравнению динамики манипулятора в форме Даламбера (5.52). Будем считать, что известны желаемая траектория движения и соответствующие ей законы изменения обобщенных координат, их скоростей и ускорений $\dot{q}^0(t)$, $\ddot{q}^0(t)$ и $\ddot{q}^0(t)$, полученные в результате процедуры планирования траектории (см. гл. 4).

Ограничимся случаем, когда внешние моменты отсутствуют, а внешние силы представлены только силами тяжести звеньев и нагрузки, которые заранее известны. Таким образом, уравнение динамики манипулятора запишем в виде (см. § 5.3)

$$A(q)\ddot{q} = B(q, \dot{q})\dot{q} + B_1^T(q)G + \mu. \quad (8.1)$$

Если задано движение манипулятора, т.е. векторы q , \dot{q} и \ddot{q} в функции времени, то из этого уравнения можно определить необходимые управляющие силы и моменты — вектор μ . В этом состоит существо рассматриваемых здесь методов.

8.1.1. Компенсация динамики манипулятора в реальном времени

Выберем вектор управляющих сил и моментов, используя формулу $\mu = A(q)\ddot{q}^0 - B(q, \dot{q})\dot{q} - B_1^T(q)G + A(q)[K_1(q^0 - q) + K_2(\dot{q}^0 - \dot{q})]$, (8.2)

где $K_{1,2} = \text{diag } k_{1,2}$ — матрицы постоянных коэффициентов.

Тогда во всех точках траектории, для которых $\det A(q) \neq 0$, движение манипулятора будет подчиняться уравнению

$$\ddot{q} - \ddot{q}^0 = K_1(q^0 - q) + K_2(\dot{q}^0 - \dot{q}) \quad (8.3)$$

или дифференциальному уравнению относительно обобщенных координат вида

$$\ddot{q} + K_2\dot{q} + K_1q = f(q^0, \dot{q}^0, \ddot{q}^0),$$

где $f(q^0, \dot{q}^0, \ddot{q}^0) = K_1q^0 + K_2\dot{q}^0 + \ddot{q}^0$ — известная заранее вектор-функция, зависящая от выбора программной траектории.

Нетрудно выбрать такие значения параметров матриц K_1, K_2 , чтобы решение уравнения (8.3) для каждой степени подвижности манипулятора было асимптотически устойчивым. Тогда $q(t) \rightarrow q^0(t)$, т.е. процессы в системе стремятся к своим программным значениям.

Можно обеспечить и заданные показатели качества переходных процессов. Действительно, для i -й степени подвижности постоянная времени $T_i = 1/\sqrt{k_{1i}}$, а коэффициент демпфирования $\xi_i = k_{2i}/2\sqrt{k_{1i}}$, что позволяет однозначно определить k_{1i}, k_{2i} , если заданы требования по времени переходного процесса и показателю колебательности (см. п. 7.2) для i -го канала управления. Поскольку определенная таким образом динамическая система состоит из N автономных каналов с желаемыми характеристиками, требование к каждому каналу управления нетрудно определить из обобщенных требований, предъявляемых к движению схвата манипулятора (см. п. 7.3).

Полностью реализовать управление (8.2) невозможно по ряду причин. Прежде всего, для этого потребовалось бы вычислять в реальном времени матрицы $A(q)$ и $B(q, \dot{q})$, которые должны быть точно известны. Практически их можно определить для конкретного манипулятора лишь с известной степенью приближения. Вычисление этих матриц, к тому же, настолько сложно (см. гл. 5), что это обычно превосходит возможности управляющих устройств. Наконец, для того чтобы скомпенсировать соответствующие слагаемые, зависящие от q и \dot{q} , их следовало бы вычислить к моменту компенсации, совпадающему с моментом измерения, что невозможно.

Тем не менее такое управление в ряде случаев можно рассматривать как идеализированную модель, к которой можно приближаться. Например, в тех случаях, когда влияние слагаемых $B(q, \dot{q})\dot{q}$, определяющих относительные и кориолисовы ускорения, значительно меньше, чем слагаемых $A(q)\ddot{q}$, определяющих силы и моменты инерции, можно положить

$$\mu = A(q)\ddot{q}^0 - B_v^T(q)G + A(q)[K_1(q^0 - q) + K_2(\dot{q}^0 - \dot{q})]. \quad (8.4)$$

При использовании различных приближенных формул для вычисления матриц $A(q), B_v(q)$ необходимо иметь в виду, что даже небольшие погрешности при расчете управляющих моментов приводят к быстрому накоплению ошибок. Так, при использовании управления

(8.4) с аппроксимацией $A(q) \approx \tilde{A}(q), B_v(q) \approx \tilde{B}_v(q)$ и при условии, что можно пренебречь в уравнении (8.1) слагаемым, зависящим от скорости, вместо (8.3) получаем

$$\tilde{A}(q)[(\ddot{q} - \ddot{q}^0) - K_1(q^0 - q) - K_2(\dot{q}^0 - \dot{q})] + \Delta A(q)\ddot{q} = \Delta B_v^T(q)G,$$

где

$$\Delta A(q) = A(q) - \tilde{A}(q), \quad \Delta B_v^T(q) = B_v^T(q) - \tilde{B}_v^T(q).$$

Следовательно, погрешность в правой части будет дважды интегрироваться по времени, что и приведет к накоплению ошибки.

8.1.2. Компенсация динамики программного движения

Из уравнения (8.1) следует, что для реализации программного движения необходимо развить в степенях подвижности манипулятора силы (моменты)

$$\mu = \mu^0 = A^0\ddot{q}^0 - B^0\dot{q}^0 - B_v^{T0}G, \quad (8.5)$$

где

$$A^0 = A(q^0), \quad B^0 = B(q^0, \dot{q}^0), \quad B_v^{T0} = B_v^T(q^0).$$

Непосредственная, без обратной связи реализация такого управления не даст ожидаемого результата, так как незначительные и неизбежные погрешности в вычислении μ^0 приведут в результате интегрирования дифференциального уравнения второго порядка (8.1) к быстрому накоплению ошибок. Программное задание сил по этой причине никогда само по себе не приводит к программному изменению координат. Однако и в этом случае можно поступить также, как в п. 8.1.1, выбрав своеобразный моментный регулятор по формуле, аналогичной (8.2):

$$\mu = \mu^0 + A^0[K_1(q^0 - q) + K_2(\dot{q}^0 - \dot{q})]. \quad (8.6)$$

Как и ранее, в данном случае возможны упрощения. Например, пренебрегая вторым слагаемым в правой части выражения (8.5), получаем

$$\mu^0 = A^0\ddot{q}^0 - B_v^{0T}G.$$

Если к тому же можно пренебречь и перекрестными связями, обусловленными динамикой механизма, то формулы для управляющих сил (или моментов) приобретают особенно простой вид

$$\mu_i = \mathcal{A}_{ii}^0(\mathbf{q})(\ddot{q}_i^0 + k_{1i}(q_i^0 - q_i) + k_{2i}(\dot{q}_i^0 - \dot{q}_i)) - B_{ii}^{0T}(\mathbf{q})\mathbf{G}.$$

Обоснованность тех или иных упрощений можно установить путем предварительного моделирования уравнений движения манипулятора.

Реализация управляющих моментов (8.5), (8.6) не представляет трудности в вычислительном отношении, поскольку заранее были рассчитаны все матричные коэффициенты. Однако в этом случае уже не происходит полной компенсации динамики манипуляционного механизма и вместо уравнения (8.3) получим нелинейное уравнение вида

$$\mathcal{A}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} - \mathcal{A}(\mathbf{q}^0)\ddot{\mathbf{q}}^0 = \mathcal{B}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} - \mathcal{B}(\mathbf{q}^0, \dot{\mathbf{q}}^0)\dot{\mathbf{q}}^0 + (B_v^T(\mathbf{q}) - B_v^T(\mathbf{q}^0))\mathbf{G} + \mathcal{A}(\mathbf{q}^0)[K_1(\mathbf{q}^0 - \mathbf{q}) + K_2(\dot{\mathbf{q}}^0 - \dot{\mathbf{q}})]. \quad (8.7)$$

Обозначая $\Delta\mathbf{q} = \mathbf{q}^0 - \mathbf{q}$, $\Delta\dot{\mathbf{q}} = \dot{\mathbf{q}}^0 - \dot{\mathbf{q}}$, получаем отсюда дифференциальное уравнение в отклонениях от программного движения:

$$\mathcal{A}(\mathbf{q}^0 + \Delta\mathbf{q})(\ddot{\mathbf{q}}^0 + \Delta\ddot{\mathbf{q}}) - \mathcal{A}(\mathbf{q}^0)\ddot{\mathbf{q}}^0 = \mathcal{B}(\mathbf{q}^0 + \Delta\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}^0 + \Delta\dot{\mathbf{q}})(\dot{\mathbf{q}}^0 + \Delta\dot{\mathbf{q}}) - \mathcal{B}(\mathbf{q}^0, \dot{\mathbf{q}}^0)\dot{\mathbf{q}}^0 + (B_v^T(\mathbf{q}^0 + \Delta\mathbf{q}) - B_v^T(\mathbf{q}^0))\mathbf{G} + \mathcal{A}(\mathbf{q}^0)(K_1\Delta\mathbf{q} + K_2\Delta\dot{\mathbf{q}}). \quad (8.8)$$

Нетрудно видеть, что это нелинейное дифференциальное уравнение имеет тривиальное решение $\Delta\mathbf{q} = \Delta\dot{\mathbf{q}} = \Delta\ddot{\mathbf{q}} = 0$. Если это решение асимптотически устойчиво, то асимптотически устойчиво и решение $\mathbf{q}^0(t)$ уравнения (8.7), т.е. программное движение, реализуемое с помощью выбранного управления.

Для того чтобы исследовать устойчивость тривиального решения уравнения (8.8), выполним его линеаризацию в окрестности этого решения. Сохраняя принятые в § 7.1 обозначения, получим

$$\hat{\mathcal{A}}(\mathbf{q}^0)\Delta\mathbf{q} + \mathcal{A}(\mathbf{q}^0)\Delta\ddot{\mathbf{q}} = \mathcal{B}_1^*(\mathbf{q}^0, \dot{\mathbf{q}}^0)\Delta\mathbf{q} + \mathcal{B}_2^*(\mathbf{q}^0, \dot{\mathbf{q}}^0)\Delta\dot{\mathbf{q}} + \hat{B}_v^*(\mathbf{G}, \mathbf{q}^0)\Delta\mathbf{q} + \mathcal{B}^*(\mathbf{q}^0, \dot{\mathbf{q}}^0)\Delta\dot{\mathbf{q}} + \mathcal{A}(\mathbf{q}^0)(K_1\Delta\mathbf{q} + K_2\Delta\dot{\mathbf{q}}),$$

т.е. матричное дифференциальное уравнение второго порядка (или систему нелинейных дифференциальных уравнений порядка $2N$) вида

$$\mathcal{A}(\mathbf{q}^0)\Delta\ddot{\mathbf{q}} + M(\mathbf{q}^0, \dot{\mathbf{q}}^0)\Delta\dot{\mathbf{q}} + N(\mathbf{q}^0, \dot{\mathbf{q}}^0, \mathbf{G})\Delta\mathbf{q} = 0, \quad (8.9)$$

где

$$M(\mathbf{q}^0, \dot{\mathbf{q}}^0) = -[\mathcal{B}_2^*(\mathbf{q}^0, \dot{\mathbf{q}}^0) + \mathcal{A}(\mathbf{q}^0)K_2 + \mathcal{B}^*(\mathbf{q}^0, \dot{\mathbf{q}}^0)\Delta\dot{\mathbf{q}}],$$

$$N(\mathbf{q}^0, \dot{\mathbf{q}}^0, \mathbf{G}) = -[\mathcal{B}_1^*(\mathbf{q}^0, \dot{\mathbf{q}}^0) + \hat{B}_v^*(\mathbf{G}, \mathbf{q}^0) + \mathcal{A}(\mathbf{q}^0)K_1 + \hat{\mathcal{A}}(\mathbf{q}^0)].$$

Таким образом, задача сводится к исследованию устойчивости тривиального решения $\Delta\mathbf{q} = 0$ линейного матричного уравнения с пе-

ременными коэффициентами (8.9). В частности, в окрестности отдельных точек траектории, например конечной ее точки, устойчивость определяется расположением корней характеристического уравнения

$$\det(A\lambda^2 + M\lambda + N) = 0. \quad (8.10)$$

Если для всех корней λ_i этого уравнения выполняется условие $\text{Re } \lambda_i < 0$, то отклонения, обусловленные неточностью компенсации динамических составляющих, стремятся к нулю с течением времени.

Итак, в случае использования приближенных формул (8.5), (8.6) для вычисления управляющих сил и моментов, необходимо убедиться в устойчивости получаемой при этом системы.

8.1.3. Проблема реализуемости

Обратим теперь внимание на то, что представленные в п. 8.1.1 и 8.1.2 способы управления основаны на непосредственном формировании управляющих сил и моментов согласно одному из рассмотренных законов. Это возможно, например, при использовании высокомоментных безредукторных электродвигателей «прямого управления» (о которых упоминалось в гл. 5) или электрогидравлического привода. В настоящее время манипуляторы чаще всего оснащают высокооборотными электродвигателями с редуктором. В связи с этим возникает проблема формирования управляющих сигналов $\mathbf{g}(t)$ приводов, обеспечивающих заданный закон изменения управляющих сил и моментов $\boldsymbol{\mu}(t)$. Если речь идет о приводах, замкнутых по положению, что характерно для промышленных роботов с контурным управлением, то связь между $\mathbf{g}(t)$ и $\boldsymbol{\mu}(t)$ определяется уравнениями (7.14), из которых следует

$$\mathbf{g}(t) = W_\epsilon^{-1}(p)\boldsymbol{\mu}(t) + (E + W_\epsilon^{-1}(p)W_q(p))\mathbf{q}, \quad (8.11)$$

где $W_\epsilon(p)$, $W_q(p)$ — диагональные матрицы передаточных функций.

Из последнего уравнения видно, что задачу определения $\mathbf{g}(t)$ по виду $\boldsymbol{\mu}(t)$ можно в общем случае решить только приближенно, так как порядок числителя $W_\epsilon^{-1}(p)$ может быть выше порядка знаменателя, т.е. нарушается условие физической реализуемости.

В соответствии с уравнением (8.11) управляющий сигнал $\mathbf{g}(t)$ можно получить, решив в реальном времени дифференциальное уравнение

$$M_\varepsilon(p)g(t) = N(p)\mu(t) + (M_\varepsilon(p) + M_q(p))q, \quad (8.12)$$

в котором вектор управляющих сил и моментов $\mu(t)$ вычислен по формулам (8.2) или (8.6) (в обозначениях § 7.1).

В частности, используя последнюю формулу для определения $\mu(t)$, получаем

$$M_\varepsilon(p)g(t) = N(p)(\mu^0(t) + \mathcal{A}^0(t)(K_1(q^0(t) - q(t)) + K_2(\dot{q}^0(t) - \dot{q}(t)) + (M_\varepsilon(p) + M_q(p))q(t)),$$

или

$$M_\varepsilon(p)g = (M_\varepsilon(p) + M_q(p) - N(p)\mathcal{A}^0(K_1 + K_2p))q + N(p)(\mu^0 + \mathcal{A}^0(K_1q^0 + K_2\dot{q}^0)). \quad (8.13)$$

Если предположить, что программное движение реализуется точно и $\dot{q} = \dot{q}^0$, то соответствующий управляющий сигнал $g^0(t)$ будет удовлетворять дифференциальному уравнению

$$M_\varepsilon(p)g^0(t) = N(p)\mu^0(t) + (M_\varepsilon(p) + M_q(p))q^0(t), \quad (8.14)$$

которое может быть решено предварительно. Полагая $g(t) = \tilde{g}(t) - g^0(t)$, получаем для $\tilde{g}(t)$

$$M_\varepsilon(p)\tilde{g}(t) = N(p)\mathcal{A}^0(t)(K_1(q^0 - q) + K_2(\dot{q}^0 - \dot{q})) + (M_\varepsilon(p) + M_q(p))(q - q^0),$$

или, переходя к передаточным функциям,

$$W_\varepsilon(p)\tilde{g}(t) = [\mathcal{A}^0(t)K_1 - (W_\varepsilon(p) + W_q(p))]\Delta q(t) + \mathcal{A}^0(t)K_2\Delta\dot{q}(t). \quad (8.15)$$

Таким образом, задачу вычисления корректирующей части $\tilde{g}(t)$ управляющего воздействия можно свести к двум задачам, решаемым одновременно. Первая — это вычисление правой части уравнения (8.15) $\varphi(t)$, для которой можно найти интегральный оператор вида

$$\varphi(t) = \int_{t_0}^t \psi(t, \tau)\Delta q(\tau)d\tau + \mathcal{A}^0(t)K_2\Delta\dot{q}(t). \quad (8.16)$$

Вторая — решение интегрального уравнения Вольтерра первого рода, соответствующего (8.15) для $\tilde{g}(t)$:

$$\int_{t_0}^t k_\varepsilon(t - \tau)\tilde{g}(\tau)d\tau = \varphi(t), \quad (8.17)$$

где $k_\varepsilon(t) = L^{-1}\{W_\varepsilon(p)\}$.

Как известно, численное решение уравнения (8.17) связано с трудностями, обусловленными некорректностью этой задачи в смысле Тихонова*. Применяя методы регуляризации, можно приближенно решить и эту задачу.

8.1.4. Обобщенный моментный регулятор

Трудности реализации моментного управления с помощью обычной исполнительной системы (см. п. 8.1.3) связаны с тем, что при выборе моментного регулятора в виде (8.2) или (8.5) не были учтены возможности исполнительной системы. В результате, помимо решения обратной задачи динамики для механизма манипулятора, возникла еще одна обратная задача динамики для исполнительной системы. Проблему можно существенно упростить, рассматривая более общую, по сравнению с (8.3), модель системы, которая должна быть получена в результате синтеза.

Взяв за основу задание вектора управляющих сил и моментов в виде (8.6), полагаем

$$\mu = \mu^0 + \mathcal{A}^0 W_\mu(p)\Delta q, \quad (8.18)$$

где $W_\mu(p)$ — диагональная передаточная матрица. В частности, при $W_\mu(p) = K_1 + K_2p$ получим прежнее соотношение (8.6). В общем случае компоненты $W_\mu(p)$ являются дробно-рациональными функциями оператора p :

$$W_{\mu_i}(p) = \frac{M_{\mu_i}(p)}{N_{\mu_i}(p)}.$$

Подставляя формулу (8.18) в уравнение исполнительной системы (8.12), имеем

$$M_\varepsilon(p)g = N(p)\mu^0 + N(p)\mathcal{A}^0 W_\mu(p)\Delta q + (M_\varepsilon(p) + M_q(p))q.$$

Определяя программную часть управления $g(t)$ по-прежнему по формуле (8.14), получаем для корректирующей его части вместо (8.15) следующее соотношение:

* См.: Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1986. 288 с.

$$W_c(p)\tilde{g} = (A^0 W_\mu(p) - W_c(p) - W_q(p))\Delta q. \quad (8.19)$$

Очевидно, что выбирая в выражении $W_\mu(p)$ порядок полинома $N_\mu(p)$ не ниже, чем порядок $N(p)$, а порядок $M_\mu(p)$ — не выше, чем порядок $M(p)$, получаем физически реализуемый оператор, связывающий управляющий сигнал $\tilde{g}(t)$ с отклонением $\Delta q(t)$. Например, выбирая $N_\mu(p) = N(p)$, имеем

$$\tilde{g}(t) = (M_c^{-1}(p)N(p)A^0(t)N^{-1}(p)M_\mu(p) - E - M_c^{-1}(p)M_q(p))\Delta q(t). \quad (8.20)$$

Подставляя вектор сил и моментов (8.18) в уравнение динамики механизма (8.1), получаем с учетом (8.5)

$$A(q)\ddot{q} - A(q^0)\ddot{q}^0 = B(q, \dot{q})\dot{q} - B(q^0, \dot{q}^0)\dot{q}^0 + (B_r^T(q) - B_r^T(q^0))G + A(q^0)W_\mu(p)(q^0 - q).$$

Если предположить, что в малой окрестности опорного движения $A(q) \approx A(q^0)$, $B_r^T(q) \approx B_r^T(q^0)$ и пренебречь слагаемым, содержащим B , то вместо (8.3) получим уравнение следующего вида:

$$\ddot{q} - \ddot{q}^0 = W_\mu(p)(q^0 - q),$$

или

$$(N_\mu(p)p^2 + M_\mu(p))\Delta q = 0. \quad (8.21)$$

Это уравнение обобщает (8.3). Оно определяет желаемые процессы в каждом из каналов управления. Параметры этих процессов и их устойчивость определяются корнями характеристических уравнений

$$N_{\mu i}(\lambda)\lambda^2 + M_{\mu i}(\lambda) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (8.22)$$

В частности, полагая $N_\mu(p) = N(p)$, получаем

$$N_i(\lambda)\lambda^2 + M_{\mu i}(\lambda) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (8.23)$$

Необходимое размещение корней на комплексной плоскости можно обеспечить путем выбора параметров полинома $M_{\mu i}(\lambda)$.

Итак, мы избавились от необходимости решать обратную задачу динамики для исполнительной системы ценой возможного ухудшения качества системы, получаемой в результате синтеза. Это связано с тем, что возможности коррекции положения корней характеристического уравнения (8.23) ограничены и существенно зависят от свойств испол-

нительной системы. Выбор того или иного способа коррекции, наиболее приемлемого для конкретного случая, — это вопрос опыта и умения разработчика.

8.2. Декомпозиция управления

8.2.1. Декомпозиция уравнений динамики манипуляционного механизма

Под декомпозицией системы управления обычно подразумевают ее разделение на ряд более простых подсистем, каждой из которых можно управлять по отдельности. Для систем управления манипуляторами декомпозицию можно осуществить путем компенсации перекрестных связей между каналами управления, порожденных динамикой манипуляционного механизма.

Эти связи исследовались в гл. 7, причем гипотеза о том, что их влияние несущественно в рабочем диапазоне частот, была положена в основу рассмотренной в этой главе методики синтеза манипуляционной системы. В общем случае эта гипотеза не выполняется, в особенности для крупных манипуляционных конструкций большой грузоподъемности. Поэтому возникает проблема компенсации перекрестных связей путем специального формирования управляющих сигналов.

Наиболее просто эта задача решается в случае, когда в уравнении (8.1) можно пренебречь слагаемыми, нелинейно зависящими от скорости (центробежными и кориолисовыми силами), т.е. это уравнение можно представить в виде

$$A(q)\ddot{q} = B_r^T(q)G + \mu. \quad (8.24)$$

Выберем вектор сил и моментов следующим образом:

$$\mu = -B_r^T(q)G + A(q)A_d^{-1}(q)\tilde{\mu}, \quad (8.25)$$

где $A_d(q) = \text{diag}[A_{11}(q) \ A_{22}(q) \ \dots \ A_{NN}(q)]$ — матрица, состоящая из диагональных членов матрицы $A(q)$; тогда вместо уравнения (8.24) получим систему из N уравнений второго порядка

$$A_{ii}(q)\ddot{q}_i = \tilde{\mu}_i, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (8.26)$$

Воспользуемся уравнениями приводов (8.12), которые запишем в виде

$$N_i(p)\mu_i = M_{i\varepsilon}(p)\varepsilon_i - M_{iq}(p)q_i, \quad (8.27)$$

где $\varepsilon_i = q_i^0 - q_i$ — сигналы ошибки.

Подставляя в эти уравнения значения $\tilde{\mu}_i$ из (8.26), получим систему уравнений, определяющих движение N независимых подсистем:

$$N_i(p)A_{ii}(q)p^2 q_i = M_{i\varepsilon}(p)\varepsilon_i - M_{iq}(p)q_i,$$

или

$$(N_i(p)A_{ii}(q)p^2 + M_{i\varepsilon}(p) + M_{iq}(p))q_i = M_{i\varepsilon}(p)g_i. \quad (8.28)$$

Каждый из каналов управления, описываемых нелинейным уравнением вида (8.28), теперь может быть синтезирован по отдельности в соответствии с предъявляемыми требованиями.

Поскольку в этой главе рассматривается управление вдоль программных движений $q^0(t)$, выбранных заранее, матрицу $A_d(q)$ также можно заранее рассчитать на программном движении: $A_d^0 = A_d(q^0)$. Полагая, что эта матрица незначительно изменяется в малой окрестности опорного движения, можно записать уравнение в отклонениях от опорного движения, аналогичное (8.27), но линейное:

$$(N_i(p)A_{ii}(q^0(t))p^2 + M_{i\varepsilon}(p) + M_{iq}(p))q_i = M_{i\varepsilon}(p)g_i. \quad (8.29)$$

Таким образом, система разделена на N независимых линейных подсистем и синтез ее сводится к синтезу каждой из подсистем. Последнюю задачу решают путем выбора операторов $M_{i\varepsilon}(p)$, $M_{iq}(p)$ с помощью введения корректирующих устройств или путем изменения коэффициентов регуляторов, исходя из условий устойчивости и требуемого качества процесса управления в каждой из подсистем по отдельности (см. гл. 7). При этом обычно используют метод замороженных параметров, т.е. задачу решают для фиксированных значений $A_{ii}(q^0)$ в предположении, что элементы матрицы $A_d(q^0)$ изменяются существенно медленнее, чем процессы управления в приводах. Обычно удается выбрать постоянные параметры регулятора, обеспечивающие устойчивость и удовлетворительное качество системы «в среднем» вдоль всей траектории (см. § 7.3).

8.2.2. Декомпозиция управляющих сигналов

Реализация подхода, рассмотренного в п. 8.2.1, предполагает как возможность прямого управления вектором управляющих сил и моментов в соответствии с уравнением (8.25), так и задание управляющего сигнала $g(t)$ в соответствии с (8.28), обеспечивающего движение по программной траектории. Как уже отмечалось ранее, в § 8.1, такое управление недостижимо, если только не используется специальный привод, обеспечивающий прямое управление моментом. В обычных манипуляционных системах компенсация недиагональных составляющих в уравнении (8.24) должна выполняться путем специального формирования управляющих сигналов g , в которых можно выделить две части: сигнал динамической коррекции g_d и сигнал локального управления g_L , под которым подразумевают вектор сигналов управления отдельными каналами в предположении об их декомпозиции: $g = g_L + g_d$. Сигнал g_d должен обеспечить динамическую декомпозицию каналов. При этом система локального управления по-прежнему описывается уравнением (8.28), т.е.

$$(N(p)A_d(q)p^2 + M_\varepsilon(p) + M_q(p))q = M_\varepsilon(p)g_L. \quad (8.30)$$

Динамическая коррекция может быть определена из уравнения динамики исполнительной системы в общем виде. Подставляя в уравнение, связывающее вектор сил и моментов μ с вектором обобщенных координат q (8.11), выражение вектора μ из уравнения динамики механизма (8.24), получаем

$$N(p)(A(q)\ddot{q} - B_v^T(q)G) = M_\varepsilon(p)(g_L + g_d) - (M_\varepsilon(p) + M_q(p))q. \quad (8.31)$$

С учетом выражения (8.30), определяющего локальное управление g_L , запишем следующее уравнение для составляющей g_d :

$$N(p)((A(q) - A_d(q))\ddot{q} - B_v^T(q)G) = M_\varepsilon(p)g_d,$$

или

$$N(p)((A(q)A_d^{-1}(q) - E)A_d(q)\ddot{q} - B_v^T(q)G) = M_\varepsilon(p)g_d. \quad (8.32)$$

В последнем уравнении матрица $A(q)A_d^{-1}(q) - E$ характеризует перекрестные связи, обусловленные динамикой манипуляционного механизма. Уравнение (8.32) определяет сигнал динамической коррекции с учетом динамики исполнительной системы.

В частности, в окрестности программного движения, обозначая как и выше $\mathcal{A}(q^0) = \mathcal{A}^0$, $A_d(q^0) = A_d^0$, $B_v^T(q^0) = B_v^{0T}$, получаем

$$N(p)((\mathcal{A}^0(A_d^0)^{-1} - E)A_d^0\ddot{q} - B_v^{0T}G) = M_\epsilon(p)g_d. \quad (8.33)$$

Поскольку процессы изменения во времени переменных матриц $A_d^0(t)$, $B_v^{0T}(t)$, $\mathcal{A}^0(t)$, как правило, намного медленнее, чем процессы, обусловленные динамикой приводов, последней часто можно пренебречь при вычислении динамической коррекции. В этом случае $N(p) \approx E$, $M_\epsilon(p) \approx K_\epsilon = \text{const}$ и в соответствии с уравнением (8.33) найдем

$$g_d = g_d^0 = K_\epsilon^{-1}(\mathcal{A}^0(A_d^0)^{-1} - E)A_d^0\ddot{q} - B_v^{0T}G. \quad (8.34)$$

Недостатком выбора динамической коррекции в форме (8.34) является чувствительность метода к ошибкам реализации. Поскольку матричные коэффициенты в правой части (8.34), реализуемые в системе управления, будут отличаться от фактических, компенсация левой части уравнения (8.33) произойдет не полностью. В результате получим уравнение второго порядка (если пренебречь, как мы условились, динамикой привода) относительно q , решение которого $q(t)$ может возрастать во времени.

Действительно, если обозначить для краткости $a_d = (\mathcal{A}^0(A_d^0)^{-1} - E)A_d^0$, \tilde{a}_d — приближенную реализацию этой матрицы, $\Delta a_d = a_d - \tilde{a}_d$ — погрешность реализации a_d ; аналогично $\Delta g = g - \tilde{g}$ — погрешность реализации вектора статической нагрузки $g = B_v^{0T}G$, то, подставляя фактически вычисленное в соответствии с (8.34) значение g_d в (8.33), получаем при сделанных предположениях

$$\Delta a_d \ddot{q} = \Delta g,$$

или

$$\Delta a_d \Delta \ddot{q} + \Delta a_d \ddot{q}_0 = \Delta g, \quad (8.35)$$

где $\Delta \ddot{q} = \ddot{q} - \ddot{q}_0$. При ненулевых начальных условиях решение этого уравнения является возрастающей функцией времени, что приводит к накоплению ошибки. Значения коэффициентов матрицы Δa_d носят случайный характер как по величине, так и по знаку, что позволяет надеяться на взаимную компенсацию ошибок во времени. Эту ошибку не удастся ликвидировать за счет корректирующих связей самих при-

водов в уравнении (8.30), поскольку это уравнение характеризует процессы в отдельных каналах управления, а ошибки в соответствии с выбором g_d в виде (8.34) накапливаются в перекрестных связях. Таким образом, влияние перекрестных связей может возрасти со временем функционирования системы.

Заметим, что погрешность будет накапливаться значительно быстрее, если вместо коррекции в форме (8.34) выбрать программную динамическую коррекцию, заранее рассчитанную по формуле

$$g_d = (\mathcal{A}^0(A_d^0)^{-1} - E)A_d^0\ddot{q}^0 - B_v^{0T}G.$$

В этом случае выражение (8.35) будет иметь вид

$$a_d \Delta \ddot{q} + \Delta a_d \ddot{q}^0 = \Delta g,$$

т.е. погрешность в этом случае накапливается даже при $\Delta a_d \rightarrow 0$.

Другим источником погрешности является сделанное допущение о том, что при выборе g_d можно пренебречь динамикой приводов. Для того чтобы оценить его обоснованность, рассмотрим фактическое уравнение системы при коррекции вида (8.34). Предполагая при этом, что матричные коэффициенты в выражении g_d реализованы точно в соответствии с уравнением (8.33), получаем

$$(N(p) - K_\epsilon^{-1}M_\epsilon(p))(\mathcal{A}^0(A_d^0)^{-1} - E)A_d^0\ddot{q} = B_v^{0T}G(E - M_\epsilon(p)K_\epsilon^{-1}).$$

Это уравнение определяет закон изменения погрешности, обусловленной тем, что не учитывалась динамика привода. Устойчивость тривиального решения этого уравнения определяется корнями характеристического уравнения

$$\det[(N(\lambda) - K_\epsilon^{-1}M_\epsilon(\lambda))(\mathcal{A}^0(A_d^0)^{-1} - E)A_d^0\lambda^2] = 0, \quad (8.36)$$

среди которых имеется нулевой корень, и, следовательно, система в лучшем случае находится на границе устойчивости. Это, как и в предыдущем случае, практически всегда приводит к накоплению ошибок в процессе работы системы.

Учесть динамику приводов, непосредственно определяя более точное значение g_d из уравнения (8.33), невозможно, вследствие того, что передаточная матрица $N(p)M_\epsilon(p)$ не удовлетворяет условию физической реализуемости. Однако можно попробовать найти приближенное решение задачи, учитывающее динамику приводов, используя тот же

прием, которым мы пользовались выше в § 8.1. В этом случае коррекция g_d ищется как решение интегрального уравнения первого рода

$$\int_0^t \varphi_c(t-\tau) g_d(\tau) d\tau = K_c g_d^0(t),$$

где

$$\varphi_c(t) = L^{-1}\{N^{-1}(p)M(p)\},$$

а $g_d^0(t)$ — значение динамической коррекции, определяемое по формуле (8.34).

Это уравнение может быть решено только приближенно. К тому же его необходимо решать в реальном масштабе времени в зависимости от значений $g_d^0(t)$, вычисляемых согласно (8.34).

Из сказанного следует, что декомпозиция системы управления путем компенсации динамических связей связана с преодолением значительных трудностей, характер которых зависит от конкретной системы управления.

8.3. Силовая обратная связь

Одним из основных способов практической реализации методов динамического управления является силовая обратная связь. Ее реализуют с помощью датчиков сил и моментов, которые устанавливают либо в степенях подвижности манипулятора, либо в его «запястье», т.е. в сочленении захвата с основной конструкцией механической руки. В последнее время разрабатывают более сложные конструкции схватов, имеющих три и более «пальцев», которые также оснащают датчиками сил. Сигналы с датчиков обратных связей используются для формирования корректирующих сигналов с учетом моментов, действующих на манипулятор.

Использование датчиков моментов, расположенных в шарнирных степенях подвижности манипулятора, позволяет решить задачи динамической коррекции и декомпозиции (см. § 8.1 и 8.2).

С помощью датчиков сил и моментов, сосредоточенных в «запястье» манипулятора, измеряют вектор сил и моментов, действующих со стороны нагрузки, например при выполнении механической работы. Такие датчики обычно используют для управления манипуляторами,

предназначенными для операций сборки, механической обработки и т.д. Конструкция трехкомпонентного датчика сил показана на рис. 8.1. Датчик содержит ряд тензометрических элементов, которые при малой деформации конструкции под действием внешних сил позволяют измерять трехкомпонентный вектор сил $F = (F_1, F_2, F_3)$ в декартовой системе координат, связанной с основанием датчика. Датчик может содержать встроенный микропроцессор, который выполняет обработку тензометрических сигналов и осуществляет обмен информацией с управляющей системой.

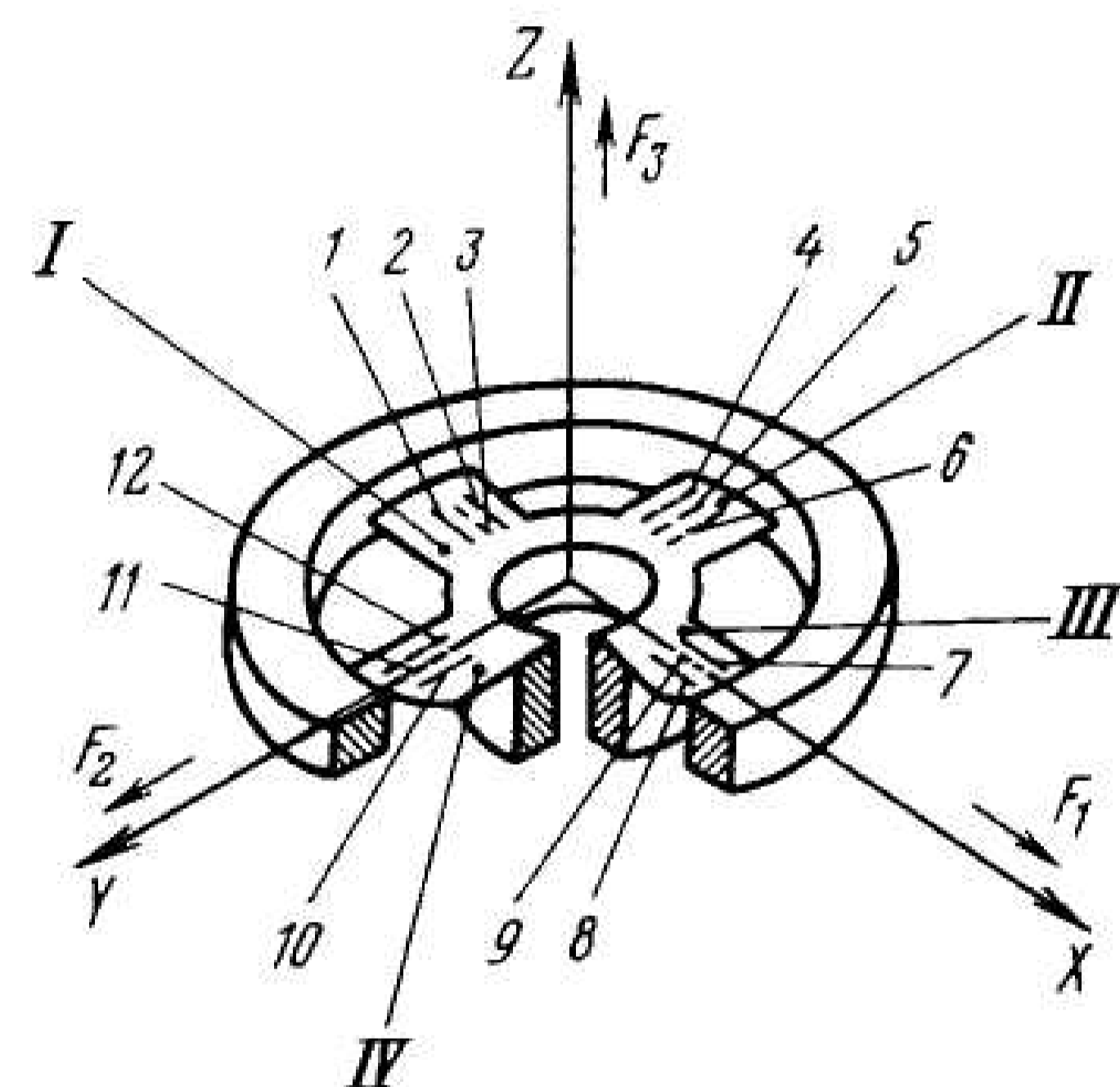


Рис. 8.1. Конструкция трехкомпонентного силомоментного датчика: I-IV — упругие элементы; 1-12 — чувствительные элементы (тензорезисторы)

Технические характеристики шестикомпонентного датчика, измеряющего векторы сил и моментов, можно найти в [40].

Рассматриваемый датчик относится к числу пассивных устройств, т.е. предполагается, что коррекция движения по измеренным датчиком силам осуществляется за счет движений манипулятора в его степенях подвижности. Иногда, например при прецизионной сборке, точность, обеспечиваемая манипулятором, оказывается недостаточной. Тогда применяют специальные активные модули, которые содержат как силомоментный датчик, так и систему приводов, обеспечивающих точное позиционирование, либо точную ориентацию схвата. Применение схвата с активными пальцами является развитием подхода, приближающего возможности схвата к возможностям кисти человеческой руки.

Таким образом, способы организации силовой обратной связи различны — они зависят от конкретных задач, выполняемых роботом. Это предполагает и различные способы управления роботом с силовой обратной связью. Рассмотрим две основные группы таких способов.

8.3.1. Силовая обратная связь в соединениях манипулятора

В данном случае *датчики сил или моментов*, в зависимости от типа кинематической пары, устанавливаются в соединениях манипулятора. Таким образом, с их помощью измеряют вектор сил и моментов μ , развиваемых в его степенях подвижности. Если предположить, что измерения идеальны, то их результатом является вектор μ_d , равный в соответствии с уравнениями (8.1)

$$\mu_d = A(q)\ddot{q} - B(q, \dot{q})\dot{q} - B_v^T(q)G. \quad (8.37)$$

Поскольку этот вектор содержит полную информацию о динамических и статических силах и моментах, действующих на манипулятор в процессе его движения, его целесообразно использовать для формирования управляющего сигнала с целью компенсации динамических эффектов и декомпозиции задачи управления.

Рассмотрим, например, управление (8.2), обеспечивающее полную декомпозицию задачи. Сопоставляя это выражение с формулой (8.37), можно заключить, что при наличии силовой обратной связи можно положить

$$\mu = \mu_d + K_1 \Delta q + K_2 \Delta \dot{q} + \Delta \ddot{q}, \quad (8.38)$$

где $\Delta q = q^0 - q$; $\Delta \dot{q} = \dot{q}^0 - \dot{q}$; $\Delta \ddot{q} = \ddot{q}^0 - \ddot{q}$.

Подставляя (8.38) в уравнение динамики механизма (8.1), по-прежнему получаем (при $\det A(q) \neq 0$) уравнение (8.3), описывающее систему, т.е.

$$\Delta \ddot{q} + K_2 \Delta \dot{q} + K_1 \Delta q = 0.$$

При соответствующем выборе параметров матриц K_1 и K_2 , будем иметь асимптотически устойчивое программное движение $q^0(t)$. Обратная связь по второй производной \ddot{q} здесь необязательна; можно выбрать $\mu = \mu_d + K_1 \Delta q + K_2 \Delta \dot{q}$, что приведет к системе

$$K_2 \Delta \dot{q} + K_1 \Delta q = 0,$$

которая также асимптотически устойчива при положительных параметрах матриц K_1 и K_2 .

Нетрудно, используя силовую обратную связь, решить и задачу декомпозиции управления (см. § 8.2). В этом случае следует положить в качестве управляющего сигнала

$$\mu = \mu_d - A_d(q)\ddot{q} + \tilde{\mu}, \quad (8.39)$$

где $\tilde{\mu}$, как и в (8.25), означает вектор сил и моментов, развиваемый приводами локальной системы управления, а $A_d(q)$ — матрица, состоящая из диагональных членов матрицы $A(q)$ (см. § 8.2). Согласно уравнению динамики (8.1) и соотношению (8.37), в этом случае система описывается уравнением (8.26)

$$A_d(q)\ddot{q} = \tilde{\mu}.$$

т.е. обеспечена декомпозиция многосвязной системы на локальные подсистемы.

Выбирая, например,

$$\tilde{\mu} = A_d(q)\ddot{q}^0 + K_1 \Delta q + K_2 \Delta \dot{q}. \quad (8.40)$$

получаем уравнение системы, состоящей из отдельных подсистем:

$$A_d(q)\Delta \ddot{q} + K_2 \Delta \dot{q} + K_1 \Delta q = 0.$$

Полагая в окрестности опорной траектории $A_d(q) \approx A_d(q^0)$, найдем систему из $2N$ линейных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами. Асимптотическая устойчивость решения обеспечивается выбором параметрических матриц K_1 и K_2 .

Заметим, что в выражениях (8.39), (8.40) можно выбрать вместо $A_d(q^0)$ постоянную матрицу \tilde{A}_d , совпадающую с $A_d(q^0)$ в одной из точек программной траектории, или даже произвольную диагональную матрицу постоянных коэффициентов \hat{A}_d^0 . В последнем случае эти коэффициенты должны обеспечивать асимптотическую устойчивость и необходимое качество переходных процессов в системе

$$\hat{A}_d^0 \Delta \ddot{q} + K_2 \Delta \dot{q} + K_1 \Delta q = 0.$$

Аналогично решается и задача декомпозиции для исполнительной системы. Выбирая, как и в § 8.2, управление приводами исполнительной системы в виде суммы локальной и динамической составляющих, положим, что локальная составляющая g_L обеспечивает движение отдельно рассматриваемых приводов в соответствии с уравнением

(8.30). С учетом (8.39), (8.11) уравнение для динамической коррекции g_d примет вид

$$N(p)(\mu_d - A_d(q)\ddot{q}) = M_\varepsilon(p)g_d. \quad (8.41)$$

Если при определении g_d можно пренебречь динамикой привода, и, кроме того, можно положить $A_d(q) \approx A_d(q^0) = A_d^0$, то формула для динамической коррекции приобретет вид

$$g_d = K_\varepsilon^{-1}(\mu_d - A_d^0\ddot{q}), \quad (8.42)$$

где K_ε — диагональная матрица коэффициентов.

Сравнивая выражения (8.34) и (8.42), можно заметить, что в последнем случае вычисляются только диагональные члены матрицы A^0 , а в первом — вся матрица.

Заметим, что при динамической коррекции в (8.41), (8.42) вместо A_d^0 , как и выше, может быть выбрана любая диагональная матрица с постоянными коэффициентами: $\hat{A}_d^0 = A_d^0$. Единственное требование, предъявляемое к ней, — обеспечение устойчивости и необходимого качества процессов в системе локального управления, которая описывается уравнением, аналогичным (8.30), но с постоянными коэффициентами:

$$(N(p)\hat{A}_d^0 p^2 + M_\varepsilon(p) + M_q(p))q = M_\varepsilon(p)g_L. \quad (8.43)$$

Таким образом, используя силовую обратную связь, действительно можно решить те задачи, о которых шла речь в § 8.1 и 8.2. Принципиальное отличие рассматриваемого способа управления состоит в том, что не требуется вычислять в реальном времени матричные коэффициенты в правой части выражений (8.2), (8.4), (8.34), так как сигнал μ_d снимается с датчиков. Поэтому отпадает одна из основных проблем динамической коррекции, связанная с неточностью динамической модели исполнительного механизма (8.1). Это касается как структуры динамической модели, так и значений ее параметров, которые на практике всегда известны лишь приблизительно.

Еще одна задача, для которой может эффективно использоваться силовая обратная связь, — это задача отработки наряду с заданной программой движения и заданного закона изменения сил (моментов), приложенных со стороны схвата к инструменту, или к объекту манипулирования. Характерным примером является задача механической

обработки поверхности с помощью инструмента, закрепленного на конце манипулятора, например операции шлифовки или обдирки сложной поверхности.

Если $F^0(t)$ — закон изменения вектора сил вдоль заданной траектории, то закон изменения соответствующих моментов в степенях подвижности манипулятора характеризуется формулой

$$\hat{\mu}^0 = \mu^0 + \mu_F^0, \quad (8.44)$$

где μ^0 — программное изменение моментов вдоль траектории, вычисляемое по (8.5), а μ_F^0 — составляющая, обусловленная вектором сил F^0 :

$$\mu_F^0 = J^T(q^0)F^0. \quad (8.45)$$

Используем динамическую коррекцию для декомпозиции системы, выбрав на этот раз

$$g_d = M_\varepsilon^{-1}(p)N(p)(\mu_d - \hat{A}_d^0\ddot{q} + \hat{\mu}^0). \quad (8.46)$$

Тогда для локальной составляющей g_L вместо уравнения (8.43) получим

$$N(p)\hat{A}_d^0\ddot{q} + (M_\varepsilon(p) + M_q(p))q = M_\varepsilon(p)g_L + N(p)\hat{\mu}^0. \quad (8.47)$$

Это уравнение соответствует полученной в результате декомпозиции системе из N независимых каналов управления, входным сигналом для которых является вектор локального управления g_L , а нагрузкой — программное изменение $\hat{\mu}^0$. Поскольку вектор $\hat{\mu}^0$ определен заранее, можно обычным путем исследовать ошибку, обусловленную нагрузкой и, при необходимости, ввести дополнительную коррекцию в приводы каналов управления.

В соответствии с (8.47) передаточную матрицу по возмущению определяют следующим образом:

$$W_\mu(p) = [N(p)\hat{A}_d^0 p^2 + M_\varepsilon(p) + M_q(p)]^{-1} N(p). \quad (8.48)$$

Отклонение $q_\mu(t)$ вектора $q(t)$, вызванное нагрузкой $\hat{\mu}^0$, можно определить так:

$$q_\mu(t) = \int_{t_0}^t k_\mu(t-\tau)\hat{\mu}^0(\tau)d\tau, \quad (8.49)$$

где

$$k_{\mu}(t) = L^{-1}\{W_{\mu}(p)\}.$$

Методы введения коррекции, обеспечивающие уменьшение моментной ошибки, хорошо известны, и мы не будем здесь на них останавливаться. Отметим, что в данном случае возмущение поддается предварительному расчету. Следовательно, можно выполнить коррекцию и за счет программного изменения управляющего сигнала. Положим в выражении (8.49) $g_l = g'_l + g''_l$, где g'_l определяется программой движения, а g''_l заранее вычисляют из соотношения

$$M_c(p)g''_l = N(p)\hat{\mu}^0. \quad (8.50)$$

Тогда для g'_l уравнение приводов по-прежнему определяется формулой (8.43), а введение g''_l позволяет полностью компенсировать программную нагрузку. Практически речь может идти только о приближенной реализации, как в случае вычислений по формуле (8.50), так и за счет других допущений, уже обсуждавшихся выше.

8.3.2. Силовая обратная связь на схвате

Под этим названием мы понимаем организацию силовой обратной связи в «запястье» манипулятора с помощью многокомпонентного силомоментного датчика, позволяющего измерить в общем случае шестикомпонентный вектор сил F_i и моментов M_i , приложенных к схвату или инструменту, закрепленному на манипуляторе, со стороны объекта работ (рис. 8.2).

Такой способ наиболее эффективен для выполнения механических операций с помощью манипулятора. Если предположить известным закон изменения сил, который должен быть приложен со стороны манипулятора к нагрузке $F^0(t)$, то измеряя фактическое значение $F_a(t)$, можно вычислить управляющие моменты в степенях подвижности манипулятора, организовав обратную силовую связь. Выясним вначале, что же измеряет датчик сил и моментов на схвате.



Рис. 8.2. Многомоментный датчик сил и моментов в запястье манипулятора

Представим себе, что схват вместе с нагрузкой отделен от остальной конструкции манипулятора плоскостью, в которой производят измерение сил датчиком. Оставшаяся часть механизма движется в соответствии с уравнением вида (8.1) под действием управляющих сил и моментов, а также вектора сил и моментов реакции отброшенной части F_{RN} :

$$\tilde{A}(q)\ddot{q} = \tilde{B}(q, \dot{q})\dot{q} + \tilde{B}_v^T(q)\tilde{G} + \mu + J^T(q)F_{RN}. \quad (8.51)$$

Отличие этого уравнения от (8.1) заключается в том, что изменение линейных размеров и масс-инерционных характеристик последнего звена привело к изменению матричных коэффициентов \tilde{A} , \tilde{B} , \tilde{B}_v^T а также вектора \tilde{G} . Схват с нагрузкой при этом продолжает двигаться как свободное твердое тело в соответствии с уравнением

$$M\ddot{r} = F_a - F_{RN}, \quad (8.52)$$

где F_a — вектор внешних сил и моментов, приведенных к центру масс твердого тела, образованного N -м звеном (схватом) и нагрузкой (инструментом), а M — масса этого тела.

Датчик сил и моментов измеряет вектор F_{RN} , т.е., с одной стороны, вектор измеряемых сил и моментов

$$F_a = F_{RN} - M\ddot{r}, \quad (8.53)$$

а с другой — вектор динамических сил, обусловленных движением механизма:

$$F_a = (J^T(q))^{-1}(\tilde{A}(q)\ddot{q} - \tilde{B}(q, \dot{q})\dot{q} - \tilde{B}_v^T(q)\tilde{G} - \mu). \quad (8.54)$$

Отсюда следует, что информация, полученная с датчика сил и моментов на схвате, может быть использована как для измерения внешних сил и соответствующей коррекции движения манипулятора, так и для коррекции динамики движения полезной нагрузки. В последнем случае введение силовой обратной связи аналогично рассмотренному в п. 8.3.1.

Пусть, в частности, внешние силы отсутствуют и задача состоит в перемещении N -го звена по заданной траектории $r^0(t)$ с заданными скоростью $\dot{r}^0(t)$ и ускорением $\ddot{r}^0(t)$. Согласно соотношениям, рассмотренным в главе 3, нетрудно определить соответствующие векторы обобщенных координат $q^0(t)$, $\dot{q}^0(t)$, $\ddot{q}^0(t)$, а также программный век-

тор F^0 сил, под действием которого объект совершает программное движение:

$$F^0 = M \ddot{r}^0. \quad (8.55)$$

Если, в частности, динамикой звеньев манипулятора можно пренебречь по сравнению с динамикой нагрузки, то из формулы (8.51) следует, что для реализации такого движения нужно выбрать вектор управляющих сил и моментов в виде

$$\mu = J_v^T(q) F^0 - \tilde{B}_v^T(q) \tilde{G}. \quad (8.56)$$

Такое предположение справедливо, например, для космических манипуляторов, перемещающих большие инерционные массы, значительно превышающие массу самого манипулятора. В последнем случае пропадает и второе слагаемое в правой части (8.56), обусловленное гравитационными силами в (8.51).

Если же динамикой манипуляционного механизма пренебречь нельзя, то следует положить

$$\mu = J_v^T(q) F^0 - \tilde{A}(q) \ddot{q} - \tilde{B}(q, \dot{q}) \dot{q} - \tilde{B}_v^T(q) \tilde{G}, \quad (8.57)$$

что требует вычисления в реальном времени матричных коэффициентов уравнения динамики, как и при решении задачи компенсации динамики в п. 8.1.1. Вместо этого в данном случае можно применить силовую обратную связь на схвате. Для того чтобы соблюдалось уравнение (8.55), нужно предположить, что механизм движется под действием сил F^0 , т.е. выполняется уравнение

$$\tilde{A}(q) \ddot{q} = \tilde{B}(q, \dot{q}) \dot{q} + \tilde{B}_v^T(q) \tilde{G} + J_v^T(q) F^0,$$

и, следовательно, датчик измеряет вектор

$$F_d = (J_v^T(q))^{-1} (\tilde{A}(q) \ddot{q} - \tilde{B}(q, \dot{q}) \dot{q} - \tilde{B}_v^T(q) \tilde{G}).$$

Выберем

$$\mu = J_v^T(q) (F^0 + F_d). \quad (8.58)$$

Это выражение совпадает с (8.57) и, значит, определяет искомое управление с силовой обратной связью, обеспечивающее движение нагрузки в соответствии с уравнением (8.55).

Значительно чаще, однако, силовую обратную связь на схвате используют для коррекции движения по измеренным внешним силам. Оценку последних можно получить, используя выражение (8.53), в виде

$$\hat{F}_v = F_d + M \ddot{r},$$

причем ускорение \ddot{r} можно вычислить в реальном времени по ускорениям обобщенных координат \ddot{q} . Во многих случаях это ускорение невелико и слагаемым $M \ddot{r}$ можно пренебречь или же рассчитать его заранее для программного движения как $M \ddot{r}^0$.

При этом, измеряя силы и моменты, обычно управляют обобщенными координатами и их производными, что более реально при использовании современных промышленных робототехнических систем, чем прямое управление моментами, как в случае (8.58).

Так, при механической обработке (зачистке поверхности) регулируют силу резания за счет изменения скорости движения инструмента по контуру. Эта скорость выбирается в функции от желаемого значения силы резания F^0 и фактически измеряемого датчиком силы значения F_d : $v = f(F^0, F_d)$.

Вектор-функцию f выбирают таким образом, чтобы обеспечивалось заданное качество технологического процесса. Например, при возрастании фактической силы F_d в частности вследствие неровностей обрабатываемой поверхности, скорость v должна уменьшаться.

При сборке двух деталей информация о силах и моментах реакции используется для коррекции положения и ориентации детали, удерживаемой в схвате манипулятора. В этом случае применяют способ ситуационного управления. Он состоит в том, что по данным, получаемым датчиком, анализируют текущую ситуацию и принимают решение о дальнейшей коррекции.

Например, при введении вала в отверстие возникшее касание кромки вала и внутренней поверхности отверстия приводит к появлению силы реакции F_R и момента реакции M_R (рис. 8.3, а), действующих на вал помимо силы F_M , приложенной со стороны манипулятора, и измеряемых датчиком. Возникновение двухточечного контакта (рис. 8.3, б) приводит к изменению величины и направления этих векторов. Отметим, что

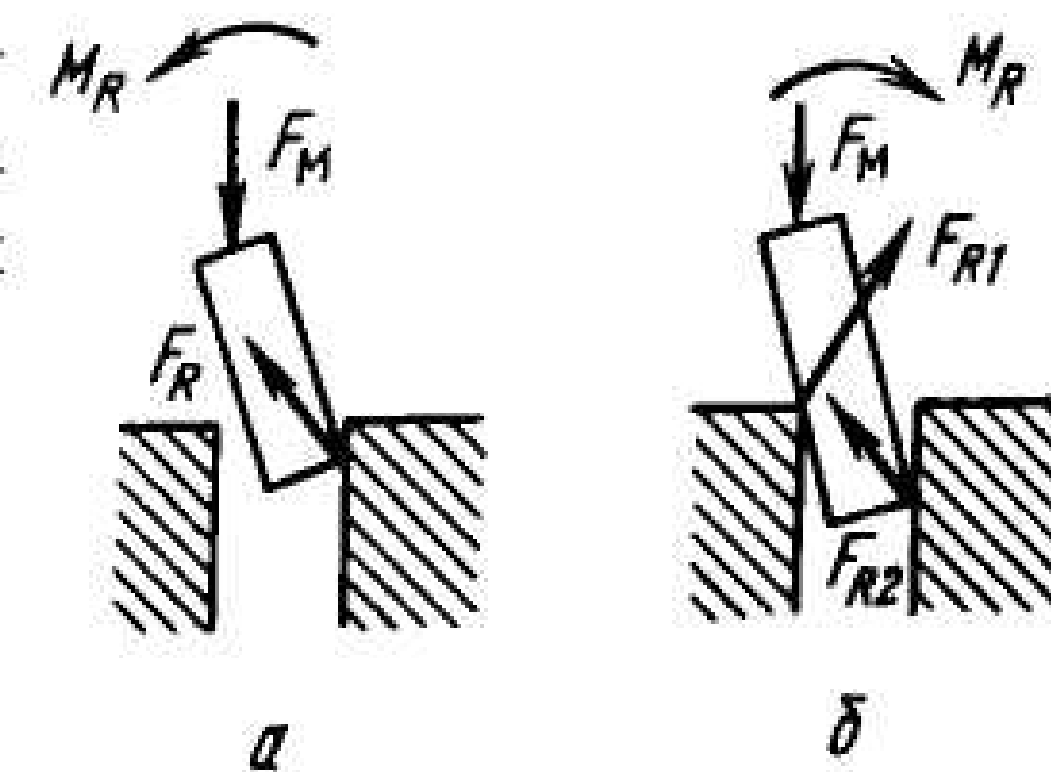


Рис. 8.3. Ситуации, возникающие при введении вала в отверстие: а — одноточечный контакт; б — двухточечный контакт

измерения в отдельные моменты времени не позволяют определить ситуацию однозначно. Однако, наблюдая их эволюцию во времени или проводя специальные тестовые движения, можно определить ситуацию. После этого принимают решение, соответствующее данной ситуации. Например, в случае, показанном на рис. 8.3, а, вырабатывается корректирующий момент, поворачивающий деталь относительно оси, проходящей через точку контакта. Поскольку для каждой сборки можно заранее предусмотреть все возможные характерные ситуации и необходимые коррекции, то заранее определяется и система правил — продукция вида $\Delta r = f_x(S)$, где S — ситуация, а Δr — необходимая коррекция положения и ориентации.

Вместо управления положением в данном случае, так же как и в предыдущем, может использоваться управление по скорости: $\dot{r} = f_v(S)$, что позволяет ускорить процедуру сборки, но значительно повышает требования к быстродействию вычислительной системы, обеспечивающей анализ ситуации, принятие решений и обмен информацией.

Таким образом, при автоматизации сборочных операций силовую обратную связь используют в логической системе принятия решений. При этом сама система управления становится дискретной во времени.

8.3.3. Проблема устойчивости при силовой обратной связи

Основным предположением, которое было сделано в п. 8.3.1, 8.3.2, являлось предположение об абсолютной жесткости (недеформируемости) датчиков сил и моментов. Это предположение, однако, можно считать справедливым лишь с известной степенью приближения, так как сама процедура измерения сил и моментов предполагает *податливость датчика*. Рассмотрим вначале этот вопрос для случая, когда датчики моментов расположены в степенях подвижности манипулятора (см. п. 8.3.1).

Если \tilde{q}_i — угол поворота вала механизма передачи движения (редуктора), а q_i — фактический угол поворота в соответствующем «суставе», то момент, измеряемый датчиком, пропорционален разности между этими углами, т.е. углу скручивания конструкции датчика:

$$\mu_{xi} = k_{xi}(\tilde{q}_i - q_i), \quad (8.59)$$

где k_{xi} — коэффициент жесткости датчика. Здесь мы пренебрегаем слагаемым, зависящим от скорости скручивания, т.е. коэффициентом вязкости, который также следует учитывать при построении более точных моделей.

Обратимся к уравнению привода (7.6) степени подвижности робота, рассмотренному в § 7.1. Теперь оно примет вид

$$N(p)\mu = M_\varepsilon(p)\varepsilon - M_q(p)\tilde{q}. \quad (8.60)$$

Если считать, что измерение обобщенных координат и их производных проводится на валу нагрузки (а не на валу редуктора), то здесь по-прежнему $\varepsilon = g - q$. Порядок системы дифференциальных уравнений относительно переменной \tilde{q} определяется видом полинома $M_q(p)$ (см. § 7.1) и зависит от подробности описания двигателя, учета потерь на деформацию вала нагрузки и от применяемых корректирующих устройств. К уравнению (8.60) необходимо добавить уравнение динамики механизма (8.1), записанное относительно переменных q , и уравнение (8.59), связывающее q и \tilde{q} : $\mu = K_\mu(\tilde{q} - q)$.

Обратим внимание на то, что порядок полученной системы дифференциальных уравнений выше, чем в том случае, когда датчик считался жестким, так как появилось N новых переменных \tilde{q} (если в каждой из степеней подвижности установлен датчик моментов).

Совокупность написанных уравнений характеризует сложную динамическую систему с упругим элементом, охваченным обратной связью. Для того чтобы убедиться в ее работоспособности, необходимо провести исследование устойчивости такой системы, что представляет в общем случае довольно сложную задачу. Однако можно утверждать, что и в общем случае введение упругости датчика отрицательно сказывается на качестве работы системы. Помимо возможной потери устойчивости, уменьшается полоса рабочих частот, в которых система может работать с приемлемой точностью. В том случае, когда датчики обратной связи установлены на валу редуктора и правая часть уравнения (8.60) зависит только от переменных q , проблема стабилизации системы облегчается, однако система приобретает статическую ошибку, обусловленную податливостью датчиков в соответствии с выражением (8.59). Динамические ошибки, обусловленные этим фактором, также теперь не полностью контролируемы и зависят от коэффициен-

тов жесткости и собственных параметров механической части конструкции манипулятора.

В том случае, когда датчик сил и моментов установлен в «запястье» манипулятора, проблемы, связанные с его податливостью, сохраняются. В этом случае датчик измеряет вектор

$$F_d = C_d(\tilde{r} - r), \quad (8.61)$$

где \tilde{r} — вектор, характеризующий положение и ориентацию нагрузки, закрепленной в схвате, в предположении об абсолютной жесткости датчика; r — вектор фактического (с учетом податливости) положения и ориентации нагрузки.

Матрица C_d характеризует жесткость датчика. Причем, диагональность этой матрицы обеспечивается за счет специальной конструкции, схемы размещения тензодатчиков на ее элементах, а также за счет способов обработки соответствующих электрических сигналов. Заметим, что более точная модель датчика должна учитывать также демпфирующие свойства его конструкции, т.е. иметь вид

$$F_d = C_d(\tilde{r} - r) - K_v(\dot{\tilde{r}} - \dot{r}), \quad (8.62)$$

где K_v — матрица коэффициентов вязкого трения.

В отличие от случая, когда датчики размещены в степенях подвижности манипулятора, в данном случае измерить вектор фактического положения и ориентации нагрузки r трудно. Для этого требуются независимые от движения системы измерительные средства, определяющие положение нагрузки как твердого тела, перемещающегося в неподвижной системе координат. Такие средства, включая лазерные дальномеры и средства технического зрения, используются в космической робототехнике, где упругие деформации конструкции манипулятора могут приводить к значительным ошибкам позиционирования. Если не рассматривать такой случай, то можно констатировать, что использование силовой обратной связи вида (8.58) приведет к изменению уравнений динамики системы, появлению статических ошибок и, возможно, ухудшению устойчивости системы.

Пример 8.1. Рассмотрим движение в плоскости конструкции (рис. 8.4), снабженной схватом, который связан с манипулятором упругим датчиком, расположенным в «запястье» [15]. Конструкция мани-

пулятора может перемещаться в горизонтальном направлении с помощью электродвигателя.

В данном случае измерения датчика положим равными

$$F_d = C_d(\tilde{x} - x), \quad (8.63)$$

где \tilde{x} — координата точки a' базовой конструкции, а x — координата точки a фактического перемещения схвата.

Сила F , развиваемая приводом, равна

$$F = -k_v \dot{x} + bg,$$

где g — управляющий сигнал.

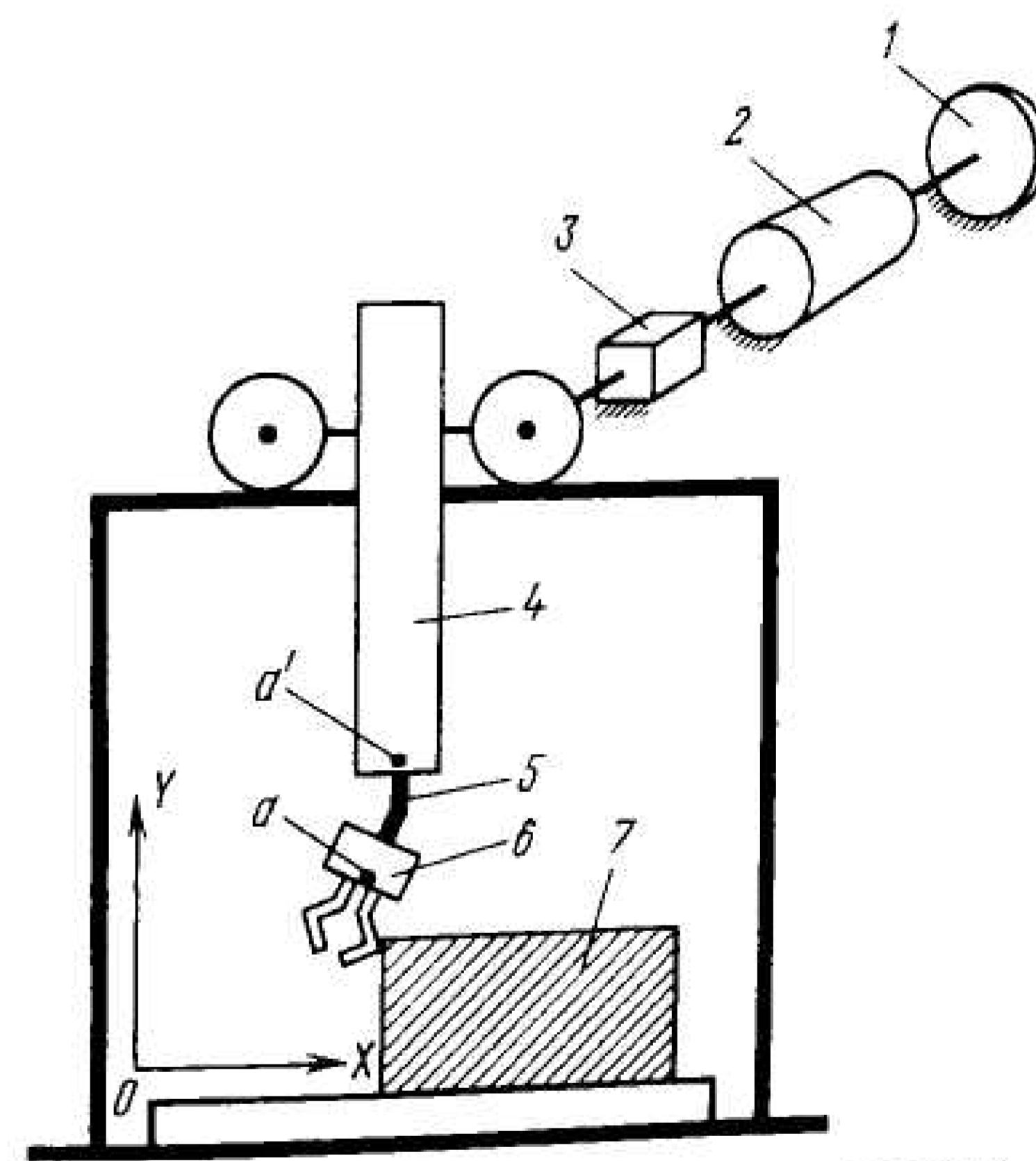


Рис. 8.4. Манипулятор с упругим датчиком: 1 — тахогенератор; 2 — двигатель; 3 — редуктор; 4 — штанга манипулятора; 5 — упругий датчик сил; 6 — схват; 7 — неподвижный предмет

Пусть задача состоит в том, чтобы развить заданное значение силы F_0 прижима схвата к объекту A рабочей сцены. Тогда управляющую силу F определим из соотношения

$$F = -k_1 \dot{\tilde{x}} - k_2(F_d - F_0), \quad (8.64)$$

в котором учтена демпфирующая обратная связь по скорости с коэффициентом k_1 . Ее можно реализовать с помощью тахогенератора,

установленного на валу двигателя и измеряющего его угловую скорость, пропорциональную $\dot{\tilde{x}}$. Обозначим x_0 — координату неподвижного объекта. Тогда, пренебрегая динамикой двигателя, можно записать следующее дифференциальное уравнение для рассматриваемой системы:

$$M \ddot{\tilde{x}} + F_d = F,$$

или

$$M \ddot{\tilde{x}} + C_d(\tilde{x} - x_0) + k_1 \dot{\tilde{x}} + k_2(C_d(\tilde{x} - x_0) - F_0) = 0, \quad (8.65)$$

где M — масса базовой конструкции манипулятора.

Характеристическое уравнение имеет вид

$$M \lambda^2 + k_1 \lambda + C_d(1 + k_2) = 0,$$

откуда следует, что система всегда асимптотически устойчива, а коэффициенты k_1 , k_2 влияют только на время переходного процесса и на его характер.

Уточним теперь описание датчика, положив в соответствии с (8.62)

$$F_d = C_d(\tilde{x} - x) - k_d(\dot{\tilde{x}} - \dot{x}). \quad (8.66)$$

В этом случае вместо (8.65) получим

$$M \ddot{\tilde{x}} + C_d(\tilde{x} - x_0) - k_d \dot{\tilde{x}} + k_1 \dot{\tilde{x}} + k_2[C_d(\tilde{x} - x_0) - k_d \dot{\tilde{x}} - F_0] = 0. \quad (8.67)$$

Теперь характеристическое уравнение запишем в виде

$$M \lambda^2 + \lambda(k_1 - k_d - k_2 k_d) + C_d(1 + k_2) = 0, \quad (8.68)$$

откуда следует, что система асимптотически устойчива только при условии

$$k_2 < \frac{k_1}{k_d} - 1, \quad (8.69)$$

т.е. коэффициент обратной связи по силе в выражении (8.64) не должен превышать некоторое критическое значение, которое положительно, если коэффициент демпфирования k_1 в (8.64) больше, чем собственный коэффициент демпфирования датчика k_d .

Рассмотрим теперь случай свободного движения, полагая по-прежнему F_d в виде (8.66). В этом случае к уравнению (8.65) необходимо добавить уравнение схвата с нагрузкой. Обозначая массу этого объекта m , получаем

$$m \ddot{x} - F_d = mg,$$

или

$$m \ddot{x} + C_d(x - \tilde{x}) - k_d(\dot{x} - \dot{\tilde{x}}) = mg. \quad (8.70)$$

Целью движения теперь является перемещение схвата в соответствии с законом, определенным движущей силой F_0 . Управляющую силу F в соответствии с соотношением (8.64) выберем в виде

$$F = -k_1 \dot{\tilde{x}} + k_2(F_0 - F_d).$$

Уравнение же базовой конструкции руки при этом запишем в виде, аналогичном (8.67):

$$M \ddot{\tilde{x}} + C_d(\tilde{x} - x) - k_d(\dot{\tilde{x}} - \dot{x}) + k_1 \dot{\tilde{x}} + k_2[C_d(\tilde{x} - x) - k_d(\dot{\tilde{x}} - \dot{x}) - F_0] = 0. \quad (8.71)$$

Обратим внимание на то, что порядок системы дифференциальных уравнений возрастает по сравнению с тем случаем, когда рассматривается абсолютно жесткая конструкция. Система однородных дифференциальных уравнений, соответствующих (8.70) и (8.71), теперь имеет вид

$$[mp^2 - k_d p + C_d]x + (k_d p - C_d)\tilde{x} = 0,$$

$$[k_d(1 - k_2)p - C_d(1 + k_2)]x + [Mp^2 + C_d(1 + k_2) + k_1 p - k_d(1 + k_2)p]\tilde{x} = 0,$$

а ее характеристическое уравнение —

$$\det \begin{pmatrix} m\lambda^2 - k_d \lambda + C_d & k_d \lambda - C_d \\ k_d(1 + k_2)\lambda - C_d(1 + k_2) & M\lambda^2 + [k_1 - k_d(1 + k_2)]\lambda + C_d(1 + k_2) \end{pmatrix} = 0,$$

т.е.

$$a_0 \lambda^4 + a_1 \lambda^3 + a_2 \lambda^2 + a_3 \lambda + a_4 = 0,$$

где

$$a_0 = Mm; \quad a_1 = -k_d M - k_d(1 + k_2)m + k_1 m;$$

$$a_2 = mC_d(1 + k_2) + C_d M - 2k_d^2(1 + k_2) - k_d k_1;$$

$$a_3 = k_1 C_d; \quad a_4 = C_d^2(1 - k_2) - C_d^2(1 - k_2) = 0.$$

Таким образом, характеристическое уравнение имеет вид

$$a_0 \lambda^3 + a_1 \lambda^2 + a_2 \lambda + a_3 = 0.$$

Устойчивость системы определяется вторым определителем Гурвица

$$\Delta_2 = a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0. \quad (8.72)$$

В зависимости от сочетания параметров это уравнение позволяет определить интервал значений k_1, k_2 , в котором обеспечивается устойчивость системы. Заметим, что если пренебречь вязким трением датчика и положить $k_d = 0$, то получим

$$a_0 = mM, \quad a_1 = k_1 M, \quad a_2 = C_d m(1 + k_2) + C_d M, \quad a_3 = k_1 C_d, \quad a_4 = 0,$$

следовательно, условие устойчивости примет вид

$$\Delta_2 = k_1 M(C_d m + C_d M) - k_1 C_d mM = C_d k_1 M^2 > 0; \quad (8.73)$$

это условие соблюдается, т.е. система всегда асимптотически устойчива.

Таким образом, вид условий, при которых происходит потеря устойчивости, зависит от уровня точности математической модели. Еще более точную модель можно получить, если учесть податливость манипулятора на участке от вала двигателя до упругого датчика. Этот случай подробно проанализирован в [15].

8.4. Динамическое планирование

В задачах планирования движения манипуляционного робота (см. гл. 4) мы пользовались только кинематическими соотношениями, связывающими координаты, скорости и ускорения схвата манипулятора с его обобщенными координатами и их производными. Таким образом, не принималась в расчет динамика манипулятора. Именно это и может быть причиной, требующей применения методов динамической коррекции, рассмотренных ранее в § 8.1 и 8.2. Другой путь, позволяющий управлять манипулятором с учетом его динамики, состоит в том, чтобы учесть его динамические свойства на стадии выбора самого движения. При этом используются различные подходы в зависимости от решаемой задачи. Если траектория движения определена условиями задачи, то, используя уравнения динамики, можно выбрать распределение скоростей и ускорений вдоль траектории с учетом энергетических ограничений исполнительной системы. В задачах терминального управления, когда заданы только условия на правом конце траектории движения, применяются методы оптимизации траектории с учетом динамики манипулятора. Весьма интересным, в частности, является подход, обеспечивающий движение манипулятора по собственным траекториям.

8.4.1. Планирование движения вдоль заданной траектории с учетом динамических ограничений

Рассмотрим задачу о планировании движения схвата манипулятора вдоль траектории, заданной в пространстве рабочей сцены. С учетом ориентации схвата, эта траектория задана как последовательность r_k , $k = 1, 2, \dots, M$, в шестимерном пространстве векторов положения и ориентации схвата. Будем считать, что заданы ограничения на моменты или силы μ_i , развиваемые двигателями степеней подвижности:

$$|\mu_i| \leq C_i, \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

Согласно уравнению (8.1), ускорения в степенях подвижности манипулятора равны

$$\ddot{q} = A^{-1}(q)B(q, \dot{q})\dot{q} + A^{-1}(q)B_v^T(q)G + A^{-1}(q)\mu. \quad (8.74)$$

Отсюда следует, что при построении интерполяционных полиномов (см. п. 3.4.2) необходимо, задав q и \dot{q} , учесть дополнительное ограничение на ускорение вида

$$|\ddot{q}_i| \leq |b_i(q, \dot{q})| + \sum_{j=1}^N |a_{ij}(q)|C_j = \ddot{q}_i^*. \quad (8.75)$$

где для кратности обозначены $a_{ij}(q)$ — компоненты матрицы $A^{-1}(q)$; $b_i(q, \dot{q})$ — составляющая, обусловленная остальными слагаемыми в правой части (8.74).

Целесообразно решать эту задачу методом последовательных приближений, выбрав в качестве первого приближения траекторию, полученную при кинематическом планировании. Для этой траектории решается обратная задача динамики, проверяются условия (8.75) и, если они не выполняются, проводится коррекция по ускорению. Ее можно обеспечить за счет изменения временных интервалов $\Delta t_k = t_{k+1} - t_k$, увеличивая их при необходимости уменьшения ускорения. Тем самым изменяется «расписание» движения по той же программной траектории.

Рассмотрим этот вопрос подробнее для случая, когда используется сплайн третьего порядка (см. гл. 4):

$$q(t) = P_j^3(t) = a_{j0} + a_{j1}t + a_{j2}t^2 + a_{j3}t^3, \quad t \in [t_j, t_{j+1}], \quad j = 1, 2, \dots, M.$$

Выберем этот сплайн в виде (см. [45, с. 226])

$$P_j^3(t) = \ddot{q}_{j-1} \frac{(t_j - t)^3}{6h_j} + \ddot{q}_j \frac{(t - t_{j-1})^3}{6h_j} + \left(q_{j-1} - \ddot{q}_{j-1} \frac{h_j^2}{6} \right) \frac{t_j - t}{h_j} + \left(q_j - \ddot{q}_j \frac{h_j^2}{6} \right) \frac{t - t_{j-1}}{h_j}, \quad (8.76)$$

где

$$h_j = \Delta t_j = t_j - t_{j-1}, \quad q_j = q(t_j), \quad j = 1, 2, \dots, M.$$

Полином (8.76) удовлетворяет условиям непрерывности

$$P_j^3(t_i) = P_{j+1}^3(t_i), \quad i = 1, 2, \dots, M-1,$$

$$P_j^3(t_0) = q_0, \quad P_j^3(t_i) = q_i, \quad i = 1, 2, \dots, M,$$

и условиям непрерывности ускорений

$$\ddot{P}_j^3(t_i) = \ddot{P}_{j+1}^3(t_i), \quad i = 1, 2, \dots, M-1,$$

причем

$$\ddot{P}_j^3(t) = \ddot{q}_{j-1} \frac{t_j - t}{h_j} + \ddot{q}_j \frac{t - t_{j-1}}{h_j}, \quad t \in [t_{j-1}, t_j],$$

а из условия непрерывности скоростей

$$\dot{P}_j^3(t_i) = \dot{P}_{j+1}^3(t_i), \quad i = 1, 2, \dots, M-1,$$

получим

$$\frac{h_j}{6} \ddot{q}_{j-1} + \frac{h_j - h_{j-1}}{3} \ddot{q}_j + \frac{h_{j+1}}{6} \ddot{q}_{j+1} = \frac{q_{j+1} - q_j}{h_{j+1}} - \frac{q_j - q_{j-1}}{h_j}, \quad j = 1, 2, \dots, M-1.$$

Вместе с граничными условиями (см. п. 4.1.2) эти соотношения позволяют получить необходимое количество уравнений для определения неизвестных \ddot{q}_j , $j = 1, 2, \dots, M$. Эти уравнения имеют вид

$$A\ddot{q} = d, \quad (8.77)$$

где

$$\begin{aligned} \ddot{q} &= [\ddot{q}_0 \quad \ddot{q}_1 \quad \dots \quad \ddot{q}_M], \quad d = [d_0 \quad d_1 \quad \dots \quad d_M], \\ d_0 &= 6(q_1 - q_0)/h_1^2, \quad d_M = 6(q_{M-1} - q_M)/h_M^2, \\ d_j &= 6[(q_{j+1} - q_j)/h_{j+1} - (q_j - q_{j-1})/h_j]/(h_{j+1} - h_j), \\ & \quad j = 1, 2, \dots, M-1; \end{aligned}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & \lambda_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mu_1 & 2 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \mu_{M-1} & 2 & \lambda_{M-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu_M & 2 \end{pmatrix},$$

$$\lambda_0 = \mu_M = 1, \quad \mu_j = h_j/(h_j - h_{j+1}), \quad \lambda_j = 1 - \mu_j.$$

Проверка ограничений (8.75) и их учет может быть выполнен последовательно для уравнений этой системы; для первого уравнения

$$2\ddot{q}_0 + \lambda_0 \ddot{q}_1 = d_0, \quad d_0 = 6(q_1 - q_0)/h_1^2.$$

В частности, при $\ddot{q}_0 = 0$ ограничение вида (8.75) $|\ddot{q}_1| \leq \ddot{q}_1^*$ можно обеспечить за счет d_0 :

$$\left| \frac{d_0}{\lambda_0} \right| \leq \ddot{q}_1^*$$

или

$$h_1^2 = (t_1 - t_0)^2 \geq \frac{6|q_1 - q_0|}{\lambda_0 \ddot{q}_1^*}; \quad (8.78)$$

таким образом, если ограничение (8.75) не удовлетворяется, то увеличивается t_1 . Далее, для второго уравнения системы (8.77)

$$\mu_1 \ddot{q}_0 + 2\ddot{q}_1 + \lambda \ddot{q}_2 = d_1;$$

поскольку ограничения на \ddot{q}_1 уже выполнены и \ddot{q}_0 мы положили равным нулю, то нужно выполнить условие вида

$$|\ddot{q}_2| \leq \ddot{q}_2^*,$$

т.е.

$$\left| \frac{d_1 - 2\ddot{q}_1}{\lambda_1} \right| \leq \ddot{q}_2^*,$$

отсюда

$$\lambda_1 = \frac{h_2}{h_1 + h_2} \geq \left| \frac{6(q_0 - q_1)}{h_1^2} - 2\ddot{q}_1 \right| \frac{1}{\ddot{q}_2^*}. \quad (8.79)$$

Из последнего соотношения видно, что оно может быть выполнено за счет выбора h_1 , h_2 , поэтому, если увеличить только интервал h_2 ,

окажется недостаточным, то нужно вернуться на предыдущий шаг и увеличить интервал h , так, чтобы неравенства (8.78) и (8.79) удовлетворялись одновременно.

Продолжая эту процедуру, можно в конечном счете скорректировать и все остальные моменты времени t_i , определяющие «расписание» движения схвата, таким образом, чтобы динамические ограничения (8.75) были выполнены на всей траектории.

Аналогично может быть решена задача динамического планирования в том случае, когда заданы ограничения по мгновенной мощности, развиваемой каждым приводом:

$$|\mu_i \dot{q}_i| \leq C_i, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (8.80)$$

или же по суммарной мгновенной мощности исполнительной системы

$$|\mu^T \dot{q}| \leq C^0. \quad (8.81)$$

Последнее условие может быть записано с учетом (8.1) в виде соотношения, которому должны удовлетворять скорости и ускорения обобщенных координат:

$$|\ddot{q}^T A^T(q) \dot{q} - \dot{q}^T B^T(q, \dot{q}) \dot{q} - G^T B_v(q) \dot{q}| \leq C^0. \quad (8.82)$$

При выбранных q, \dot{q} это соотношение представляет собой линейное ограничение по ускорению вида

$$\left| \sum_{j=1}^N a_j \ddot{q}_j - b \right| \leq C^0,$$

которое должно быть выполнено во всех точках планируемой траектории. Как и в предыдущем случае, это ограничение можно удовлетворить за счет изменения временных интервалов движения схвата. Однако процедура их определения в данном случае более сложна.

8.4.2. Выбор мощности силовых агрегатов

Ранее в п.8.4.1 мы определили движение, которое можно осуществить при заданном ограничении мощности силовых агрегатов. При проектировании манипуляционных систем возникает и обратная задача — определение необходимой мощности силовых агрегатов для движения по заданной траектории.

В частности, при использовании двигателей постоянного тока потребляемую мощность можно вычислить следующим образом [2]:

$$P_i = \frac{R_{*i}}{k_{*i}^2 j_i \eta_i} \mu_i^2 + \dot{q}_i \mu_i \frac{1}{\eta_i},$$

где R_{*i} — сопротивление обмоток якорной цепи i -го двигателя; k_{*i} — его электромеханическая постоянная; j_i — передаточное число редуктора; η_i — КПД передачи.

Для высокооборотных двигателей с большим передаточным числом редуктора приближенно можно принять

$$P_i \approx \dot{q}_i \mu_i \frac{1}{\eta_i}. \quad (8.83)$$

Если теперь известна траектория движения, т.е. заданы $q_i(t), \dot{q}_i(t), \ddot{q}_i(t)$, то правую часть (8.83) нетрудно вычислить, используя уравнения динамики манипулятора. Пренебрегая динамикой двигателя и полагая $\eta_i = 1$ для простоты описания (истинное значение η_i можно легко учесть в наших выкладках), получим из (8.1) суммарную мощность

$$P \approx \dot{q}^T (A(q) \ddot{q} - B^T(q, \dot{q}) \dot{q} - B_v^T(q) G). \quad (8.84)$$

Для выбора мощности необходимо спланировать репрезентативную траекторию, которая определяется условиями технологического процесса и характеризуется наибольшими значениями скоростей и ускорений. Таких траекторий может быть несколько для характерных технологических процессов, предполагающих использование данного манипулятора.

По формуле (8.83) нетрудно определить требуемую мощность каждого из силовых агрегатов. Если эта мощность окажется больше той, которой располагает проектировщик, то, задаваясь ограничениями по мощности, он может, выполнив процедуру, описанную в п. 8.4.1, определить реально достижимое движение и сделать вывод о его приемлемости для заданного технологического процесса. Таким образом, процедура выбора силовых агрегатов имеет рекуррентный характер.

При выборе двигателей постоянного тока помимо мощности можно определить и требования к механической характеристике двигателя, связывающей развиваемые момент и скорость. Для репрезентативных траекторий с этой целью могут быть рассчитаны графики движения в координатах μ_i, \dot{q}_i ($i = 1, \dots, N$), причем моменты μ_i , как и в формуле (8.84), определяются из уравнения динамики (8.1). Механическая ха-

характеристика двигателя должна «охватывать» график (μ, \dot{q}) , полученный для всех репрезентативных траекторий.

Заметим, что такой метод выбора силовых агрегатов вначале был предложен для систем копирующего управления. При этом репрезентативные траектории получались в результате записи движения руки человека (в ее суставах) при выполнении характерных рабочих операций. Позже он использовался при проектировании полуавтоматических систем. В этом случае оператор задает движение нагрузки, а движения в «суставах» манипулятора (q, \dot{q}, \ddot{q}) рассчитываются по формулам, полученным ранее в гл. 3 (см. [18]).

Существуют специальные пакеты программ, позволяющие автоматизировать процедуру выбора силовых агрегатов. Они могут быть связаны с базой данных о характеристиках стандартных двигателей и механизмов передачи движения, что позволяет в результате выполнения процедуры сразу указать тип и параметры выбранного силового агрегата.

Обратим внимание на то, что уравнение (8.1), которым мы пользовались выше, записано для случая свободного движения схвата по траектории. В том случае, когда движение связано с преодолением внешних сил, в правой части этого уравнения появляется слагаемое вида

$$\mu_{\text{в}} = B^T(q)F_{\text{в}},$$

определяющее составляющую момента μ , обусловленную внешними силами и моментами. Если закон изменения этих сил обусловлен технологическим процессом, как, например, при механической обработке поверхности, то вся описанная процедура сохраняется с добавлением в правой части условия (8.84) слагаемого μ . Однако в ряде случаев внешние силы и моменты не могут быть определены заранее, как, например, при сборке. В таких случаях не остается иного способа, как моделирование подобных операций с выбранными законами управления и определением в процессе моделирования как законов изменения обобщенных координат $q_i(t)$, так и моментов внешних сил. Заметим, что моделирование манипуляционных систем при наличии связей, наложенных на движение механизма, обладает известной спецификой, о которой мы говорили в § 6.2.

Последнее замечание о выборе силовых агрегатов касается динамической коррекции, в том числе с использованием силовой обратной

связи (см. п. 8.3.1 и 8.3.2). В этом случае моменты и силы, развиваемые приводами, включают в себя управляющую μ_0 и корректирующую $\mu_{\text{д}}$ составляющие:

$$\mu = \mu_0 + \mu_{\text{д}}.$$

Первая обеспечивает необходимое движение по траектории, а вторая — компенсацию влияния динамики механизма. Так, в случае, рассмотренном в п. 8.3.2, целесообразно определить вначале мощность, необходимую для перемещения полезной нагрузки (вместе со схватом):

$$P_0 = \dot{r}^T F_0,$$

и затем определить соответствующие значения

$$\mu_{i_0} \dot{q}_i = P_{i_0}.$$

Значения $\mu_{\text{д}}$ теперь можно определить из уравнения динамики кинематической цепи манипулятора без нагрузки (8.57). Неравенства для ограничений силовых агрегатов по мощности примут вид

$$|\dot{q}^T \mu| \leq |\dot{r}^T (J_v^{-1})^T J_v^T F_0| + |\dot{q}^T \mu_{\text{д}}| \leq P^*, \quad (8.85)$$

что позволяет оценить по отдельности затраты мощности на перемещение полезной нагрузки и самого манипулятора. Отношение первого слагаемого ко второму характеризует энергетическую эффективность манипуляционной конструкции. Она может быть намного выше для манипуляторов космического базирования, поскольку отпадает необходимость в компенсации статических сил тяжести. Отметим также, что энергетическая эффективность руки человека по-прежнему намного превышает этот параметр для лучших манипуляционных конструкций.

8.4.3. Планирование движения манипулятора по собственной траектории

Наиболее экономичными по энергозатратам являются движения манипулятора по собственным траекториям, т.е. собственные движения.

Собственным движением механизма называют его движение под действием сил инерции и равенстве нулю управляющих сил и моментов. Последние используются для создания импульса в начальный момент времени, обеспечивающего некоторую начальную скорость звеньям манипулятора. В случае механизма с относительно простой

кинематической схемой эти скорости удастся рассчитать таким образом, чтобы схват манипулятора по собственной траектории вышел в заданное положение. Применение такого способа целесообразно для роботов циклового типа, предназначенных для многократно повторяющихся движений. Заметим, что такой способ можно эффективно использовать и для управления механическими конечностями шагающих роботов, также совершающими циклические движения. В тех случаях, когда экономия энергозатрат оправдывает вычислительные затраты на планирование каждой отдельной операции (например, в космической робототехнике), этот метод может быть использован и для управления крупными манипуляторами, перемещающими большие инерционные нагрузки. Метод был разработан в середине 80-х годов в Институте машиноведения АН СССР [57; 58].

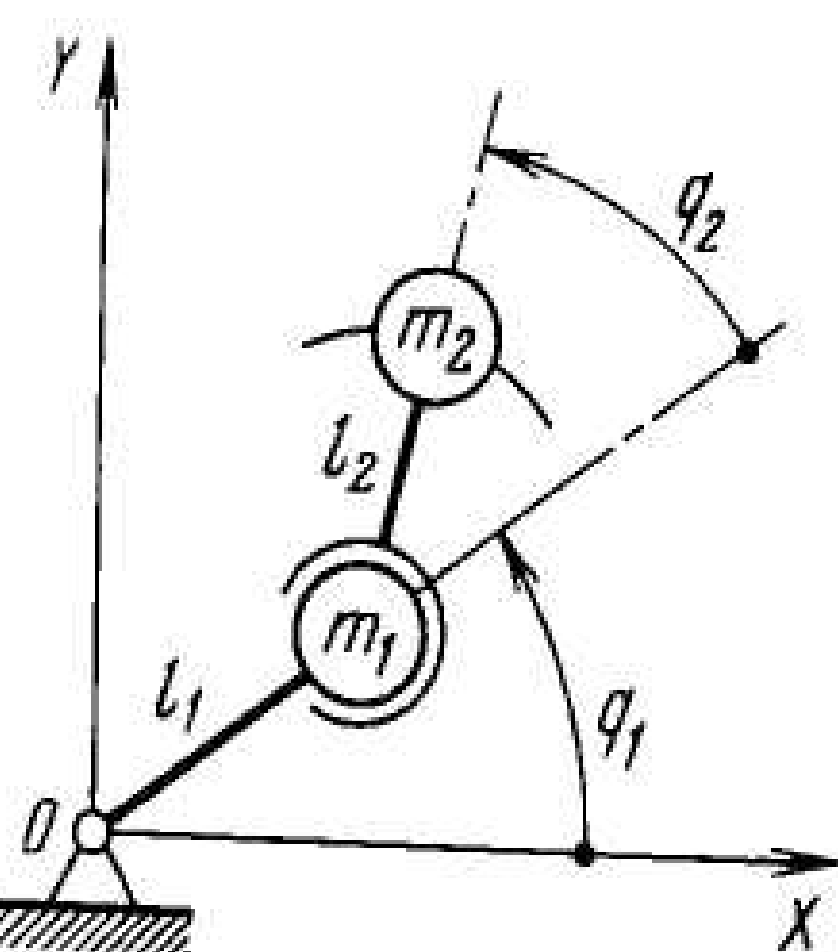


Рис. 8.5. Манипулятор, имеющий схему двойного плоского маятника

Рассмотрим метод планирования собственных движений на примере манипулятора, имеющего кинематическую схему, приведенную на рис. 8.5. Это двухзвенник, причем массы звеньев сосредоточены на концах жестких стержней. Таковую конструкцию называют двойным плоским маятником.

Будем считать, что манипулятор снабжен устройствами статического уравновешивания. Поэтому в уравнении Лагранжа второго рода (§ 6.1) можно положить $U = 0$; кроме того, $Q = 0$, так как рассматривается собственное движение, и мы получим

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_1} \right) - \frac{\partial K}{\partial q_1} &= 0, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_2} \right) - \frac{\partial K}{\partial q_2} &= 0. \end{aligned} \quad (8.86)$$

Кинетическая энергия K представляет собой квадратичную форму относительно скоростей обобщенных координат:

$$K = \frac{1}{2} (a_{11} \dot{q}_1^2 + 2a_{12} \dot{q}_1 \dot{q}_2 + a_{22} \dot{q}_2^2). \quad (8.87)$$

Коэффициенты a_{ij} нетрудно определить (см. § 6.1). Они равны в данном случае

$$\begin{aligned} a_{11} &= m_1 l_1^2 + m_2 (l_1^2 + l_2^2 + 2l_1 l_2 \cos q_2), \\ a_{12} &= m_2 (l_2^2 + l_1 l_2 \cos q_2), \\ a_{22} &= m_2 l_2^2. \end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что эти коэффициенты не зависят от q_1 . Поэтому $\frac{\partial K}{\partial q_1} = 0$ и из первого уравнения системы (8.86) мы получим

$$\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_1} = a_{11} \dot{q}_1 + a_{12} \dot{q}_2 = \text{const} = \alpha. \quad (8.88)$$

Физический смысл параметра α — это кинетический момент механизма относительно оси O подвеса манипулятора.

Второе уравнение (8.86) может быть использовано для получения уравнения движения. Для его анализа нужно также принять во внимание, что в свободном движении

$$K = \frac{1}{2} (a_{11} \dot{q}_1^2 + 2a_{12} \dot{q}_1 \dot{q}_2 + a_{22} \dot{q}_2^2) = \text{const} = h. \quad (8.89)$$

Последнее уравнение в плоскости (\dot{q}_1, \dot{q}_2) определяет эллипс, показанный на рис. 8.6. При $\dot{q}_1 = 0$ получим

$$\dot{q}_2 = \pm \sqrt{\frac{2h}{a_{22}}} = \pm \sqrt{\frac{2h}{m_2 l_2^2}},$$

а при $\dot{q}_2 = 0$

$$\dot{q}_1 = \pm \sqrt{\frac{2h}{a_{11}}}.$$

Последняя величина зависит от q_2 , играющего роль параметра. При его изменении меняются также размеры главных полуосей эллипса a , b и углы их наклона.

Производная $\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_1}$ принимает максимальное значение в точке 4, а минимальное — в точке 3; эти значения равны

$$\alpha_{\max} = \sqrt{2ha_{11}}, \quad \alpha_{\min} = -\sqrt{2ha_{11}}.$$

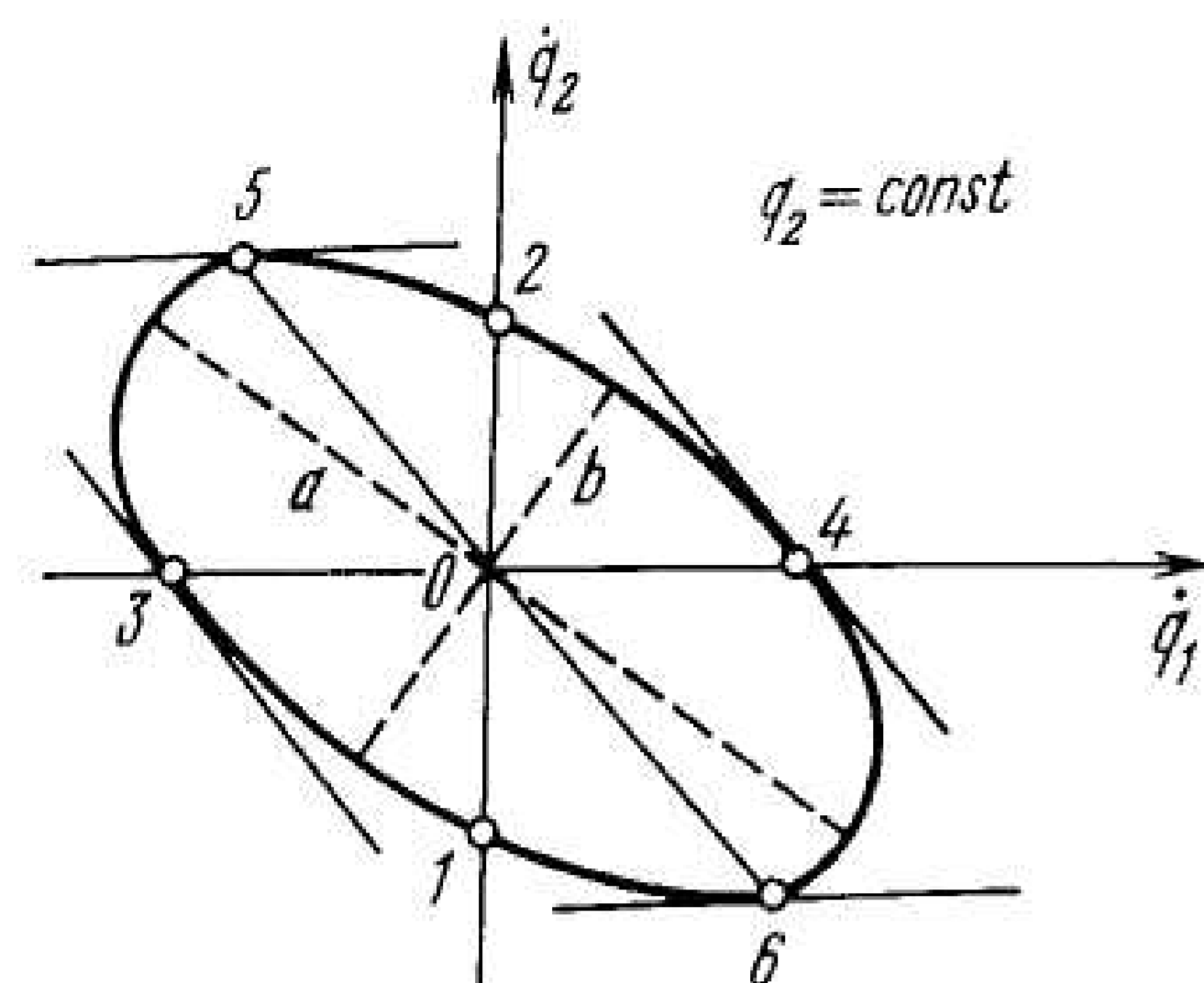


Рис. 8.6. Эллипс скоростей обобщенных координат, соответствующий постоянному значению кинетической энергии

В точках 5 и 6, координаты которых нетрудно определить, $\alpha = 0$.

При свободном движении изображающая точка на плоскости \dot{q}_1, \dot{q}_2 должна принадлежать семейству эллипсов (меняющихся в зависимости от текущего значения q_2). С другой стороны, в силу условия (8.88), эта точка должна совпадать в каждый момент времени с теми точками эллипсов, которые соответствуют одному и тому же значению кинетического момента. Последнее определяется при задании начальных условий $\dot{q}_{10}, q_{20}, \dot{q}_{20}$; теперь условие (8.88) представляет собой еще одно ограничение, связывающее q_2 с текущими значениями \dot{q}_1, \dot{q}_2 .

Нетрудно получить параметрические уравнения траектории изображающей точки в форме [58]

$$\dot{q}_1(q_2) = \frac{\alpha}{a_{11}} \mp \frac{a_{12}}{a_{11}} \sqrt{\frac{2a_{11}h - \alpha^2}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}}, \quad (8.90)$$

$$\dot{q}_2(q_2) = \pm \sqrt{\frac{2a_{11}h - \alpha^2}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}}, \quad (8.91)$$

причем знак перед корнем соответствует знаку q_2 .

Теперь для приращения $\Delta q_1 = q_1(T) - q_1(t_0)$ может быть написан следующий интеграл:

$$\Delta q_1 = \int_{q_2(t_0)}^{q_2(T)} \frac{\dot{q}_1(q_2)}{\dot{q}_2(q_2)} dq_2. \quad (8.92)$$

Разбивая пределы интегрирования на интервалы, в каждом из которых \dot{q}_2 сохраняет постоянный знак, можно определить этот интеграл, используя выражения (8.90) и (8.91). Левая часть выражения (8.92), т.е. Δq_1 задана условиями задачи. Известно также и $\Delta q_2 = q_2(T) - q_2(t_0)$, относительно этой величины предположим, что $|\Delta q_2| \leq 2\pi$.

Из соотношения (8.92) можно с использованием численных методов найти α . В соответствии с (8.90) и (8.91) по вычисленным значениям определяют начальные значения скоростей \dot{q}_{10} и \dot{q}_{20} , траекторию движения в пространстве обобщенных координат, а также время движения. Последнюю величину можно вычислить по формуле

$$\Delta t = \int_{q_{20}}^{q_{2T}} \frac{dq_2}{\dot{q}_0}. \quad (8.93)$$

На рис. 8.7 показаны траектории собственного движения рассматриваемого манипулятора при значениях параметров $l_1 = 1,1; l_2 = 1, m_1 = m_2 = 1$ для различных граничных условий [58]. На рис. 8.7, а показано перемещение, в результате которого конфигурация механизма сохраняется, но с поворотом относительно базовой оси, т.е. $q_{20} = q_{2T} = 1$. На рис. 8.7, б рассмотрен случай, когда $q_{20} = 1,57, q_{2T} = 1; q_{10} = 0, q_{1T} = -1$. На рис. 8.7, в показано движение, которое приводит к зеркальному изменению положения манипулятора относительно оси, соединяющей точку подвеса маятника и центра тяжести второго звена.

Полученные траектории существенно отличаются от программных траекторий, найденных традиционными методами, например при выборе а) $\dot{q}_1 = \text{const}, \dot{q}_2 = \text{const}$ или б) $\dot{x}_1 = \text{const}, \dot{x}_2 = \text{const}$, т.е. при прямолинейном движении схвата в пространстве сцены. В [58] показано, что движение по собственной траектории на рис. 8.7; б экономичнее в 1,23 раза, чем движение по программной траектории в случае «а» и в 4 раза, чем в случае «б».

Рассматриваемый метод в дальнейшем был усовершенствован и распространен на механизмы с тремя и более степенями подвижности [58]. Он позволил создать семейство промышленных роботов, обеспечивающих существенную экономию энергозатрат. Аналогичный подход был положен и в основу разработки исполнительных механизмов с динамическим уравниванием звеньев.

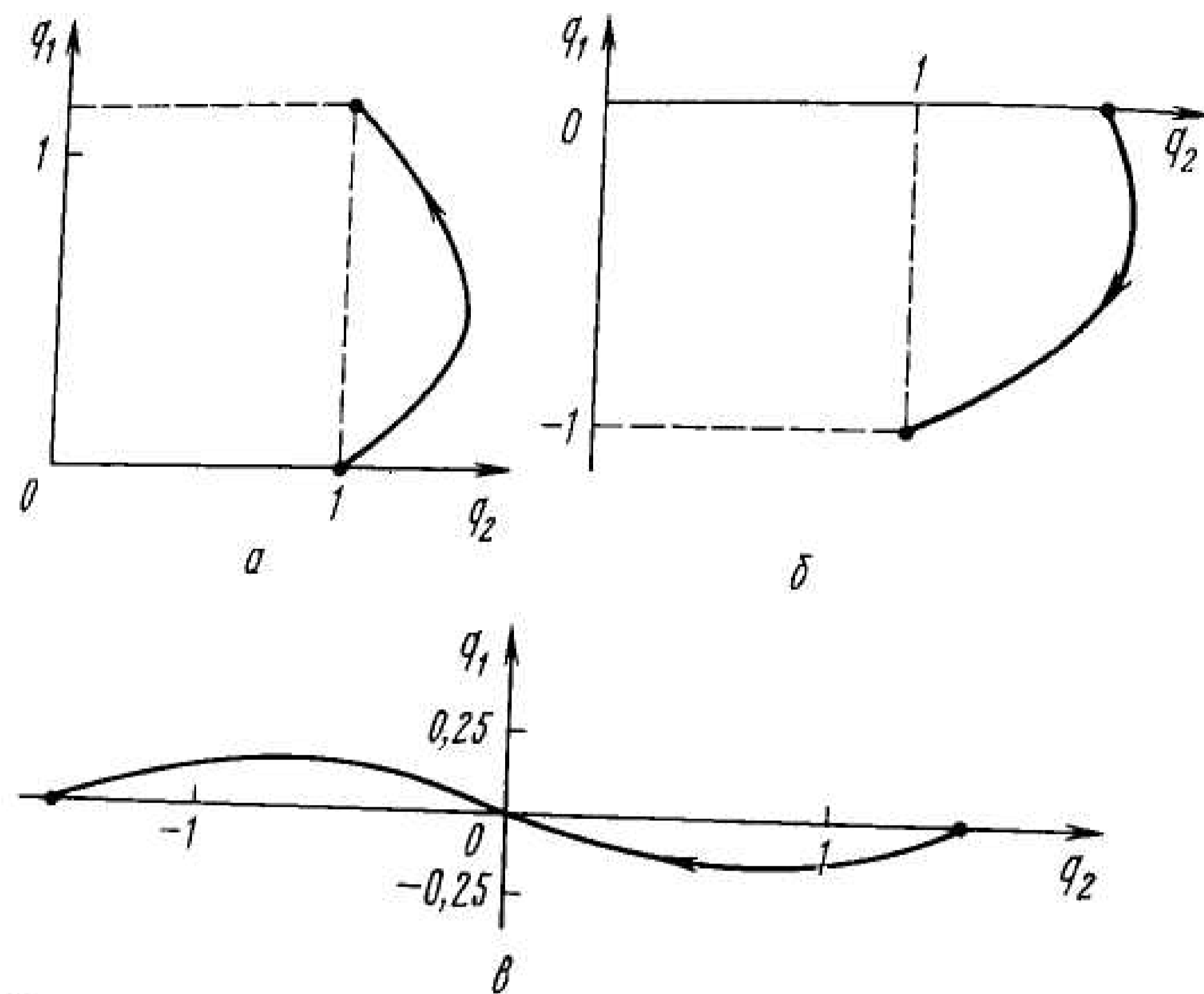


Рис. 8.7. Траектории собственного движения манипулятора на плоскости обобщенных координат: а — $q_{20} = q_{2T} = 1$; б — $q_{20} = 1.57$; $q_{2T} = 1$; $q_{10} = 0$; $q_{1T} = -1$; в — $q_{20} = -q_{2T}$

Контрольные вопросы и задания

1. Сформулируйте обратную задачу динамики для манипуляционного механизма.
2. Почему компенсация динамики манипулятора в форме (8.2) или (8.4) в общем случае неэффективна? От чего зависят возникающие ошибки?
3. При каких условиях можно эффективно использовать линейную динамическую коррекцию в форме (8.6)?
4. Какова процедура определения управляющих воздействий в системе приводов исполнительской системы, замкнутых по положению, если найдено решение обратной задачи динамики для манипуляционного механизма?
5. Поясните термин «обобщенный моментный регулятор» (см. п. 8.1.4). Каковы преимущества и недостатки такого регулятора?
6. В чем состоит суть метода декомпозиции. Когда, на Ваш взгляд, применение этого метода будет наиболее эффективным и не потребует выполнения слишком сложных вычислительных процедур?
7. Как определяются сигналы динамической коррекции при использовании метода декомпозиции? При каких условиях можно пренебречь динамикой приводов манипулятора?

8. Какие технические средства реализации силовой обратной связи в системе управления манипулятором Вам известны?
9. В чем основное преимущество динамической коррекции с помощью силовой обратной связи? Какие вычисления следует осуществлять в реальном времени при коррекции с использованием датчиков силовой обратной связи в соединениях манипулятора?
10. В чем преимущество силовой обратной связи по силам и моментам, действующим на схват? Какие вычисления в реальном времени следует выполнять в этом случае?
11. Опишите основные ситуации, возможные при сборке вал — втулка (без фасок) и сформулируйте правило коррекции движения вала относительно втулки.
12. Почему введение силовой обратной связи обычно приводит к ухудшению устойчивости исполнительской системы манипулятора? Рассмотрите этот вопрос в случае силовой обратной связи на схвате.
13. В чем состоит процедура планирования движения с учетом динамики манипулятора (динамического планирования)? В каких случаях эту процедуру целесообразно применять? Как в реальном времени выполнить коррекцию движения манипулятора с учетом его динамики на этапе планирования движений?
14. Как определить необходимую мощность силовых агрегатов манипулятора, используя решение обратной задачи динамики?
15. Как определить энергетическую эффективность манипулятора?

задание декомпозируется на подзадания, каждое из которых должно быть выполнено некоторой подсистемой. Так, например, если усложнить предыдущее задание следующим образом: «Перенести деталь P из точки A в точку B , проверить правильность ее установки в точке B и, если деталь установлена правильно, запрессовать», то по крайней мере три технические системы должны участвовать в его выполнении: робот — операция переноса, система технического зрения (СТЗ) — анализ сцены, пресс — операция запрессовки. Действия всех трех систем должны быть скоординированы: после окончания транспортной операции робот может исполнять другое задание, СТЗ начинает операцию контроля только после того, как манипулятор положит деталь в точку B и покинет поле зрения камеры, команда на запрессовку должна быть подана только после того, как СТЗ подтвердила правильность положения детали. Кроме того, может возникнуть множество ошибок, связанных, например, с неправильной установкой детали (и тогда робот должен попытаться переустановить ее), а также возникших в процессе переноса и т.д. Дадим теперь более точное определение системам, управлению которыми посвящена настоящая работа.

Пусть задание T представлено множеством подзаданий t_i :

$$T = \{t_1, t_2, \dots, t_m\}. \quad (9.1)$$

Введем отношение следования F на множестве T , тогда $t_i F t_j$ означает, что задание t_j может быть выполнено только при условии выполнения t_i . Если такая структуризация задания T проведена, то можно построить описывающий T ориентированный граф

$$G = (T, A), \quad (9.2)$$

где $T = \{t_i\}$ — множество вершин графа G ; $A = \{a_i\} \in T \times T$ — множество направленных дуг, при этом дуга $a \in A$ соединяет t_i с t_j тогда и только тогда, когда $t_i F t_j$. Такое разбиение задания широко используют в методах теории искусственного интеллекта [65]. Аналогичные подходы применяют и при построении моделей в задаче оперативного управления ГПС (см. [16]).

Пусть система S состоит из подсистем S_i (далее называемых локальными системами, или терминалами):

$$S = \{S_1, S_2, \dots, S_N\}, \quad (9.3)$$

9. ЛОГИЧЕСКОЕ УПРАВЛЕНИЕ СЛОЖНОЙ РОБОТОТЕХНИЧЕСКОЙ СИСТЕМОЙ

В главе 9 введено понятие *сложной системы* и, в частности, *сложной робототехнической системы* (СРС) как множества взаимодействующих подсистем, выполняющих общее задание. Кроме того, принято допущение, что подсистемы могут быть описаны как конечные автоматы. Это, безусловно, сужает область применимости рассматриваемого подхода, однако на практике для большей части приложений это допущение удовлетворяется.

Рассмотрено понятие управляющей структуры как сети специальным образом сконструированных конечных автоматов. Эта структура позволяет обеспечить управление подсистемами, входящими в состав СРС. В действительности описанный в данной главе метод управления обеспечивает координацию работы всех подсистем, т.е. представляет собой нижний уровень управления СРС. Открытым остался вопрос синтеза управляющей структуры, поскольку задачи автоматической генерации управляющих структур выходят за рамки книги.

9.1. Понятие сложной системы

Прежде чем перейти к проблеме управления, определим, что мы понимаем под СРС.

В отношении любой технической системы можно сформулировать множество заданий, которые она может выполнить. Например, задание «Перенести деталь P из точки A в точку B » может быть выполнено одним роботом (либо конвейером) и не требует участия в нем дополнительных систем. Однако можно привести примеры заданий, в выполнении которых должно участвовать несколько систем. В этом случае

при этом $T_i \subset T^*$ — задание, выполняемое системой S_i . Тогда систему

$$CS = (S, T) \quad (9.4)$$

будем называть T -сложной системой (далее — сложной системой), если выполнены следующие условия:

$$C1: \bigcup_{i=1}^N T_i = T; \quad (9.5)$$

$$C2: G — \text{связный граф}. \quad (9.6)$$

Условия C1, C2 можно интерпретировать следующим образом.

C1: сложная система представляет собой набор подсистем, которые в состоянии выполнить задание T .

C2: действия всех подсистем, входящих в состав сложной системы, должны координироваться в процессе выполнения задания. Координация в данном случае — обмен данными (или командами) между подсистемами.

Если одна из подсистем $S_i \in S$ является роботом, то такую сложную систему будем называть СРС.

Сделаем теперь несколько замечаний по поводу приведенного определения сложной системы.

1. Сложная система рассматривается только совместно с заданием, которое система исполняет. Следовательно, один и тот же набор технических систем может быть либо сложной системой (в смысле введенного определения), либо нет — в зависимости от выполняемого системой задания и способа его декомпозиции по подсистемам.

2. Введенное определение нельзя считать вполне формальным, поскольку мы апеллируем такими интуитивными понятиями как «задание» и «следование». Вообще говоря, понятие СРС можно ввести и с помощью сетей Петри, интерпретируя позиции как выполнение подзаданий (или как ресурс), а обрамляющие их переходы — как начало и конец исполнения соответствующих подзаданий, однако, по мнению авторов, такое определение избыточное.

3. Данное определение является рекурсивным в том смысле, что сложная система может быть компонентой другой сложной системы, что позволяет единообразно использовать описанный далее способ управления иерархически построенными сложными системами.

Приведем несколько примеров использования СРС, сделав следующую оговорку. Поскольку отношение следования F является тран-

зитивным, т.е. из aFb , bFc следует aFc , соответствующий граф, содержащий дуги ab и bc , должен содержать и дугу ac . Мы, однако, не будем изображать дугу ac , чтобы не загромождать рисунки избыточной информацией.

Пример 9.1. Пусть задание T состоит из трех подзаданий $T = \{t_1, t_2, t_3\}$ (рис. 9.1, а), где t_1 означает собрать узел A ; t_2 — узел B ; t_3 — деталь $C = A + B$. Система S состоит из двух подсистем $S = \{R_1, R_2\}$ (рис. 9.1, б), где задания T_1 и T_2 для роботов R_1 и R_2 имеют вид

$$T_1 = \{t_1, t_3\}, \quad T_2 = \{t_2, t_3\},$$

т.е. роботу R_1 предписано собрать узел A и осуществить окончательную сборку C , а роботу R_2 — узлы B и C . Тогда описанная система является T -сложной, поскольку условия (9.5), (9.6) выполнены. Однако, если дополнить эту систему роботами R_3, R_4 (рис. 9.2, б), выполняющими задания t_4-t_6 (рис. 9.2, а), то полученную систему нельзя считать сложной, поскольку граф задания не является связным (несмотря на то, что каждая из двух подсистем является сложной).

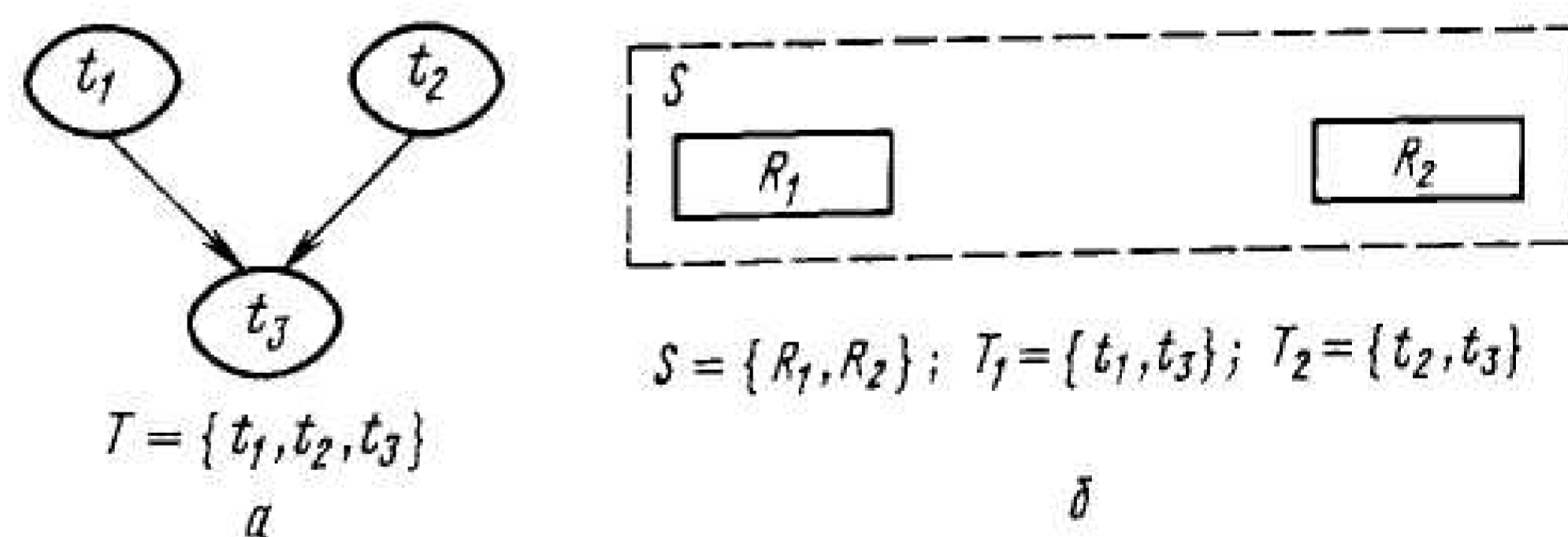


Рис. 9.1. Пример сложной системы: а — граф задания T ; б — сложная система, выполняющая задание T

Пример 9.2. Роботизированный сборочный модуль состоит из роботов $R_0, R_1, \dots, R_i, \dots, R_N, R_{N+1}$ и конвейера C . Роботы R_1, \dots, R_N выполняют сборочные операции; роботы R_0 и R_{N+1} служат для загрузки и выгрузки соответственно (рис. 9.3, а). После того, как все роботы завершили выполнение своего задания, конвейер C делает один шаг. Если i -й робот завершил сборочную операцию с ошибкой, то на следующем шаге робот $i+1$ пропускает этот узел с тем, чтобы бракованный узел, оказавшись в конце линии, был бы помещен разгрузочным

9.2. Конечный автомат как модель объекта управления

Далее нам понадобится понятие конечного автомата, поэтому сформулируем основные определения теории автоматов [3; 4; 13; 41].

Абстрактным конечным автоматом A называют пятерку:

$$A = (U, X, Z, f, h), \quad (9.7)$$

где $U = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$ — конечный входной алфавит; $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ — конечное множество состояний; $Z = \{z_1, z_2, \dots, z_k\}$ — конечный выходной алфавит; $f: X \times U \rightarrow X$ — одношаговая функция перехода; $h: X \times U \rightarrow Z$ — функция выходов.

Если функция h не зависит от U , то такой автомат называют *автоматом Мура*, в противном случае — *автоматом Мили*.

Приведенное определение позволяет трактовать конечный автомат как динамическую систему (рис. 9.4, а), описываемую следующим образом:

$$x_{i+1} = f(x_i, u_i), \quad (9.8)$$

$$z_i = h(x_i, u_i). \quad (9.9)$$

Пребывая в состоянии $x_i \in X$ и получив на входе символ $u_i \in U$, автомат генерирует на выходе символ $z_i \in Z$, определяемый функцией $h(\cdot)$, и переходит в новое состояние x_{i+1} , определяемое функцией $f(\cdot)$.

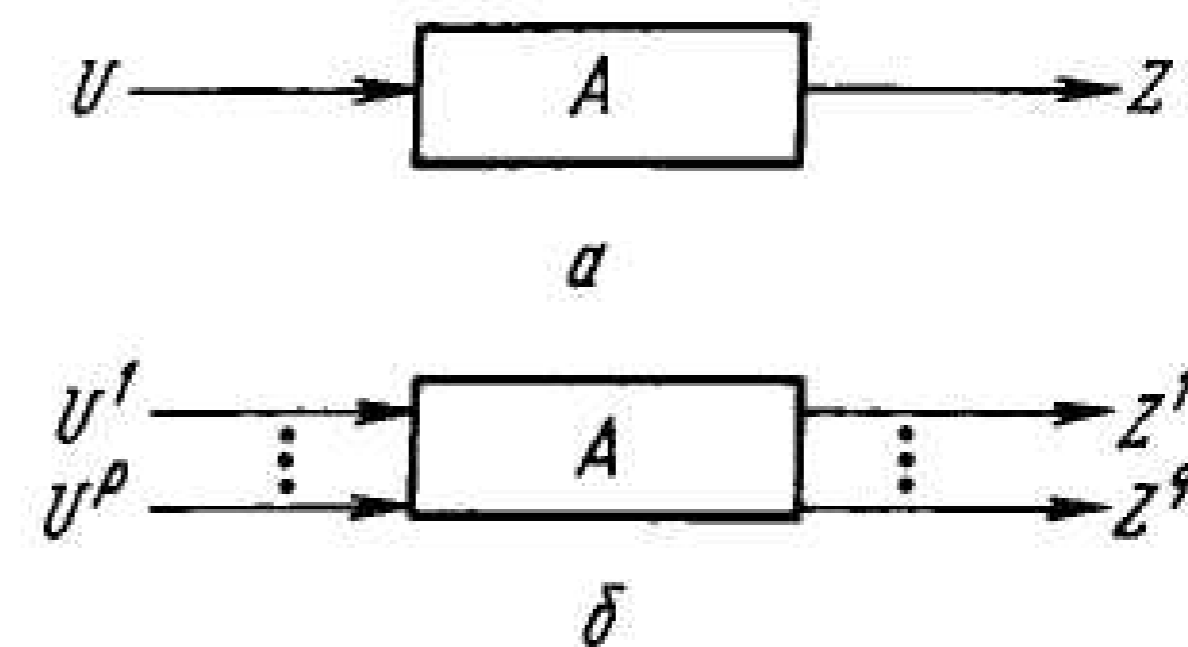


Рис. 9.4. Конечный автомат: а — с одним входом, одним выходом; б — с p входами, q выходами

Инициальным конечным автоматом называют конечный автомат, для которого задано начальное состояние $x_0 \in X$:

$$A = (U, X, Z, f, h, x_0). \quad (9.10)$$

манипулятором R_{N+1} в тару брака. Пусть $S = \{R_0, R_1, \dots, R_{N+1}, C\}$ — множество подсистем, $T = \bigcup_{i=0}^{N+1} T_i \cup T_c$ — задание, где T_i — подзадание конвейера. Тогда ясно, что система (S, T) представляет собой T -сложную систему, поскольку граф задания является связным (рис. 9.3, б). Этот граф безусловно не отражает всей специфики выполняемой операции (ниже пример будет рассмотрен более детально), однако позволяет сделать вывод относительно сложности системы в смысле введенного определения.

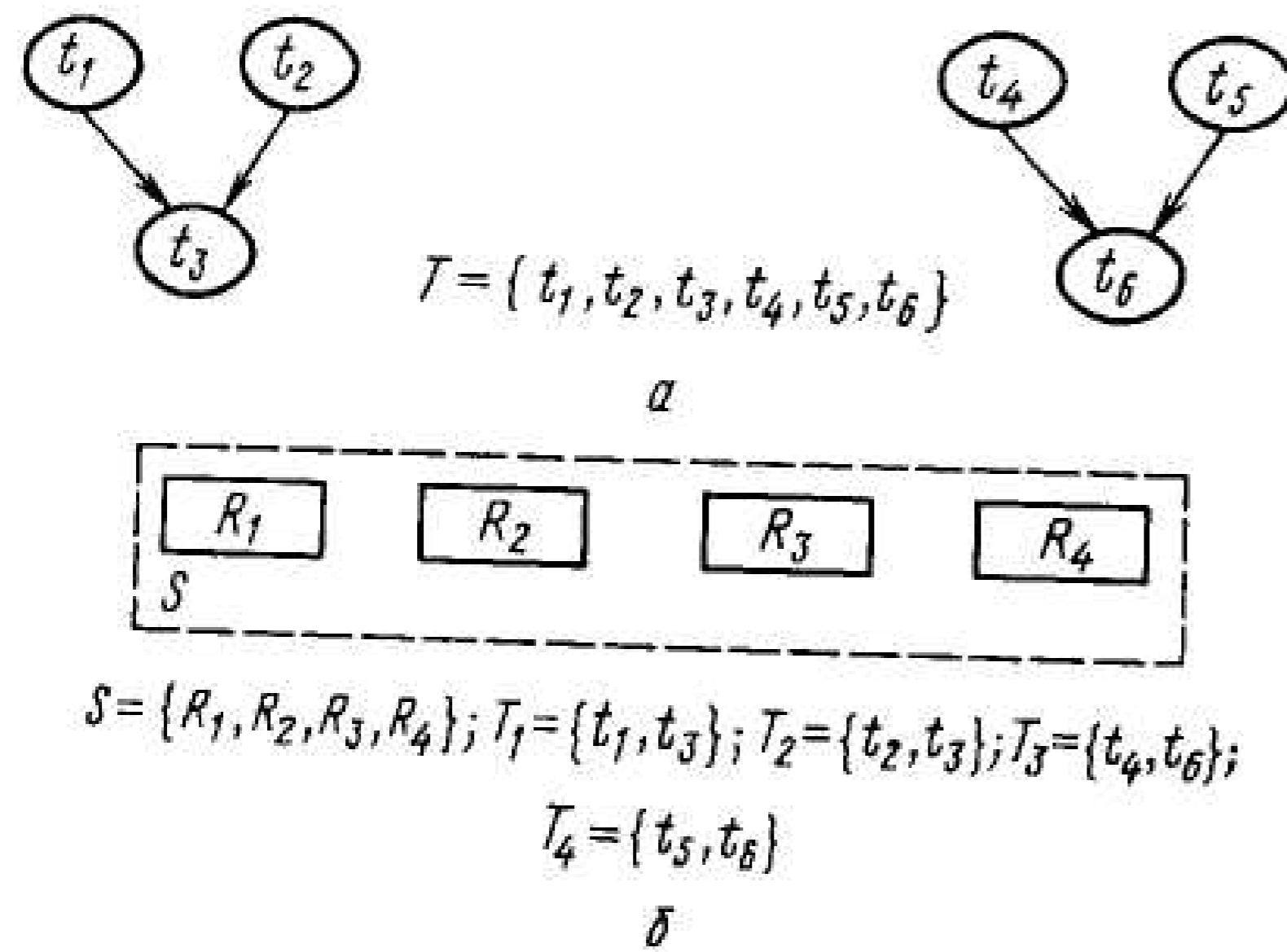


Рис. 9.2. Пример системы, не являющейся T -сложной: а — граф задания T ; б — подсистемы

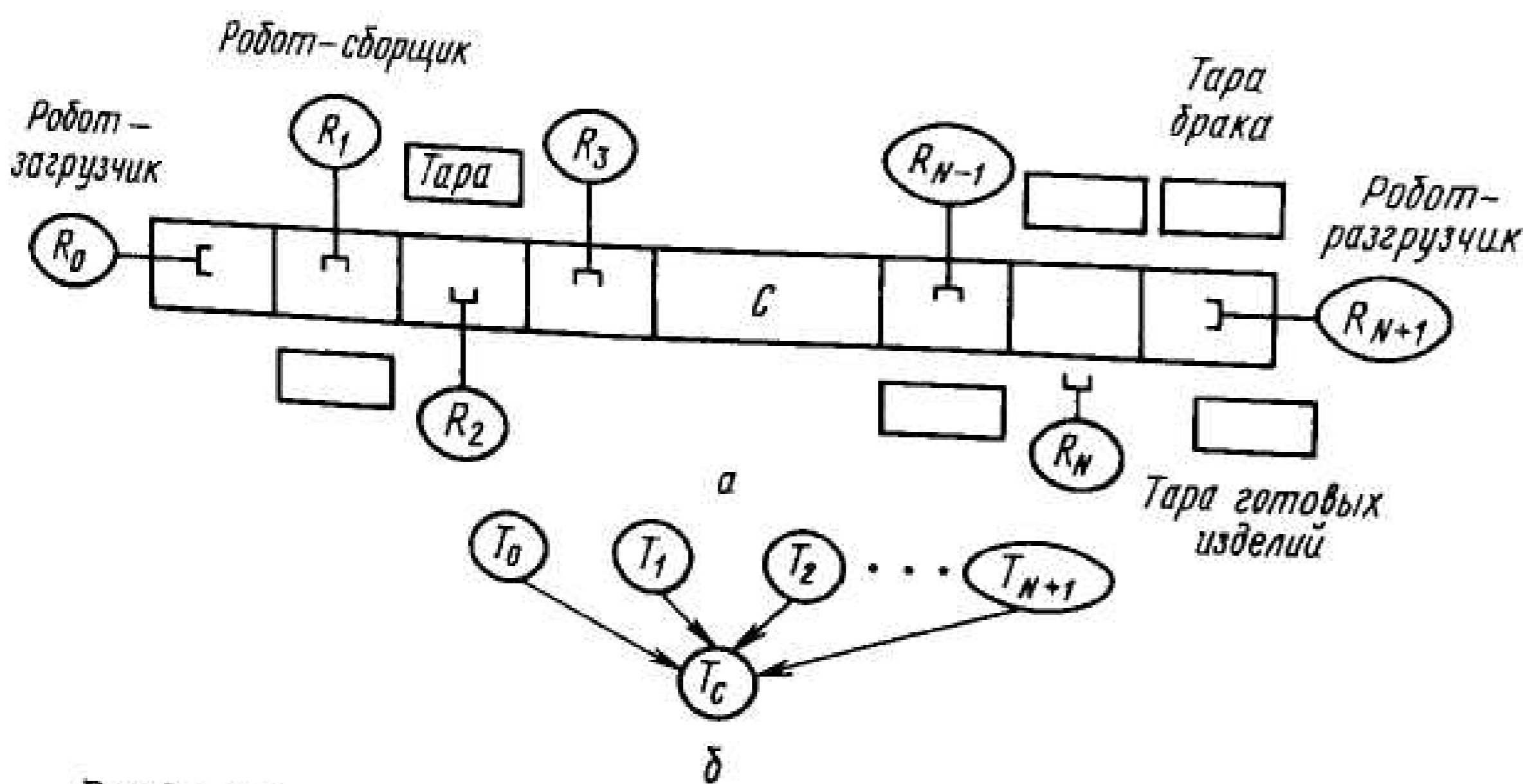


Рис. 9.3. Роботизированная сборочная линия: а — схема линий; б — граф задания

Входными (выходными) символами автомата A называются конечные последовательности символов алфавита $U(Z)$, словами состояний — последовательности символов алфавита X . Поведением $L(A)$ автомата A называют множество всех входных—выходных последовательностей, реализуемых в A :

$$L(A) \subseteq (U \times Z)^* \quad (9.11)$$

Естественным расширением рассмотренного автомата с одним входом и одним выходом является автомат с p входами и q выходами (рис. 9.4, б), который задан следующим образом:

$$A = (U, X, Z, f, h), \quad (9.12)$$

где

$$U = U^1 \times U^2 \times \dots \times U^p, \quad u \in U, \quad u = (u^1, u^2, \dots, u^p), \quad u^i \in U^i, \quad |U^i| = p_i;$$

$$X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\};$$

$$Z = Z^1 \times Z^2 \times \dots \times Z^q, \quad z \in Z, \quad z = (z^1, z^2, \dots, z^q), \quad z^i \in Z^i, \quad |Z^i| = q_i;$$

$$f: X \times U \rightarrow X;$$

$$h: X \times U \rightarrow Z, \quad h = (h^1, h^2, \dots, h^q),$$

т.е.

$$x_{i+1} = f(x_i, u_i^1, u_i^2, \dots, u_i^p) = f(x_i, u_i);$$

$$z_{i+1}^j = h^j(x_i, u_i), \quad i = 1, 2, \dots, q. \quad (9.13)$$

Автомат называется полностью определенным, если область определения D_f и D_h функций f и h соответственно имеет вид

$$D_f = D_h = X \times U. \quad (9.14)$$

Если же D_f и D_h — собственные подмножества $X \times U$, то автомат называют неполностью определенным, или частичным.

Для того чтобы автомат был задан, необходимо задать все атрибуты его описания: множества U, X, Z и отображения $f(\cdot)$ и $h(\cdot)$ (для инициального автомата необходимо, кроме того, указать начальное состояние x_0). Наиболее широко используют графовый способ задания автомата.

Граф автомата (граф переходов и выходов, или диаграмма Мура) — это ориентированный граф, вершины которого соответствуют состояниям, а ребра, соединяющие каждую пару вершин, — переход из одного состояния в другое. Две вершины графа, соответствующие состояниям $x, y \in X$, соединяются дугой, направленной от x к y , если

существует $u \in U$, такое, что $y = f(x, u)$. При этом дуга нагружается символом входного алфавита u и выходным сигналом $z = h(x, u)$. Для автоматов Мура, у которых символ выходного алфавита зависит только от состояния, а не от способа прихода в него, целесообразно приписывать выходной сигнал не дуге, а непосредственно состоянию. Аналогично строится граф для многомерных автоматов. На рис. 9.5, а–в приведены графы, описывающие три автомата, каждый из которых может пребывать в трех состояниях x_0, x_1, x_2 , принимать на входе символы a, b, c и генерировать на выходе u, v, w . Заметим, что все приведенные автоматы являются частичными.

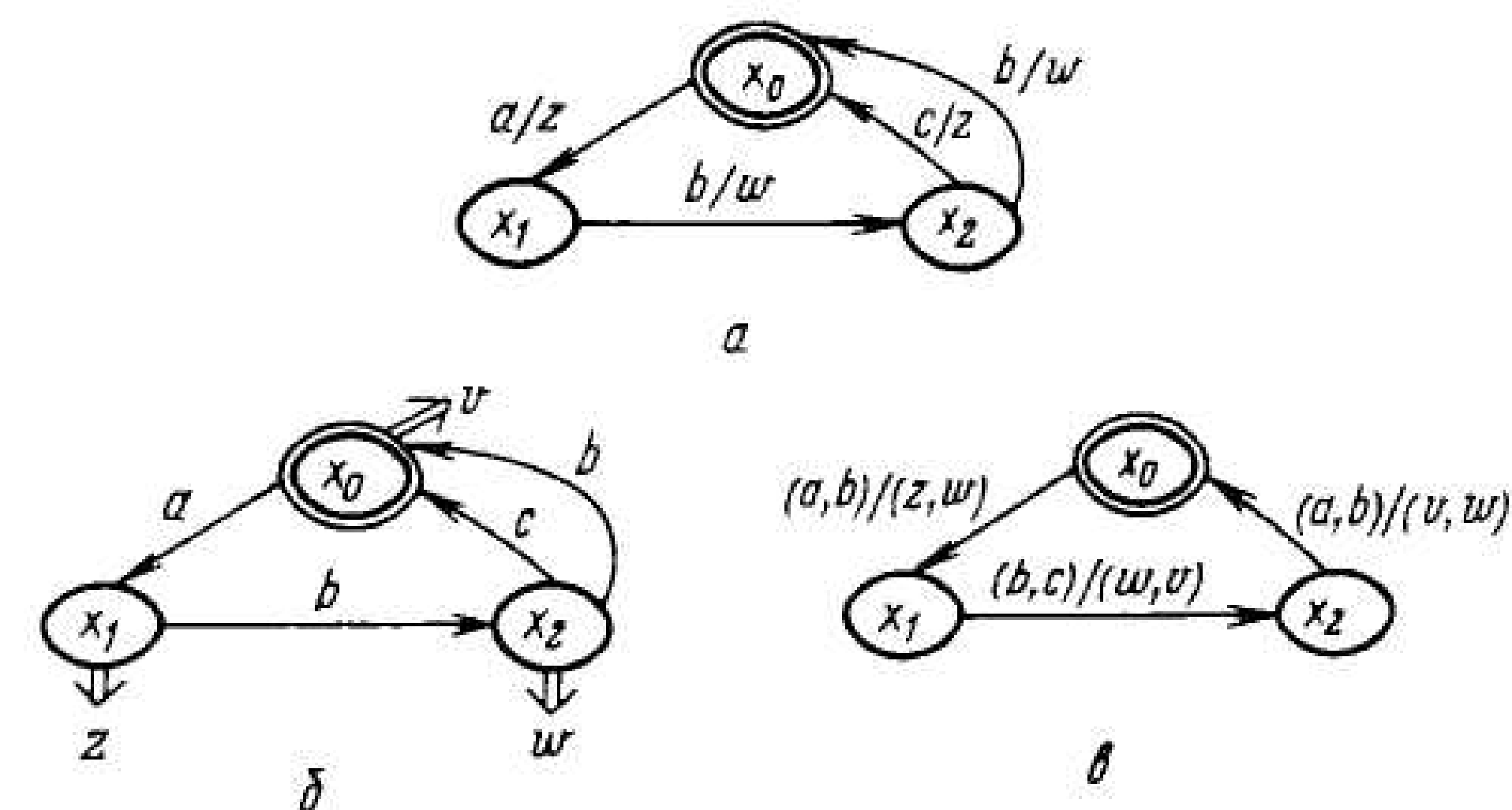


Рис. 9.5. Графовое представление автоматов: а — автомат Мили; б — автомат Мура; в — автомат Мили с двумя входами, двумя выходами

Если упорядочить состояние автомата (9.12), а также его входы и элементы входных алфавитов каждого из входов, то нетрудно увидеть, что для задания полностью определенного автомата необходима таблица, содержащая

$$n(1+q) \prod_{i=1}^{M_p} p_i \quad (9.15)$$

символов (не считая таблицу перекодировки).

9.3. Построение моделей подсистем

В нашем случае объектом управления является СРС. Поэтому прежде, чем перейти к управлению, сформируем модели подсистем, входящих в состав СРС. Начнем с построения математической модели робота.

9.3.1. Робот как элемент сложной системы

Известно, что существуют два больших класса роботов, отличающихся используемыми системами управления:

- 1 — роботы с цикловыми системами управления;
- 2 — роботы с позиционно-контурными системами управления.

Робот с цикловой системой управления. Спецификой робота является то, что схват манипулятора может находиться в конечном числе точек пространства (т.е. область достижимости схвата манипулятора с цикловой системой управления конечна). Если манипулятор имеет k степеней подвижности, каждая из которых содержит p_i точек, $i = 1, 2, \dots, k$, в которых может находиться соответствующее звено, то число точек n , куда может попасть схват, записывают следующим образом: $n = \prod_{i=1}^k p_i$. Манипуляторы этого класса снабжены путевыми датчиками, которые информируют о попадании i -го подвижного сочленения в каждое из допустимых положений некоторым сигналом d'_i . На каждую из степеней подвижности i может быть подан управляющий сигнал u'_i , переводящий эту степень в требуемое положение. Тогда манипуляторы 1-го класса могут быть описаны как конечные автоматы со следующими атрибутами:

$$U = \{u'_i\}, X = \{p_i\}, Z = \{d'_i\}.$$

Вид функций $f(\cdot)$ и $h(\cdot)$ определяется кинематической схемой манипулятора.

На рис. 9.6, а, б изображена кинематическая схема типичного трехстепенного манипулятора с цикловой системой управления и его область достижимости. Каждая степень содержит две точки позиционирования. Формальное описание манипулятора как объекта управления имеет следующий вид:

$$U = \{u_1^1, u_2^1, u_1^2, u_2^2, u_1^3, u_2^3\},$$

$$X = \{p_1, p_2, \dots, p_8\}, Z = \{d_1^1, d_2^1, d_1^2, \dots, d_2^3\}.$$

Диаграмма Мура соответствующего автомата приведена на рис. 9.7. Из рисунка ясно, что, управляемый объект представляет собой автомат Мили.

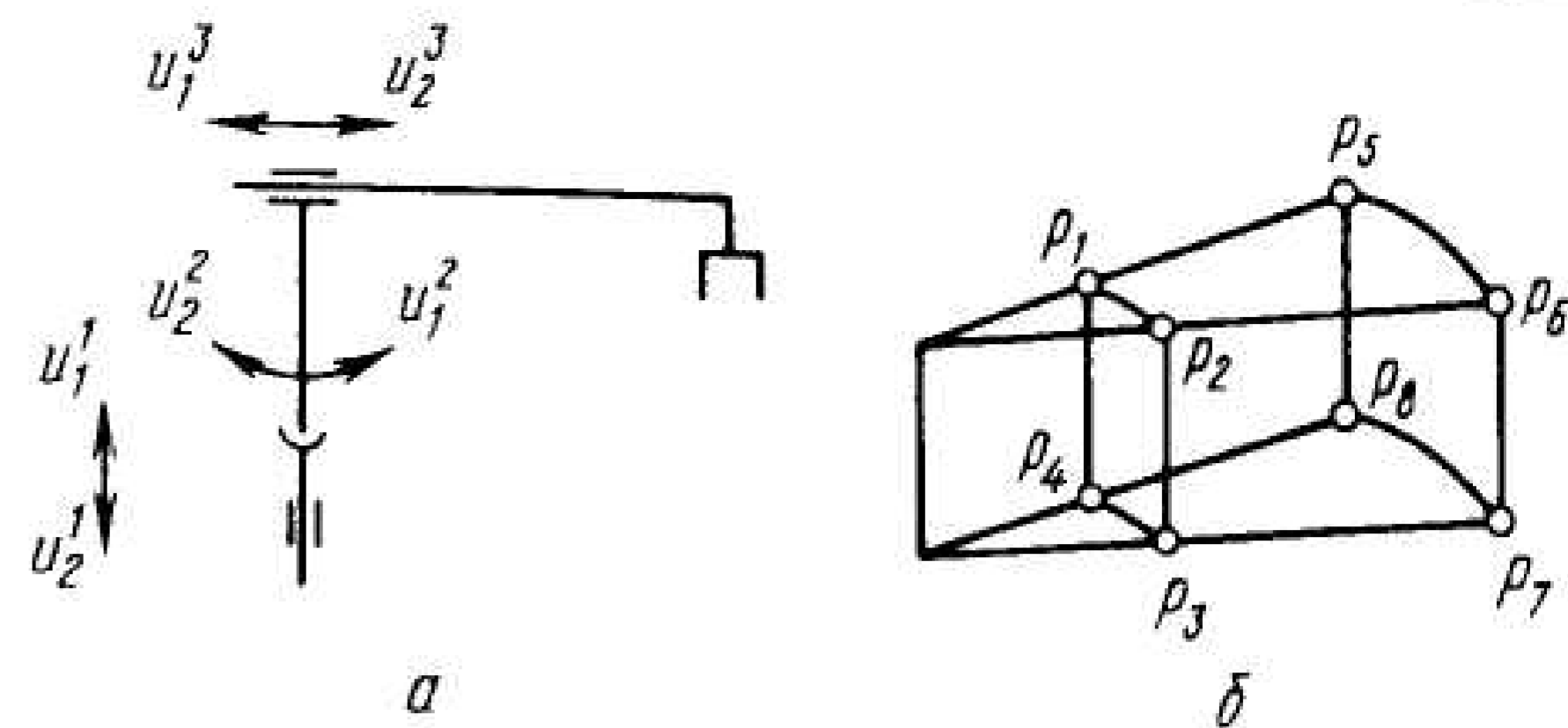


Рис. 9.6. Манипулятор с цикловой системой управления: а — кинематическая схема; б — область достижимости

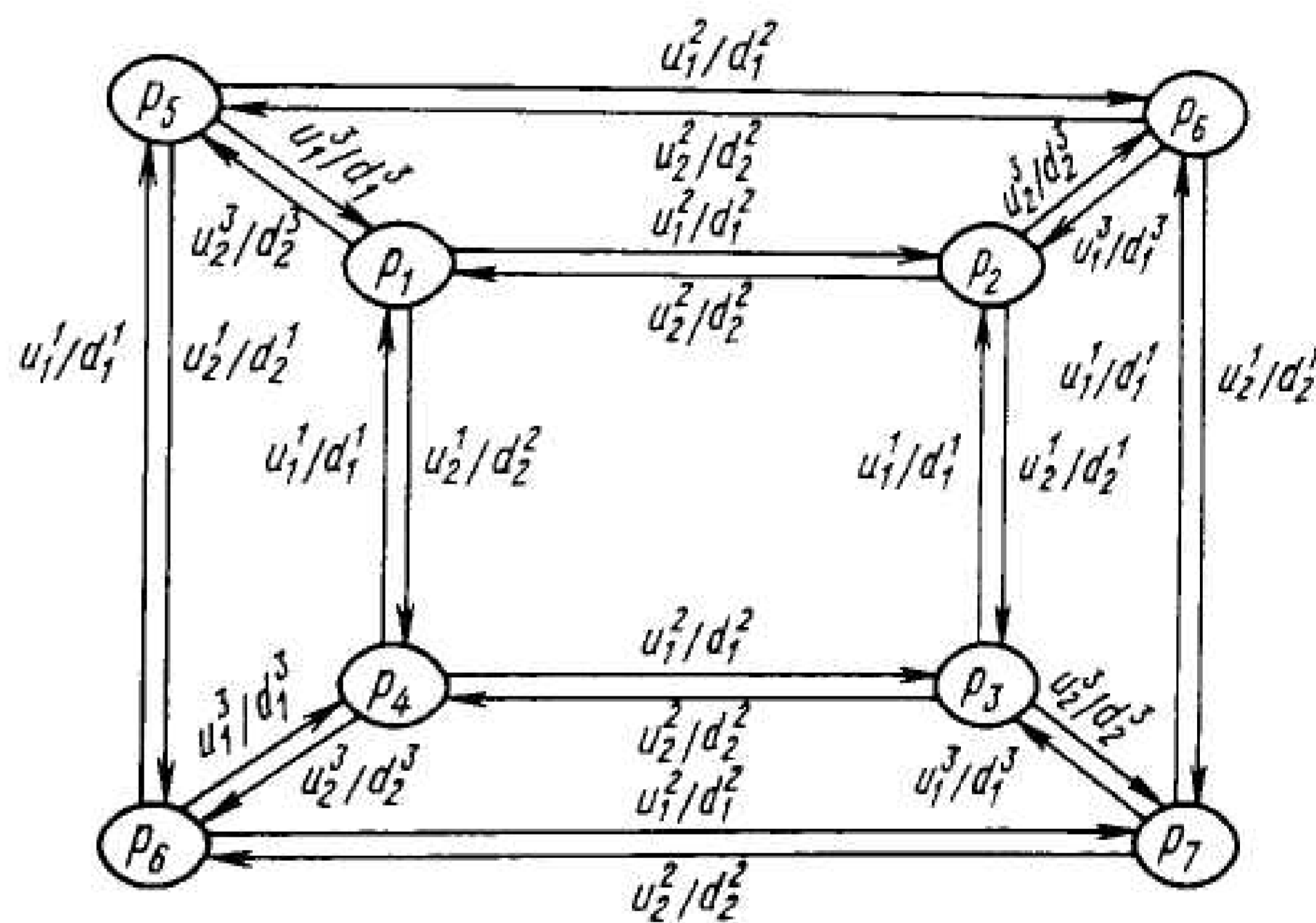


Рис. 9.7. Диаграмма Мура робота с цикловой системой управления

Робот с позиционно-контурной системой управления. В этом случае область достижимости схвата содержит бесконечно много точек позиционирования, так что используемый выше подход здесь неприемлем. Для построения модели воспользуемся тем обстоятельством, что логический уровень взаимодействует с уровнем интерпретации, который функционирует в соответствии с программой, сформированной человеком-оператором. Таким образом, мы предполагаем, что робот обучен.

Рассмотрим простейший случай манипулятора с позиционной системой управления. Пусть p_i — имена точек позиционирования, через которые должен пройти манипулятор. Тогда модель робота как конечного автомата может выглядеть следующим образом:

$$U = \{p_1, p_2, \dots, p_n\},$$

$$X = \{x_0, p_1, p_2, \dots, p_n\},$$

$$Z = \{g\}.$$

Выходной алфавит Z состоит из одного символа, подтверждающего приход в заданную точку и генерируемого программно (в отличие от манипулятора с цикловой системой управления). Вид функции переходов $f(x, u)$ зависит от конфигурации рабочего пространства: для среды без препятствий можно попасть из любой точки в любую, если же имеются препятствия, то доступ в некоторые точки ограничен. На рис. 9.8 показаны диаграммы Мура манипуляционных роботов, функционирующих в свободном пространстве (рис. 9.8, а) и пространстве с препятствиями (рис. 9.8, б), при этом предполагается, что движение в декартовом пространстве осуществляется по прямой.

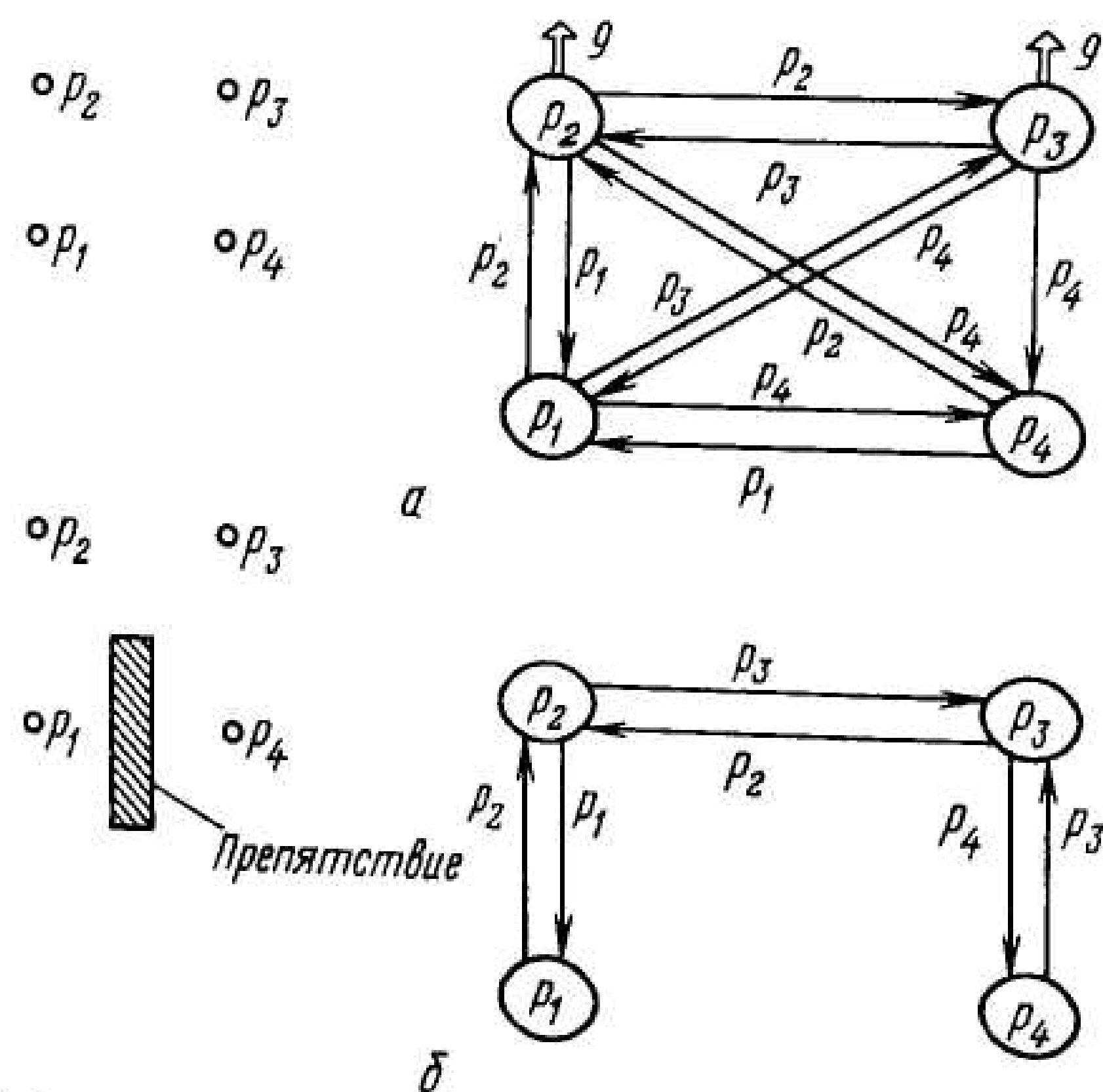


Рис. 9.8. Диаграмма Мура робота с позиционно-контурной системой управления:
а — в свободном пространстве; б — в среде с препятствиями

В более сложных ситуациях, когда формирование задания состоит не в простом перечислении точек позиционирования, входной алфавит может быть адекватен фрагментам программ.

9.3.2. Модели подсистем

Выше была описана математическая модель робота как элемента сложной системы. Рассмотрим теперь некоторые основные подсистемы, входящие в состав РТК.

Система очувствления. С точки зрения используемого здесь подхода все системы очувствления можно разбить на два класса:

- бесконечномерные,
- конечномерные.

Для бесконечномерных систем очувствления характерно то, что данные о внешней среде, поставляемые системой очувствления, имеют континуальный характер. К таким системам очувствления относятся дальномеры, силомоментные датчики, СТЗ, работающие в режиме определения координат. Такого рода данные используются не логическим уровнем системы управления, а более низкими уровнями. Адаптивное поведение манипуляционного робота, оснащенного такими датчиками, реализуется на уровне вычисления управления. В этом случае строятся законы управления, в которые соответствующие показания датчиков входят как параметры, т.е. адаптация не затрагивает верхних уровней системы управления, а является параметрической. Конечномерные системы очувствления предоставляют системе управления данные, характеризуемые конечным числом значений. Именно такие системы поставляют информацию, используемую для выработки поведения СРС.

Рассмотрим, например, СТЗ, работающую в режиме идентификации [47; 61]. Пусть a, b, c, \dots, x, y — классы объектов, к которым СТЗ может отнести предъявленный ей объект (СТЗ тоже должна быть предварительно обучена), и пусть z — класс, к которому приписываются все незнакомые объекты (рис. 9.9, а). Тогда описание СТЗ как конечного автомата можно представить в виде

$$U = \{\text{start}\}, \quad X = \{x_0, x_1\}, \quad Z = \{a, b, c, \dots, z\}.$$

Здесь сигнал start должен поступать извне (от оператора или системы управления), чтобы инициировать работу системы после того, как будет сформирована сцена. Диаграммы Мура модели СТЗ показаны на рис. 9.9, б, в.

Отметим одно важное обстоятельство, которое заключается в следующем. Автомат, описывающий СТЗ, является недетерминированным. Эта недетерминированность может быть разной. В частности,

изображенная на рис. 9.9, б модель СТЗ недетерминирована по выходу, а модель на рис. 9.9, в недетерминирована по переходам.

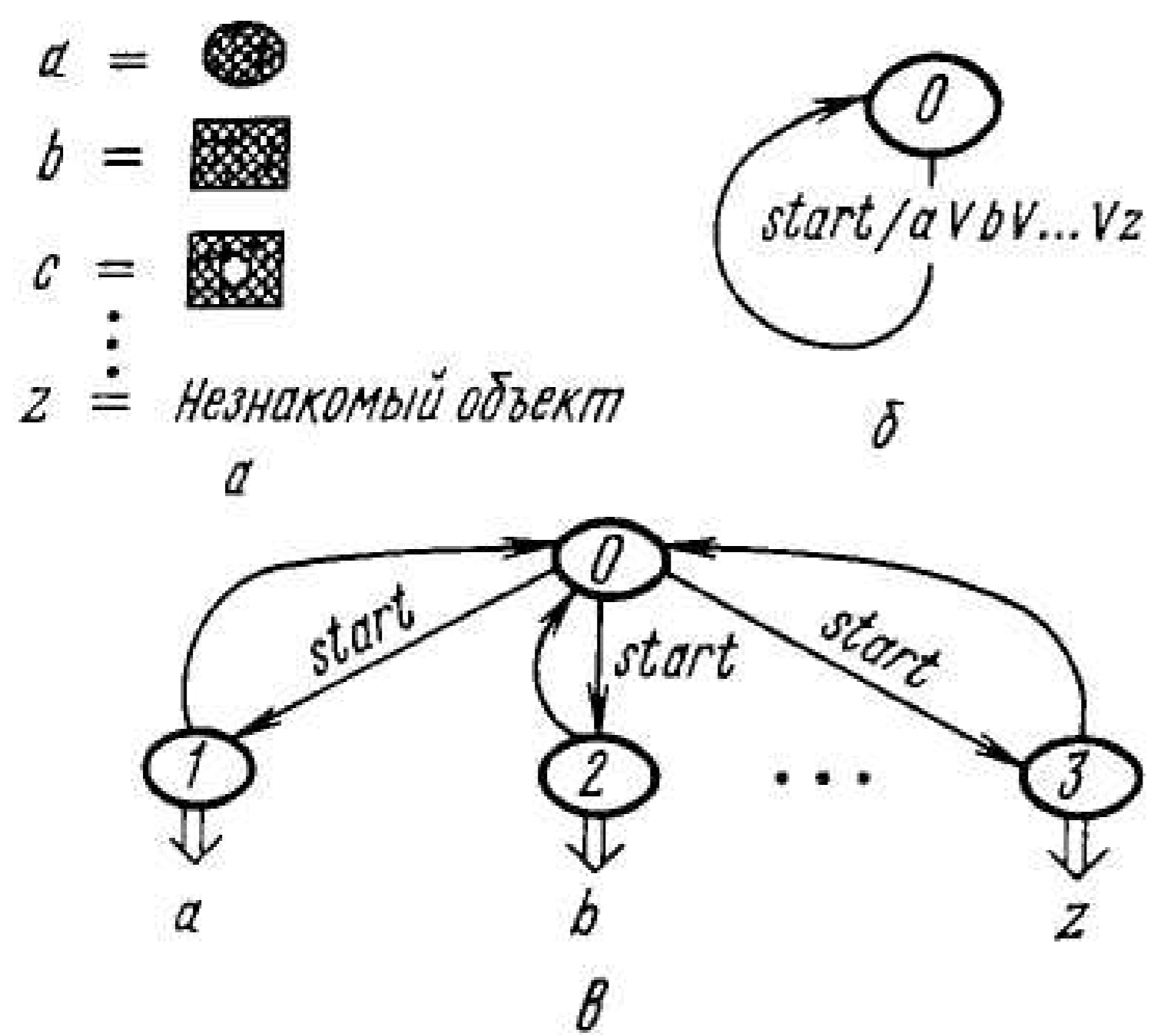


Рис. 9.9. СТЗ в режиме идентификации как конечный автомат: а — предъявляемые объекты; б — модель, недетерминированная по выходу; в — модель, недетерминированная по переходам

Вообще говоря, свойство недетерминированности должно быть присуще моделям объектов управления, поскольку оно присуще самим объектам. Так, рассмотренные выше модели роботов также должны отражать недетерминированность, связанную с тем, что исполнение команд, поступающих на робот в виде либо имен точек позиционирования, либо имен фрагментов, содержащих последовательности команд, может завершиться ошибкой (неверный синтаксис, отсутствие имени точки позиционирования среди имен, полученных при обучении, динамические или статические ошибки при исполнении и т.д.). Это означает, в частности, что выходной алфавит модели должен содержать соответствующие символы, а система управления должна быть готова к адекватной реакции на их появление.

Технологическое оборудование. Как правило, его легко описать как конечный автомат, поскольку в нем содержится конечное число входных сигналов, состояний и выходов. Например, для схвата манипулятора имеем

$$U = \{o \text{ — открыть, } c \text{ — закрыть}\},$$

$$X = \{x_0, x_1 \text{ — открыт, } x_2 \text{ — закрыт}\},$$

$$Z = \{g\}.$$

Соответствующая диаграмма Мура представлена на рис. 9.10.

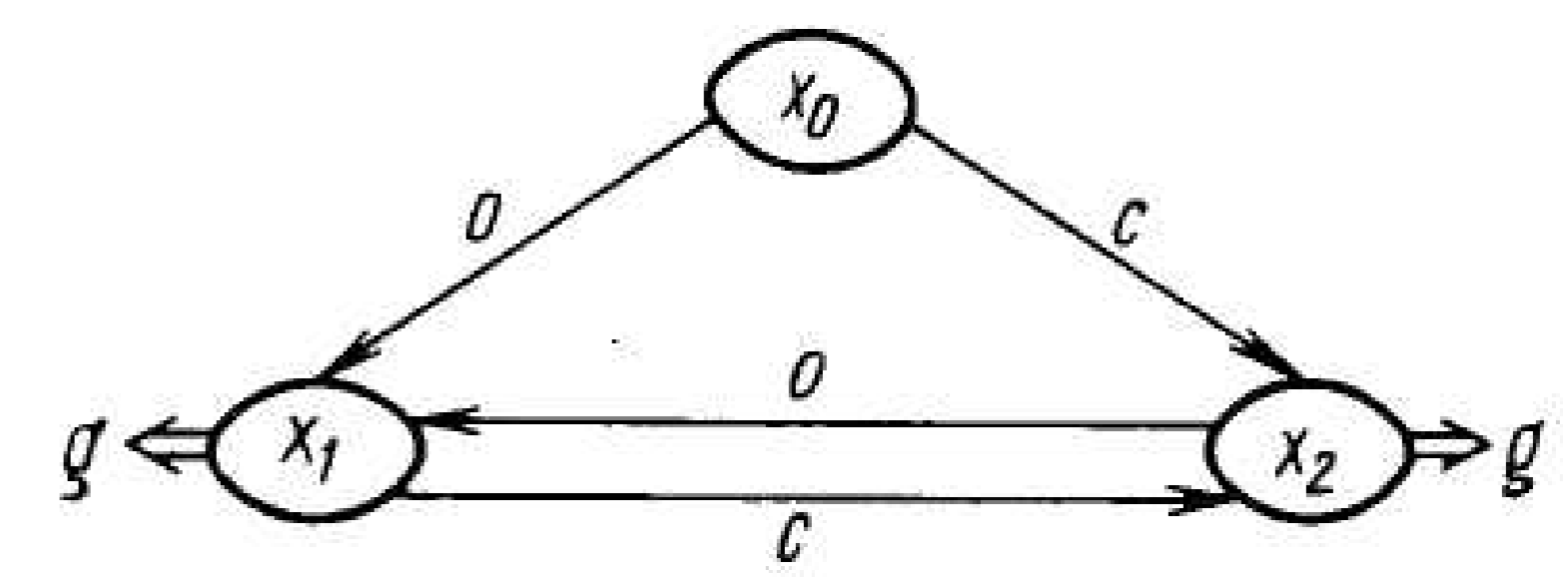


Рис. 9.10. Схват манипулятора как конечный автомат

Перечисленные в этом параграфе объекты, конечно, не отражают всей совокупности подсистем, входящих в состав СРС, они лишь демонстрируют способ построения модели в виде конечных автоматов.

9.4. Сетевой автомат

Как говорилось ранее, мы будем описывать элементы сложной системы как конечные автоматы, а *управляющую структуру* — как сеть таких автоматов, объединенных входами и выходами. В этой ситуации естественно воспользоваться представлениями (9.12), (9.13) многовходового автомата. Однако во многих приложениях определенные комбинации входов не встречаются (т.е. автомат, находящийся в некотором состоянии, никогда не получит определенных входных сигналов), кроме того, не все выходные каналы автомата могут быть использованы на каждом шаге. Объем же данных, описывающих автомат (9.12), для сколько-нибудь серьезных прикладных задач, может стать удручающе велик.

Введем понятие *сетевого автомата*, которое, с одной стороны, позволяет сохранить многовходовость автомата, а с другой стороны, существенно уменьшить объем данных, требуемых для его описания.

Назовем *сетевым автоматом* NA с p входами и q выходами следующий набор:

$$NA = (I, O, U, X, Z, f, h), \tag{9.16}$$

где $I = \{i_1, i_2, \dots, i_p\}$ — множество входов; $O = \{o_1, o_2, \dots, o_q\}$ — множество выходов; $U = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$ — входной алфавит; $X = \{x_1,$

x_2, \dots, x_n — множество состояний; $Z = \{z_1, z_2, \dots, z_k\}$ — выходной алфавит; $f: X \times V \rightarrow X$ — одношаговая переходная функция, где $V \subset U \times I$; $h: X \times V \rightarrow W$ — выходная функция, где $W \subset Z \times O$.

Элементы множеств V и W будем называть обобщенными входными и выходными алфавитами соответственно.

Два инициальных сетевых автомата назовем эквивалентными, если они порождают совпадающее отображение обобщенный вход — обобщенный выход.

Таким образом, функция f отображает множество троек (x, u, i) , $x \in X$, $u \in U$, $i \in I$ в $y \in X$, так что $gr f = \{(x, u, i, y)\}$. Если f_x — отображение $V \rightarrow X$, такое, что $(u, i, y) \in gr f_x \Leftrightarrow (x, u, i, y) \in gr f$, то f_x можно интерпретировать как функцию перехода сетевого автомата, находящегося в состоянии x . Ясно, что $\{f_x\}$, $x \in X$, полностью определяет f и наоборот. В этом случае множество пар $\{(u, i)\}$ определяют набор входных символов и каналов, на которые автомат может реагировать, находясь в текущем состоянии. Аналогично, если h_x — отображение $V \rightarrow W$, такое, что $(u, i, z, o) \in gr h_x \Leftrightarrow (x, u, i, z, o) \in gr h$, то h_x интерпретируется как функция выходов сетевого автомата, находящегося в состоянии x . Заметим, что при таком определении сетевого автомата возможна недетерминированность, заключающаяся в следующем. Пусть автомат, находящийся в состоянии x , характеризуется тем, что на входах i и j присутствуют символы a и b соответственно, а отображение f_x имеет вид $(a, i) \rightarrow p$, $(b, j) \rightarrow q$ и $p \neq q$. Тогда автомат может перейти либо в p , либо в q . Если $|O| = |I| = 1$, тогда сетевой автомат становится эквивалентным абстрактному конечному автомату.

Введем дополнительно специальный символ ϵ , который является элементом и входного и выходного алфавита. Этот символ мы будем интерпретировать как пустой символ, который всегда присутствует на выделенном входе автомата, так, что если в описании перехода из некоторого состояния присутствует входной символ ϵ , то осуществляется соответствующий переход. Появление символа ϵ в выходном канале означает, что на выход ничего не поступает. (Следует заметить, что полученный в результате автомат не является автоматом Мили, поскольку он не сохраняет длину отображения).

Далее при изображении графа сетевого автомата мы будем использовать следующую нотацию: через i, u будем обозначать символ входного алфавита $u \in U$, пришедший по входному каналу $i \in I$; через z, o — символ выходного алфавита $z \in Z$, поступивший в выходной канал $o \in O$. На рис. 9.11 изображен сетевой автомат с двумя входами ($I = \{1, 2\}$) и двумя выходами ($O = \{6, 3\}$) и его диаграмма переходов — выходов. Заметим здесь, что для изображения графов автоматов, имеющих один вход и (или) один выход, мы сохраним стандартную нотацию.

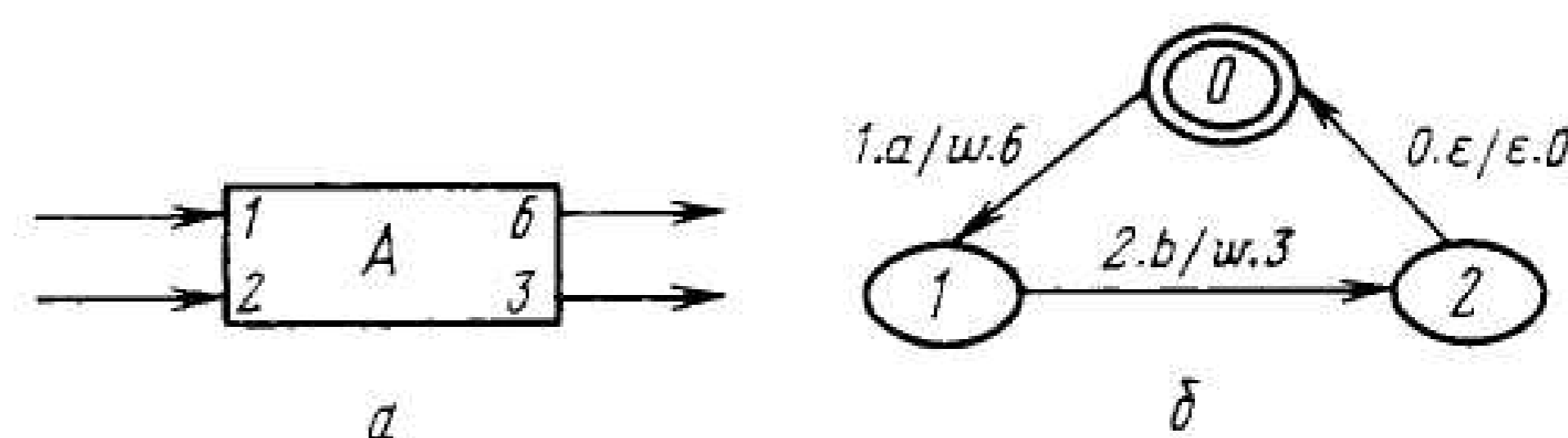


Рис. 9.11. Графовое представление сетевого автомата: a — сетевой автомат; b — диаграмма переходов — выходов

Введем динамическую интерпретацию сетевого автомата, отличную от принятой интерпретации абстрактного конечного автомата (9.8), (9.9), а именно: будем считать, что поведение автомата описывается следующим образом:

$$x_{i+1} = f(x_i, v_i), \quad (9.17)$$

$$w_{i+1} = h(x_i, (u, i)_i), \quad (9.18)$$

где $v = (u, i) \in V$, $w = (z, o) \in W$. Таким образом, будем предполагать, что сетевой автомат генерирует символ в выходной канал не одновременно с приходом входного символа (как это было для абстрактного конечного автомата), а одновременно с достижением нового состояния. Такая интерпретация позволит нам в дальнейшем избежать «моментальной зависимости». Поскольку это достаточно важно, проиллюстрируем работу сетевого автомата (с одним входом и одним выходом), построив его модель в виде сети Петри [56]. На рис. 9.12 представлена модель сетевого автомата в виде сети Петри. Позиции и переходы интерпретируются здесь следующим образом:

p_1 — ожидание прихода входного символа;

t_1 — получен входной символ;

- p_2 — переход в следующее состояние;
- t_2 — генерация выходного символа; автомат находится в новом состоянии;
- p_3 — источник входных символов;
- p_4 — накопитель выходных символов.

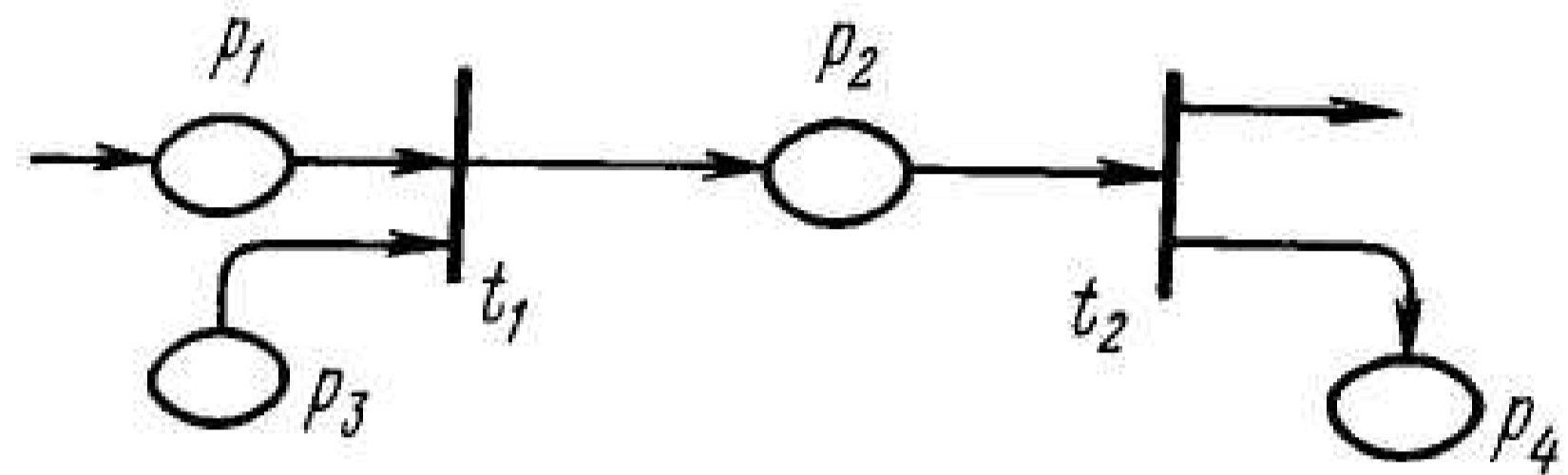


Рис. 9.12. Модель сетевого автомата с одним входом и одним выходом

Если в некотором состоянии автомата присутствует переход по пустому символу ϵ , то в его представлении в виде сети Петри отсутствует позиция p_3 . Аналогично обстоит дело с пустым выходным символом ϵ : в этом случае отсутствует позиция p_4 .

Рассмотрим еще одну интерпретацию сетевого автомата с p входами и q выходами, которая понадобится в дальнейшем [4]. Будем интерпретировать сетевой автомат как устройство (рис. 9.13), состоящее из:

- управляющего блока;
- полубесконечной входной ленты (i -лента), разделенной на ячейки, каждая из которых содержит символ обобщенного входного алфавита (слово записывается слева направо);
- полубесконечной выходной ленты (o -лента), разделенной на ячейки;
- p читающих головок;
- q записывающих головок.

Находясь в состоянии x , автомат обозревает входную ленту так, что каждая его читающая головка, связанная с каналом $i \in I_x$, находится над ячейкой ленты, содержащей символ $u.i$. После чтения символа автомат переходит в новое состояние y и на выходную ленту записывается $w \in W$. Читающие головки, связанные с каналами из I_y , перемещаются вправо до тех пор, пока под каждой из них не окажется символ из V с соответствующим номером канала.

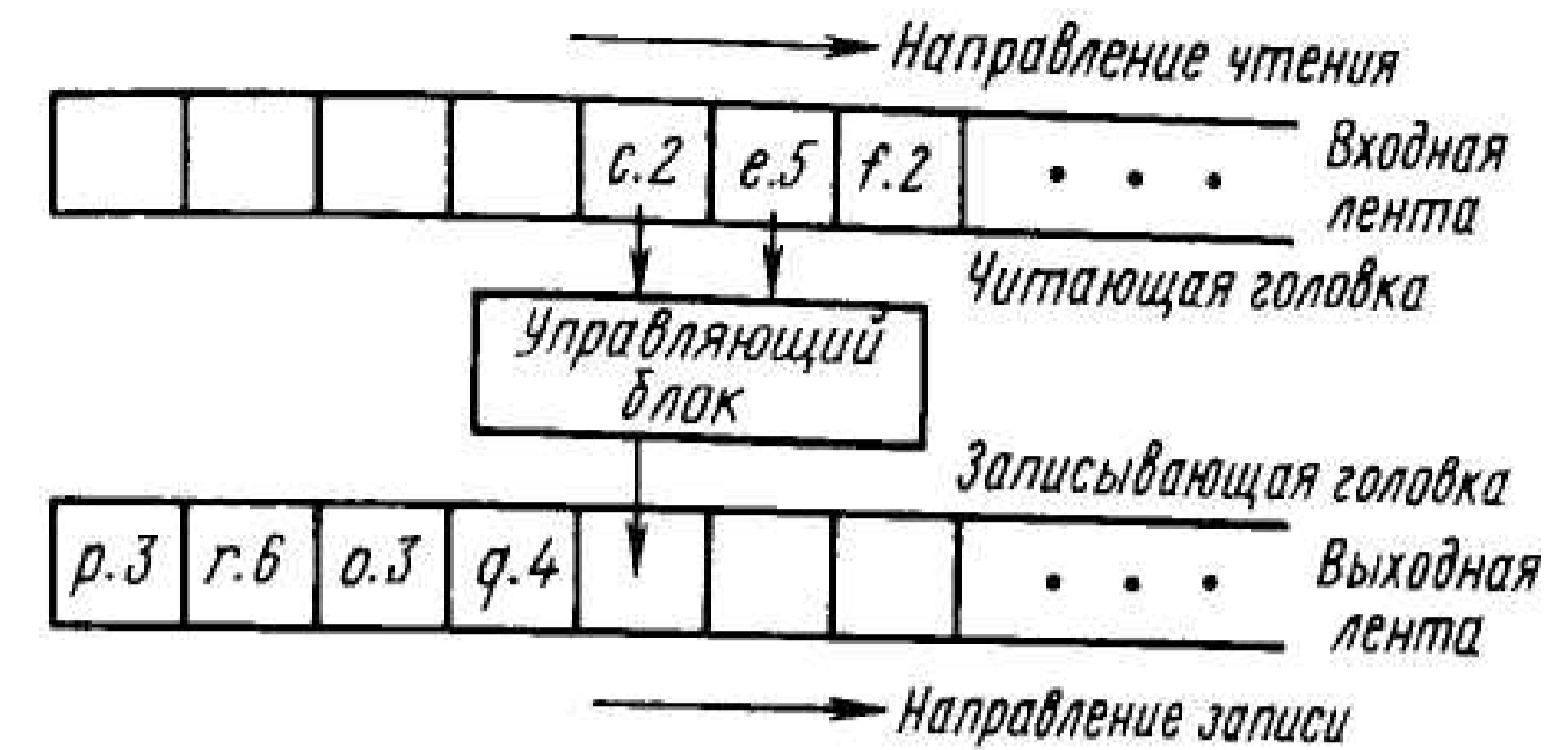


Рис. 9.13. Модель сетевого автомата как читающее — записывающее устройство

Итак, сформулировав все основные определения, перейдем к построению сети автоматов.

9.5. Сеть автоматов

В этом параграфе мы построим *сеть автоматов*, т.е. набор автоматов, объединенных своими входами и выходами и взаимодействующих путем передачи и приема символов своих входных — выходных алфавитов по общим каналам. Рассмотрим предварительно механизм взаимодействия введенных выше автоматов при их элементарных соединениях.

9.5.1. Последовательное соединение сетевых автоматов

Пусть два автомата (см. (9.16)) $NA_i = (I_i, O_i, U_i, X_i, Z_i, f_i, h_i)$, $i = 1, 2$, соединены так, как это показано на рис. 9.14, т.е. подмножество выходов $O'_1 \subseteq O_1$ автомата NA_1 соединено с подмножеством входов $I'_2 \subseteq I_2$ автомата NA_2 . Будем далее считать, что $I_1 \cap I_2 = O_1 \cap O_2 = 0$. Если эти условия не выполняются, тогда переименуем соответствующие каналы. Отметим одно обстоятельство. Пусть клетки на ленте пронумерованы (см. рис. 9.13), и n_A^m — положение головки m автомата A , $m \in \{r, w\}$, $A \in \{NA_1, NA_2\}$. Тогда нетрудно увидеть, что в соответствии с введенной выше интерпретацией выполняется соотношение

$$n_{NA_1}^w - n_{NA_2}^r \geq 0, \quad (9.19)$$

означающее, что читающая головка r автомата NA_2 никогда не обгонит записывающую головку w автомата NA_1 . На рис. 9.15 представле-

на модель взаимодействия автоматов в виде сети Петри. Позиция p_4 служит для передачи сообщений от NA_1 к NA_2 .

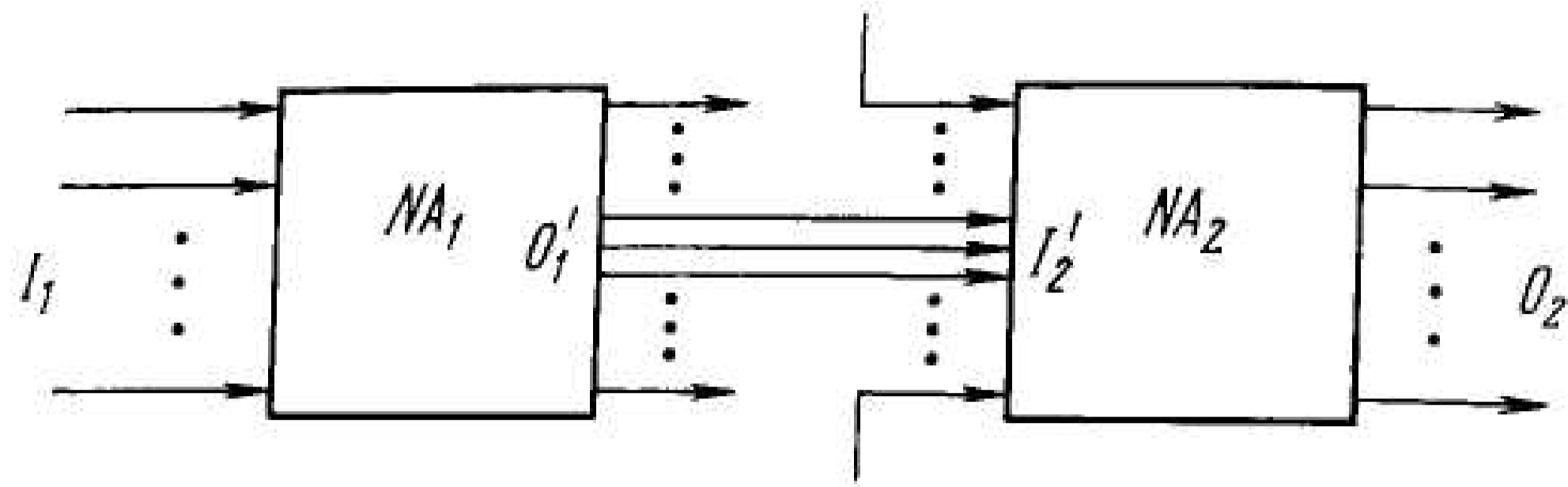


Рис. 9.14. Последовательное соединение сетевых автоматов

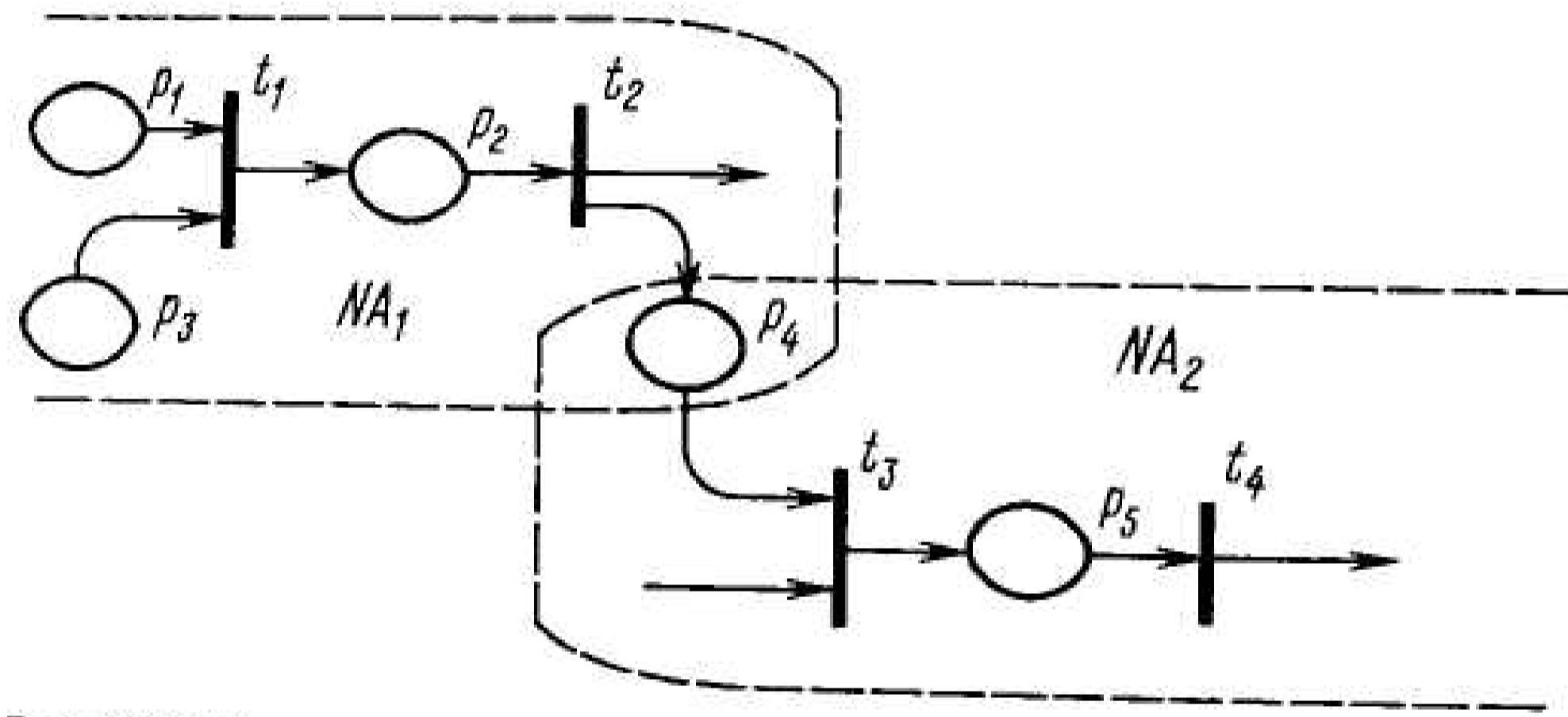


Рис. 9.15. Модель взаимодействия последовательно соединенных автоматов в виде сети Петри

Соотношение (9.19) устанавливает минимальное расстояние между головками взаимодействующих автоматов. Однако имеет смысл рассмотреть вопрос о максимальном расстоянии. Прикладная сторона этого вопроса состоит в следующем. При программной реализации автоматов используют FIFO-очереди в качестве механизма обмена данными, и тогда максимальное расстояние между читающей и записывающей головкой автоматов NA_1 и NA_2 равно длине очереди, которую необходимо зарезервировать при генерации автоматной сети.

Покажем теперь, что можно построить сетевой автомат $NA = (I, O, X, Z, f, h)$, такой, что его поведение будет совпадать с поведением последовательно соединенных NA_1 и NA_2 . Под эквивалентностью здесь и далее будем понимать совпадение отображений обобщенный вход — обобщенный выход.

Прежде всего укажем на одну специфическую особенность рассматриваемой проблемы. Автоматы NA_1 и NA_2 могут являться моделями различных устройств: в частности, если NA_1 моделирует медленное (по сравнению с NA_2) устройство, то с момента поступления на вход NA_1 некоторого символа до момента поступления вызванной им реакции на вход NA_2 последний может неоднократно поменять свое состояние за счет поступления на его внешние входы некоторых допустимых в данном состоянии символов. (Это обстоятельство убедительно иллюстрируется сетью Петри, представленной на рис. 9.15, если пополнить ее позициями, имитирующими входные символы, которые поступают по внешним каналам. Тогда разметка такой сети может меняться за счет изменения разметки только модели NA_2 .) Учет этого эффекта чрезвычайно важен для практических приложений.

Для учета этого обстоятельства поступим следующим образом. Пусть x — состояние NA , такое, что $y = f(x, u)$ и $z = h(x, u)$ (входные и выходные каналы сейчас неважны, поэтому их опускаем). Тогда введем дополнительное (транзитное) состояние xu , обладающее следующим свойством: $xu = f(x, u)$, $\epsilon = h(x, u)$, $y = f(xu, \epsilon)$, $z = h(xu, \epsilon)$. Соответствующая иллюстрация приведена на рис. 9.16. Заметим при этом, что пребывая в состоянии xu автомат NA не реагирует на остальные входы, как это, возможно, было в состоянии x , т.е. переход $x \rightarrow xu \rightarrow y$ неделим для данного автомата. Вообще говоря, именно такая интерпретация поведения автомата принята при описании его сетью Петри (рис. 9.15).



Рис. 9.16. Введение транзитного состояния

Пусть теперь автоматы NA_1 и NA_2 преобразованы так, как сказано выше. Построим эквивалентный NA в соответствии со следующей процедурой свертки.

Шаг 1. Построение объединенного автомата.

Построим $\overline{NA} = (I, O, U, X, f, h)$,

где

$$I = I_1 \cup (I_2 - I_2')$$

$$\begin{aligned} O &= (O_1 - O'_1) \cup O'_2, \\ U &= U_1 \cup U'_2, \\ X &= X_1 \times X_2. \end{aligned} \quad (9.20)$$

Функции переходов и выходов строятся следующим образом. Пусть $x = (p, q)$ и $y = (r, s)$, $x, y \in X_0$. Тогда $(x, v) \xrightarrow{f} y$, если $(p, v) \xrightarrow{h_1} r$ либо $(q, v) \xrightarrow{h_2} s$. Аналогично строится \bar{h} : $(x, v) \xrightarrow{\bar{h}} w$, если $(p, v) \xrightarrow{h_1} w$ либо $(q, v) \xrightarrow{h_2} w$.

Шаг 2. Свертка дуг.

Построим теперь автомат $\bar{N}\tilde{A}$, отличающийся от $\bar{N}A$ лишь отображениями \tilde{f} и \tilde{h} . Пусть отображения \bar{f} и \bar{h} автомата $\bar{N}A$ содержат следующие отображения:

$$\begin{aligned} (x, v) \xrightarrow{\bar{f}} y, \quad (x, v) \xrightarrow{\bar{h}} \alpha, \\ (y, \alpha) \xrightarrow{\bar{f}} z, \quad (y, \alpha) \xrightarrow{\bar{h}} \varepsilon. \end{aligned} \quad (9.21)$$

Тогда дополним \bar{f} и \bar{h} следующими элементами:

$$(x, v) \rightarrow z, \quad (x, v) \rightarrow \varepsilon. \quad (9.22)$$

(Здесь, к сожалению, нельзя ввести композицию отображений, поскольку функции f_1, h_2 и f_2, h_2 имеют, вообще говоря, попарно разные области определения из-за наличия внешних входов.)

Выполняя эту процедуру для всех элементов отображений \bar{f} и \bar{h} , удовлетворяющих условиям (9.21), получаем отображения \tilde{f} и \tilde{h} .

Шаг 3. Удаление внутренних дуг.

Этот шаг в построении автомата $\bar{N}A$ состоит в удалении дуг, содержащих ссылки на внутренние каналы, соединяющие NA_1 и NA_2 .

Более точно это означает следующее. Если отображение \tilde{f} содержит элементы $(x, u, i) \rightarrow y$, где $i \in I'_2$, то они удаляются. Аналогично, если \tilde{h} содержит отображение $(x, u, i) \rightarrow (z, o)$, где либо $i \in I'_2$, либо $o \in O'_1$, то оно удаляется.

Шаг 4. Минимизация.

Здесь осуществляется стандартная процедура, минимизирующая число состояний сетевого автомата. Полученные в результате отображения f и h являются искомыми функциями переходов и выходов автомата $\bar{N}A$.

Итак, описанная процедура свертки является корректной в том смысле, что атрибуты полученного автомата $\bar{N}A$ не зависят от порядка, в котором строятся дополнительные дуги на втором шаге.

Заметим, что полученный автомат может быть недетерминированным, даже если оба автомата NA_1 и NA_2 детерминированы.

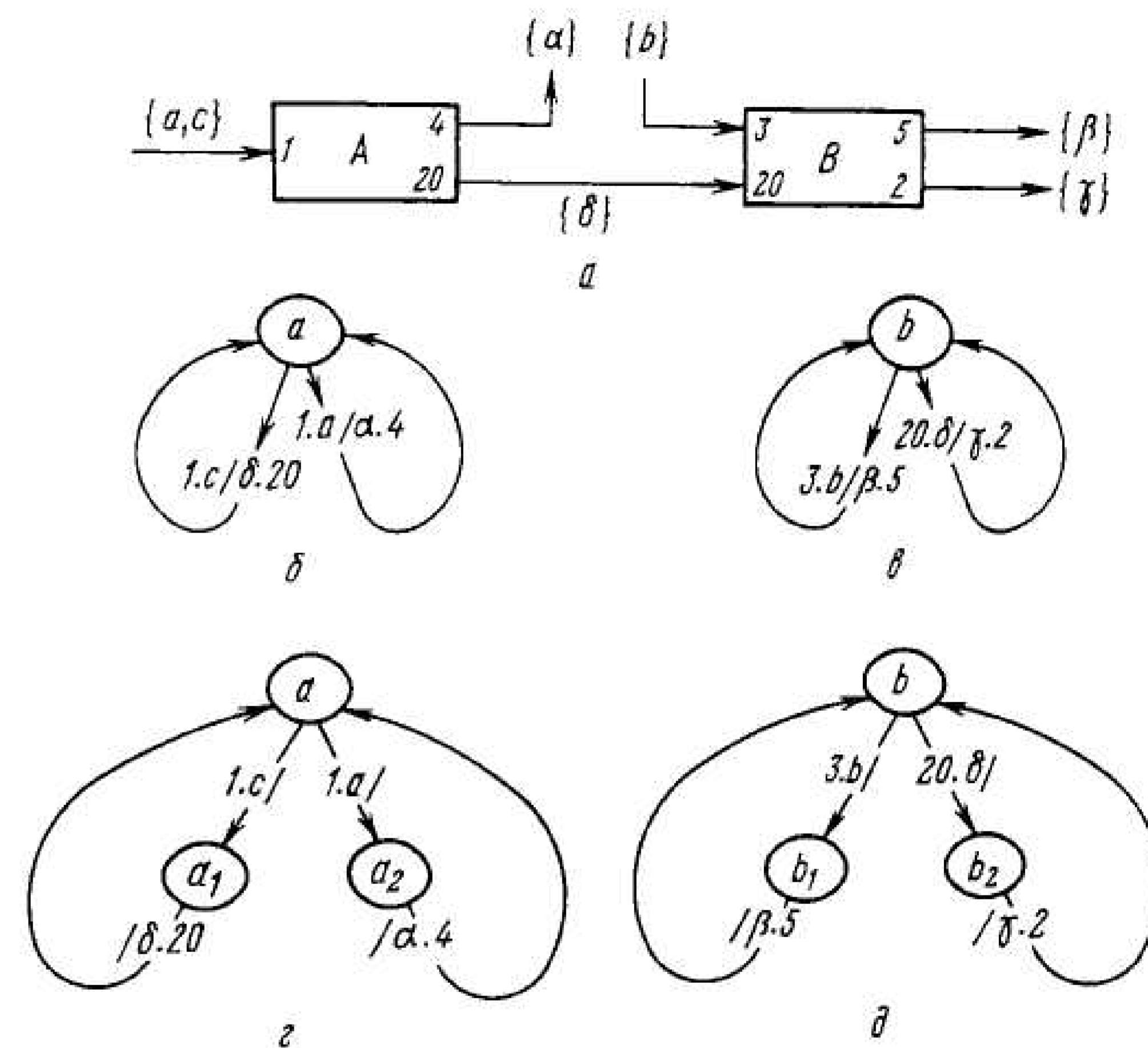


Рис. 9.17. Два последовательно соединенных сетевых автомата: а — топология; б, в — графы A и B; г, д — модифицированные графы автоматов A и B

Пример 9.3. Рассмотрим пример применения описанной процедуры свертки двух последовательно соединенных автоматов A и B, изображенных на рис. 9.17, а. Их графы переходов — выходов, а также модифицированные графы представлены на рис. 9.17 б, в и г, д соответственно. Результирующий автомат показан на рис. 9.18. Пусть ab — начальное состояние автомата AB (рис. 9.8, а). Тогда реакции на входные последовательности ab, ba, cb, bc имеют вид

$$\begin{aligned} ab &\rightarrow \{\alpha\gamma, \gamma\alpha\}, \\ ba &\rightarrow \{\alpha\gamma, \gamma\alpha\}, \end{aligned}$$

$$bc \rightarrow \{\gamma\beta\},$$

$$cb \rightarrow \{\beta\gamma, \gamma\beta\}.$$

Результирующий автомат является недетерминированным по выводу. Кроме того, реакции на ab и ba совпадают (т.е. символы a и b на входные каналы 1, 3 автомата АВ могут поступать в любой последовательности), а реакции на bc и cb различны (рис. 9.18, б).

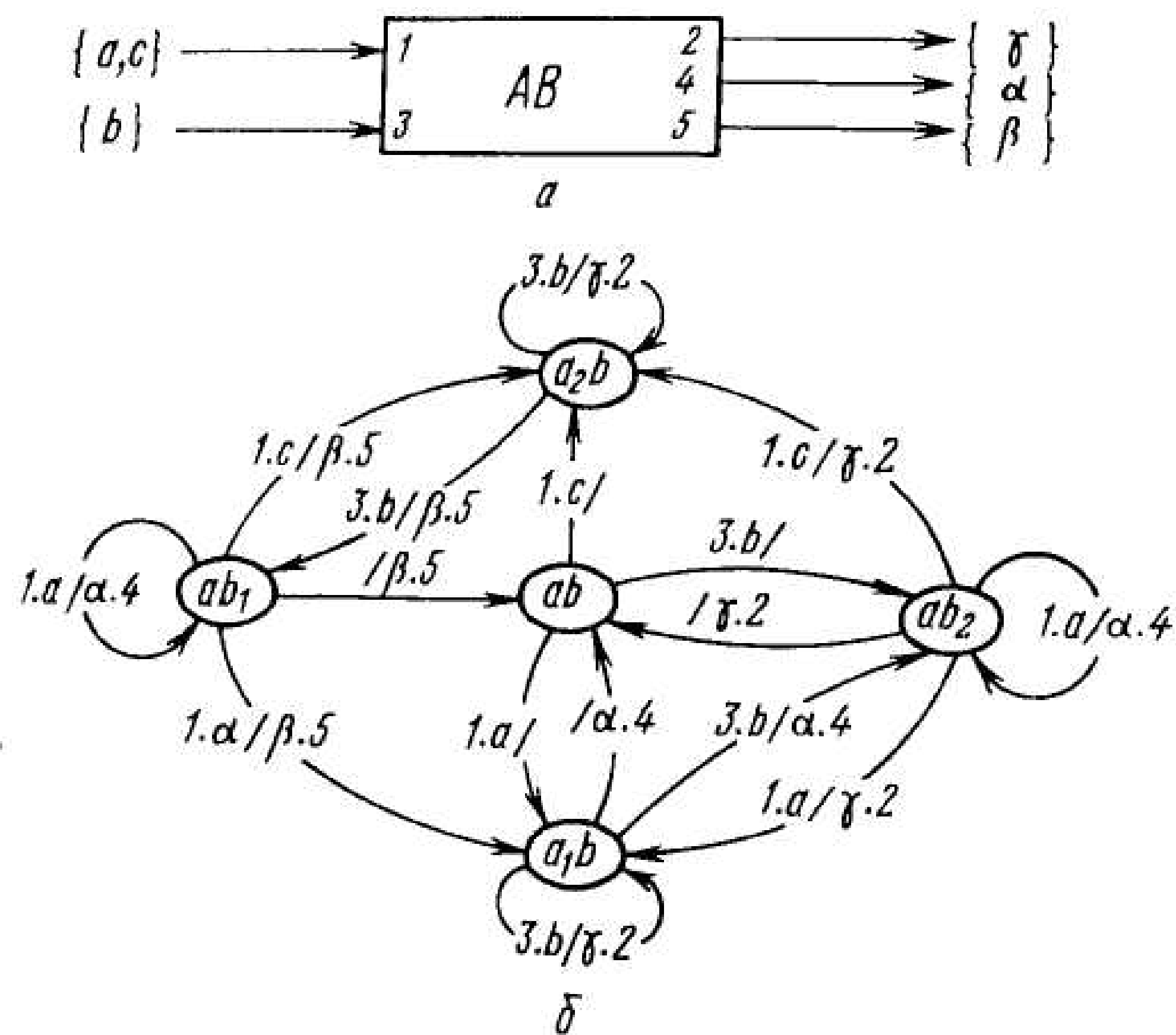


Рис. 9.18. Результирующий автомат АВ:
 а — входы — выходы АВ; б — граф переходов — выходов

9.5.2. Соединение с обратной связью

Пусть два автомата А и В соединены так, как это показано на рис. 9.19, а. Тогда нетрудно видеть, что эту конструкцию можно заменить на эквивалентную (рис. 9.19, б, в), считая, что А и В соединены последовательно. Ясно, что достаточно рассмотреть случай соединения с обратной связью, представленный на рис. 9.20. Проблему построения сетевого автомата, эквивалентного структуре, указанной на рис. 9.20, позволяет решить описанная выше процедура, состоящая в выполнении шагов 2, 3, 4 (шаг 5 опущен, поскольку выход автомата соединен с его собственным входом).

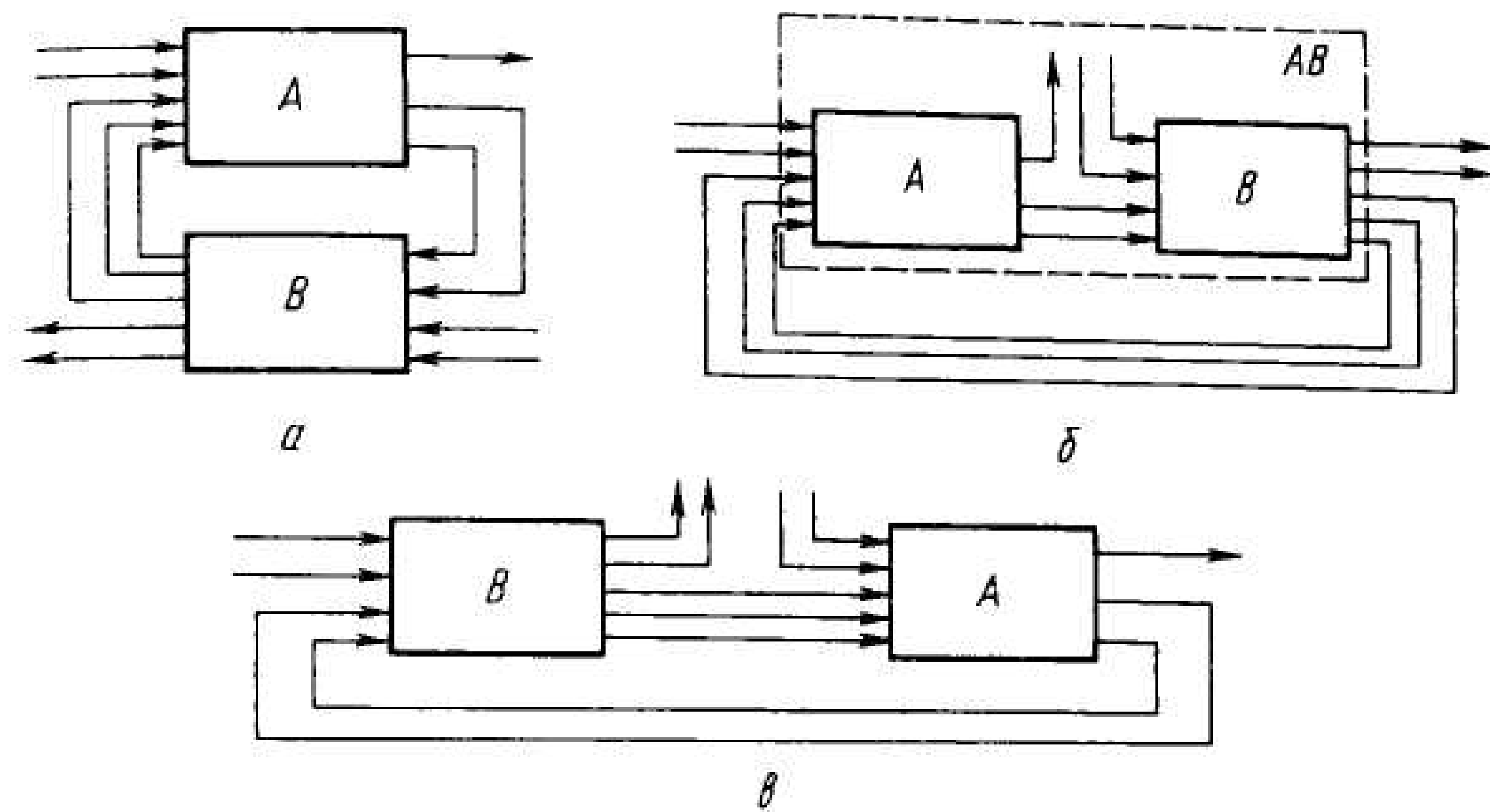


Рис. 9.19. Соединение с обратной связью

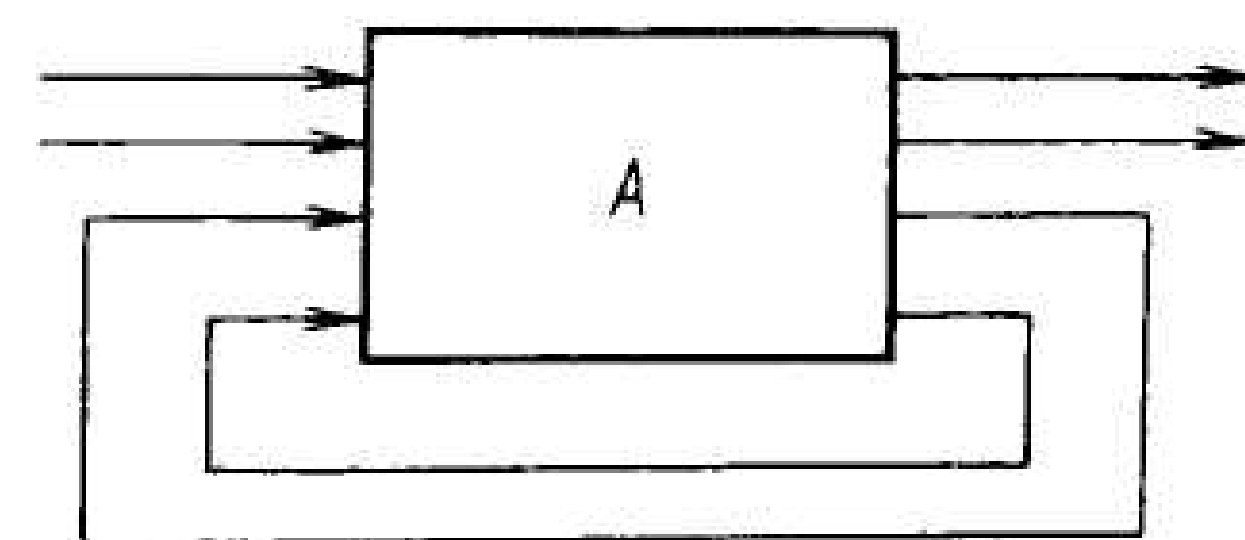


Рис. 9.20. Простые соединения с обратной связью

9.5.3. Сеть автоматов и эквивалентный автомат

Назовем *сетью автоматов L* связный мультиграф

$$L = (E, C), \tag{9.23}$$

где $E = \{E_1, E_2, \dots, E_N\}$ — множество вершин графа; $C = \{c_1, c_2, \dots, c_M\}$ — множество направленных дуг, $c_i = (E_j, E_k)$.

Вершина графа интерпретируется как сетевой автомат, а дуга — как канал связи между автоматами, используемый для обмена элементами входных / выходных алфавитов.

Если множество вершин E содержит специальный символ ϵ и по крайней мере одна дуга содержит этот символ в качестве вершины, то такую сеть называют разомкнутой. В противном случае сеть называется замкнутой. Дугу $c \in C$, такую, что $c = (\epsilon, E_i)$ ($c = (E_i, \epsilon)$), $E_i \in E$, называют входным (выходным) каналом сети. Дуги $c = (a, b)$; $a \neq \epsilon$, $b \neq \epsilon$, называют внутренними каналами.

Функционирование сети заключается в параллельном функционировании всех составляющих его автоматов, поведение каждого из которых в свою очередь определяется его текущим состоянием, а также состоянием входных каналов. Пример автоматной сети приведен на рис. 9.21.

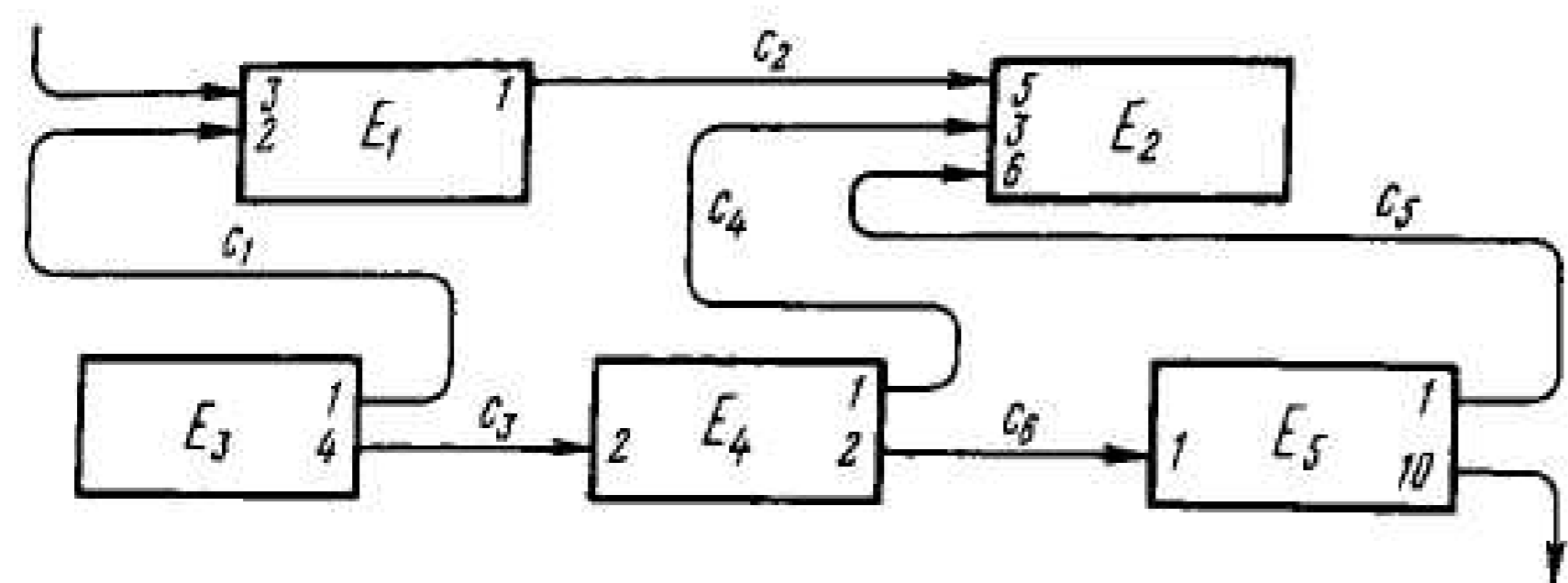


Рис. 9.21. Пример автоматной сети

Построим сетевой автомат NA , эквивалентный сети $L = (E, C)$. Пусть два сетевых автомата NA_1 и NA_2 соединены между собой произвольным образом (рис. 9.22, а), т.е. каждый из них замкнут обратной связью, и, кроме того, соединены их входы и выходы. Тогда применение описанной выше процедуры свертки позволяет построить эквивалентный автомат NA , в описании которого присутствуют только внешние входы и выходы (рис. 9.22, б).

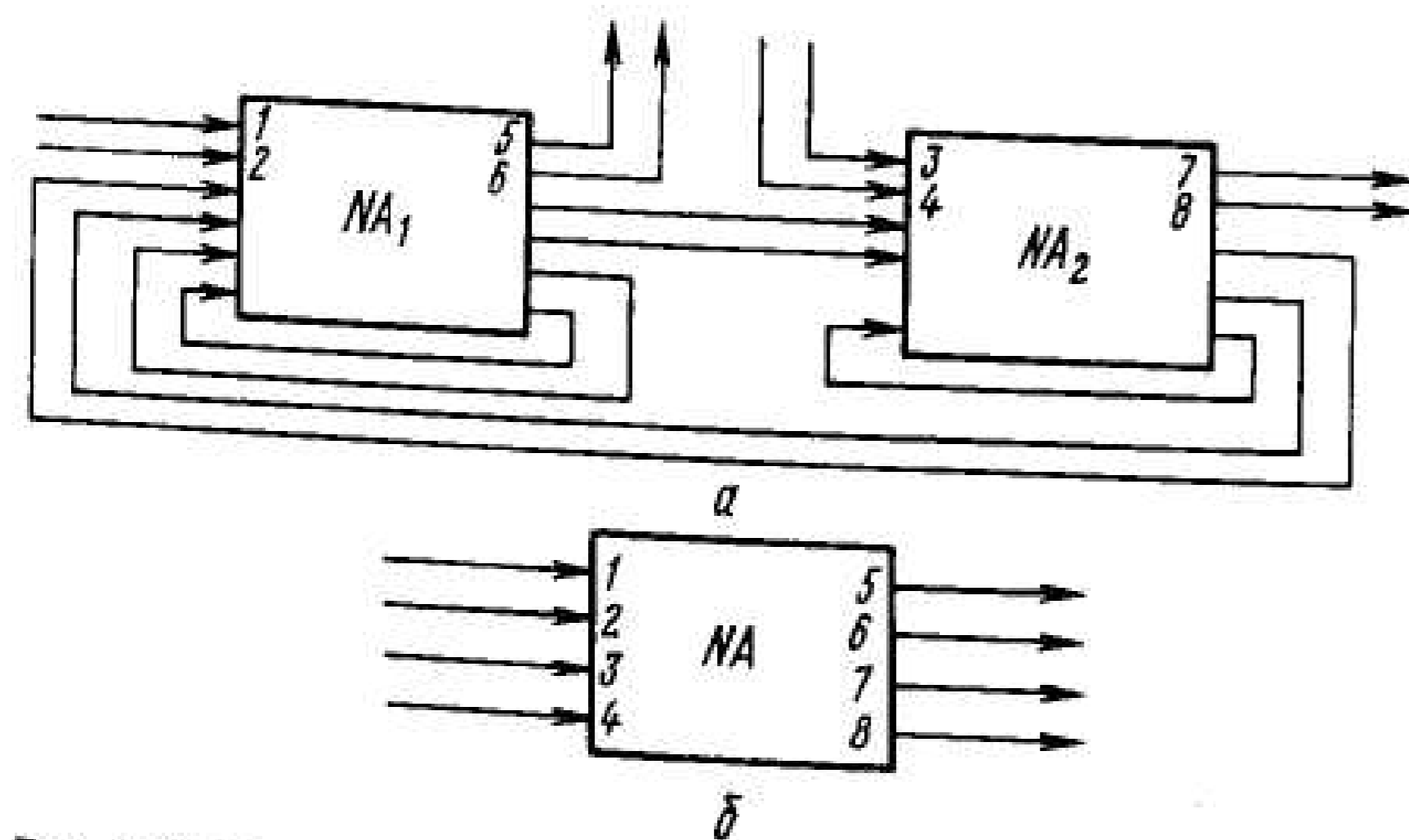


Рис. 9.22. Произвольное соединение: а — двух сетевых автоматов; б — эквивалентный автомат

Пусть теперь $A \in E$ — автомат, входящий в L . Тогда, если $B \in E$ соединен с A , то, построив эквивалентный автомат AB в соответствии

с процедурой свертки, получим эквивалентную сеть $L_1 = (E_1, C_1)$, $E_1 = E - A - B + AB$. Эту процедуру следует повторять до тех пор, пока получаемая сеть содержит пару автоматов, имеющих общие каналы. Поскольку граф (9.23) является связным, то процесс свертки остановится тогда, когда результирующий граф будет состоять из одного автомата (диаграмма результирующего автомата может быть, однако, несвязной). Поскольку на каждом шаге сеть заменяется на эквивалентную, то полученный в результате автомат NA эквивалентен начальной сети L . Ясно также, что поскольку отношение эквивалентности рефлексивно и транзитивно, то разный порядок выбора автоматов из L для осуществления операции свертки приводит к получению эквивалентных сетевых автоматов.

9.6. Метод управления сложной робототехнической системой

Прежде чем перейти к описанию управляющей структуры, рассмотрим вопрос о том, каким образом строят управление одним объектом, описанным как конечный автомат.

Обсудим коротко проблему управления одним объектом, имея в виду использование этого подхода для построения управляющей сети. Рассматриваемые автоматы имеют один вход и один выход.

Пусть автомат O , интерпретируемый как объект управления, описывается следующим образом:

$$O = (U, X^O, Z, f^O, h^O). \quad (9.24)$$

Кроме того, автомат R , интерпретируемый далее как регулятор, описывается так:

$$R = (Z, X^R, U, f^R, h^R, x_0^R). \quad (9.25)$$

Если вход и выход автомата R соединены с выходом и входом автомата O соответственно, то такую систему называют автоматным контуром управления [81] (рис. 9.23). Автоматы O и R обмениваются символами входных / выходных алфавитов, реализуя таким образом некоторое поведение $L(O)$ и $L(R)$.

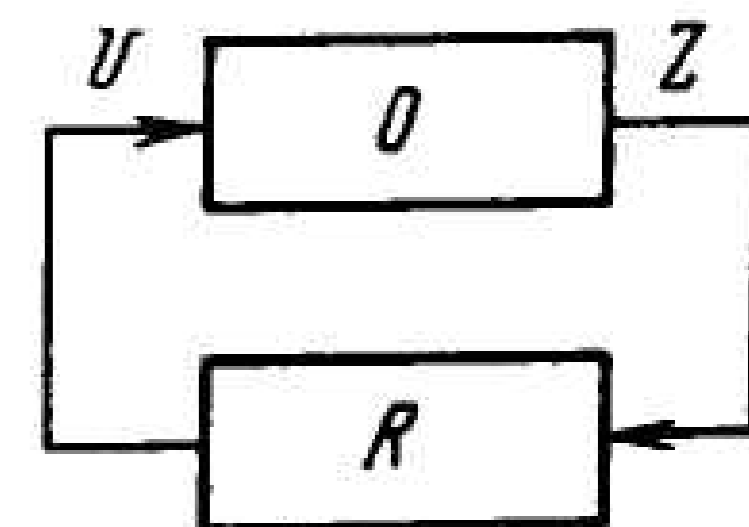


Рис. 9.23. Управление объектом O с помощью регулятора R (автоматный контур управления)

На рис. 9.24 представлена интерпретация взаимодействия двух автоматов в терминах читающих — записывающих устройств, а на рис. 9.25 — в терминах сети Петри.

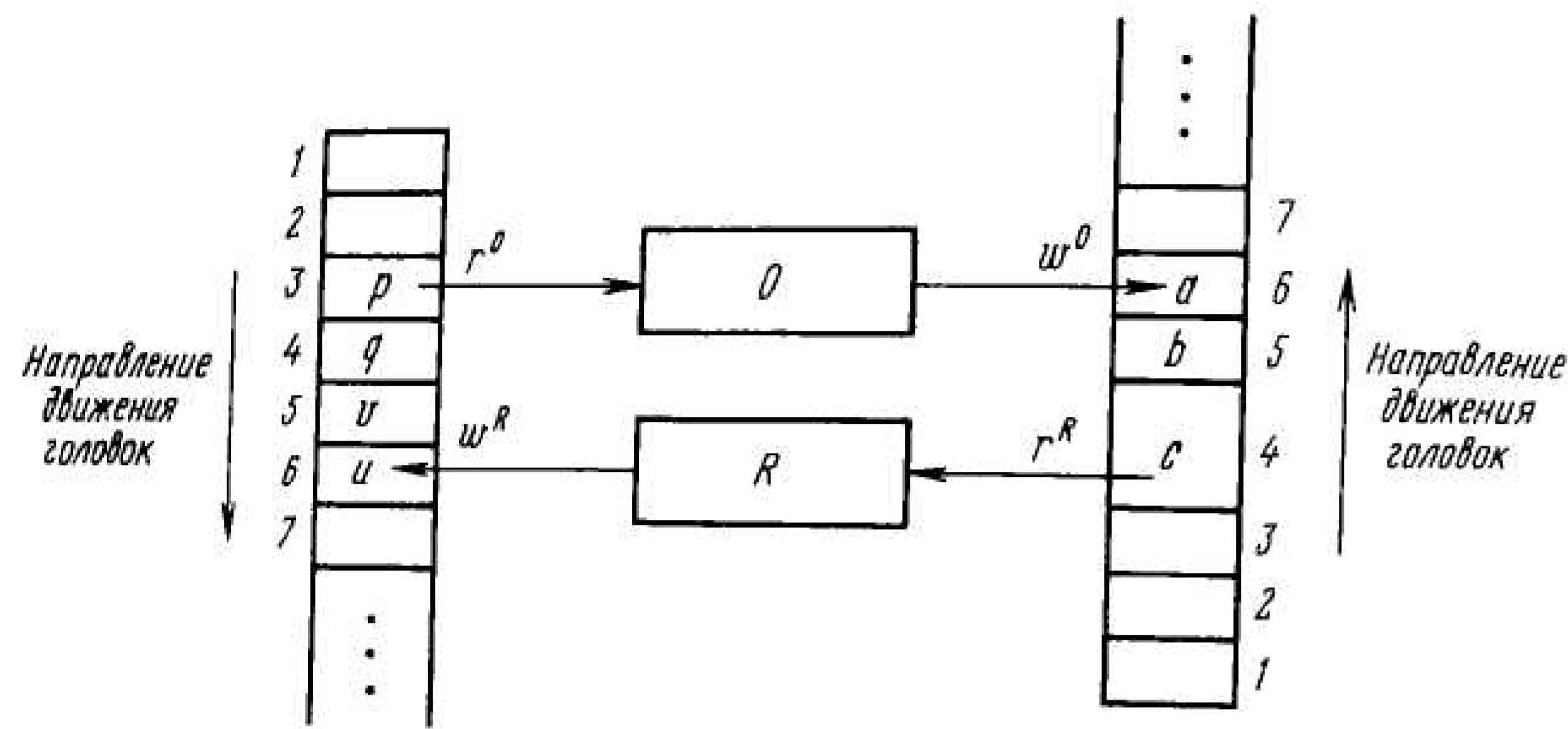


Рис. 9.24. Модель взаимодействующих автоматов в виде записывающих — читающих устройств

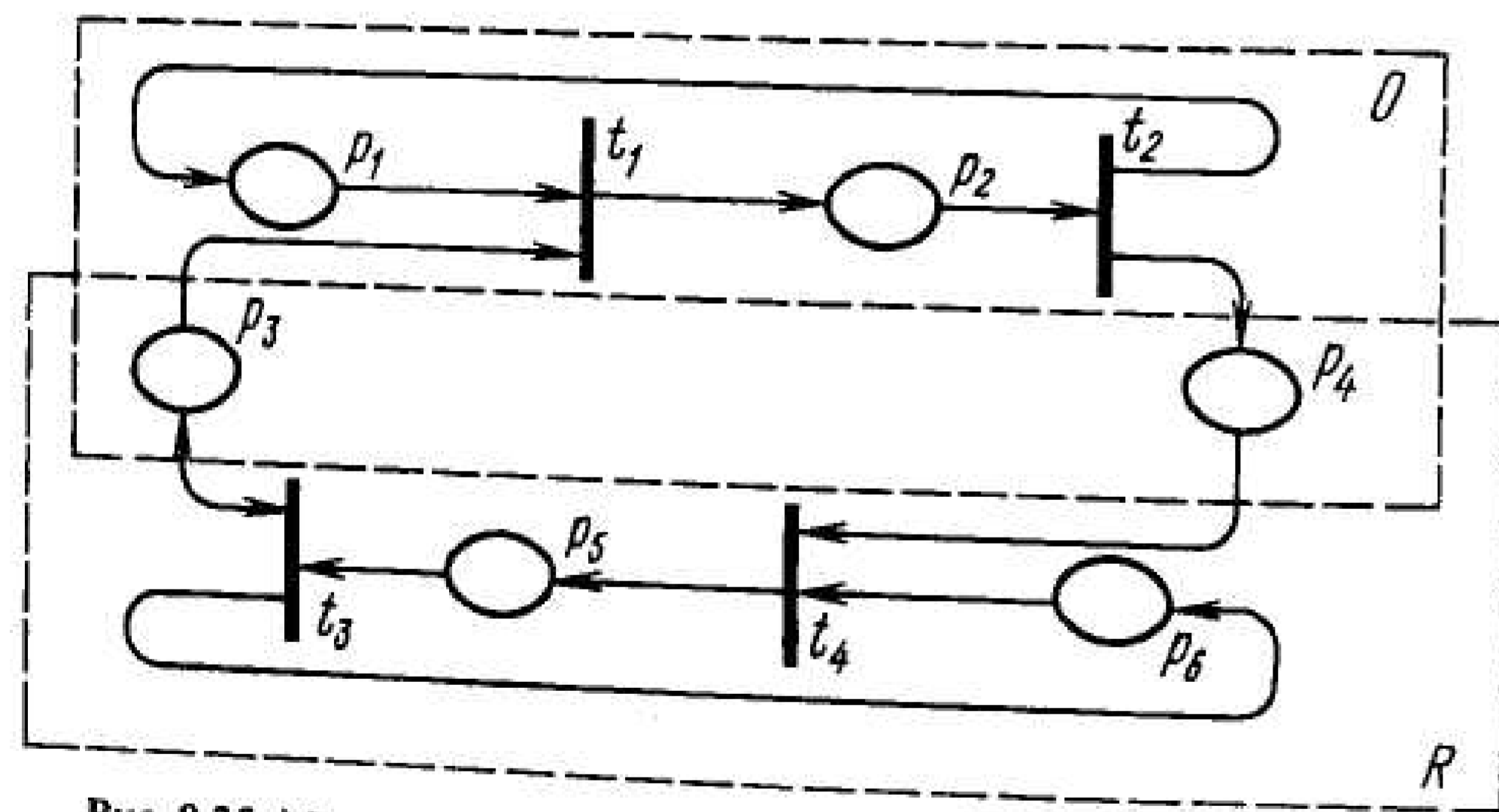


Рис. 9.25. Модель взаимодействующих автоматов в виде сети Петри

Пусть теперь $L(E, C)$ — сеть автоматов (9.23). Пусть далее $CS = (S, T)$ — сложная система, как это определено в § 9.1, и $NA = \{NA_i\}$ — множество моделей подсистем $\{S_i\}$. Если при этом $NA \in E$, тогда подграф

$$L^C = (E^C, C^C), \quad (9.26)$$

где $E^C = E - NA$ — управляющая структура для CS .

Ясно, что будучи соединенной с реальными объектами, управляющая структура обеспечит некоторое поведение подсистем, зависящее от топологии управляющей структуры и атрибутов сетевых автоматов, входящих в ее состав.

Рассмотрим теперь два примера построения управляющих структур для сложных робототехнических систем.

Пример 9.4. Пусть два робота Rb_1 и Rb_2 перекладывают деталь из накопителя S на два конвейера C_1 и C_2 (рис. 9.26).

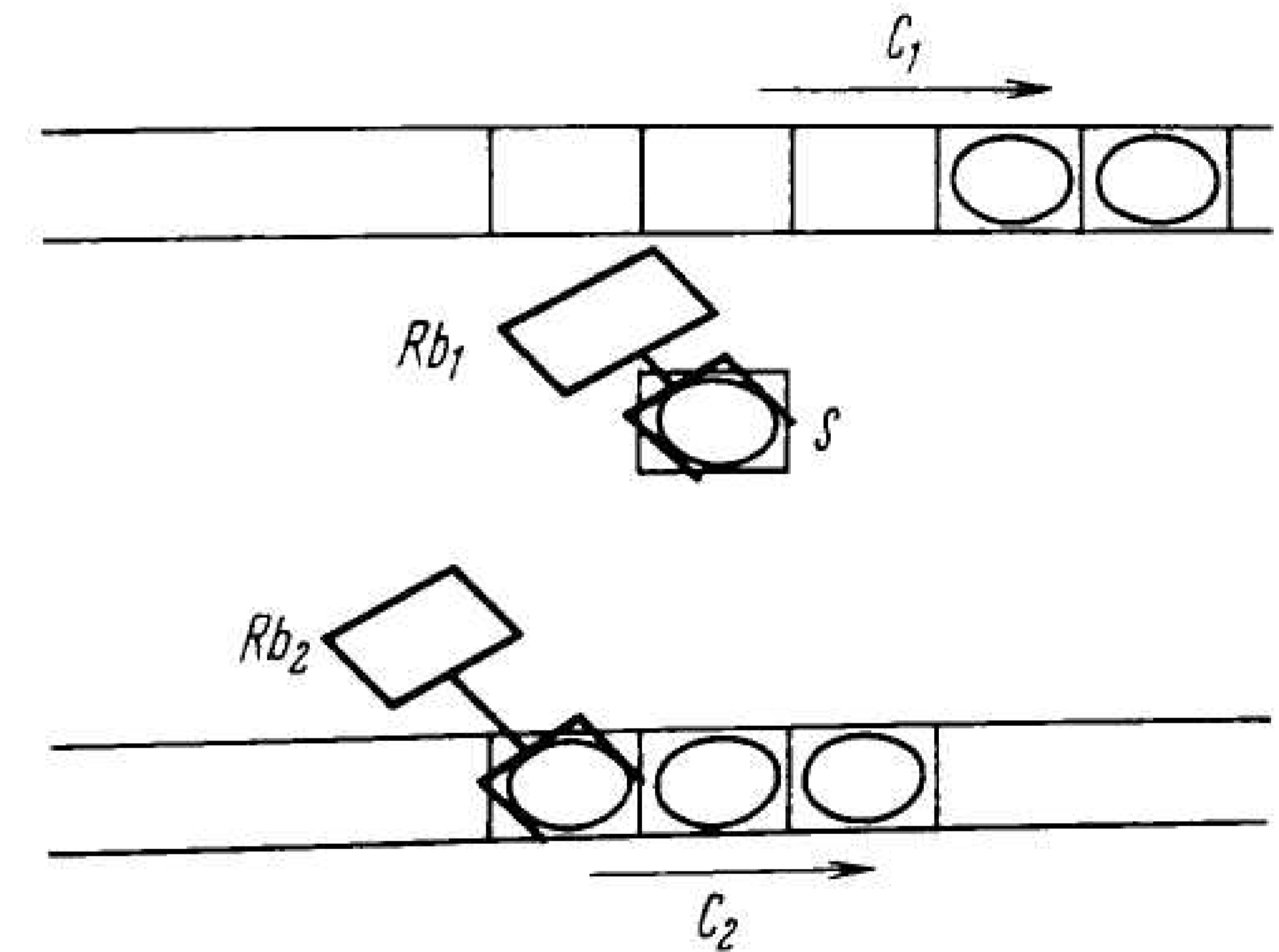


Рис. 9.26. Простая РТС

Рабочие зоны Rb_1 и Rb_2 имеют общую точку в S . Модель выполняемой операции T в терминах сети Петри представлена на рис. 9.27. Интерпретация позиций здесь следующая:

- p_0 — состояние опасной зоны;
- p_1, p_2 — роботы Rb_1, Rb_2 ожидают освобождения опасной зоны S ;
- p_3, p_4 — роботы Rb_1, Rb_2 движутся в опасной зоне;
- p_5, p_6 — роботы Rb_1, Rb_2 движутся в безопасной зоне.

Ясно, что рассматриваемая система $(\{Rb_1, Rb_2\}, T)$ является сложной.

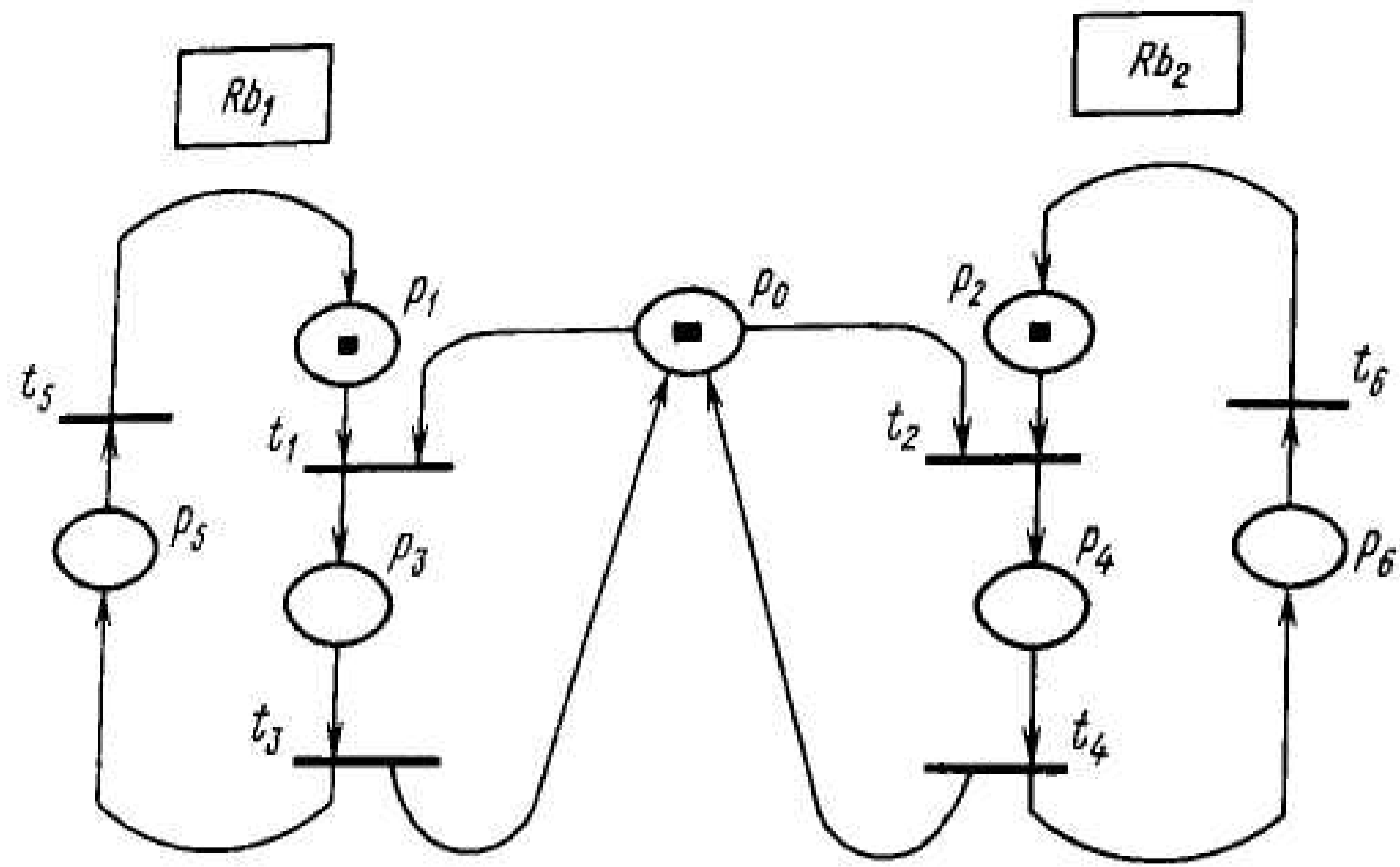


Рис. 9.27. Технологический процесс

В соответствии с изложенным выше роботы Rb_1, Rb_2 опишем как конечные автоматы

$$Rb_i = (I_i, O_i, U_i, X_i, Z_i, f_i, h_i), \quad i=1, 2,$$

со следующими атрибутами:

$$I_i = \{i0\}; \quad O_i = \{i0\}; \quad U_i = \{g\}; \quad X_i = \{0, 1, 2\}; \quad Z_i = \{y, Y\}, \quad i=1, 2.$$

Функции f_i и h_i заданы диаграммой, представленной на рис. 9.28. Каждый из роботов Rb_i воспринимает только одну команду g , в результате которой он перемещается к накопителю S , захватывает деталь, переносит и устанавливает ее на конвейер C_i . Сигналы y и Y на выходе робота появляются тогда, когда он освобождает опасную зону и завершает выполнение одного цикла соответственно. Построим управляющую структуру в виде трех автоматов, два из которых Reg_1 и Reg_2 являются логическими регуляторами роботов, а третий Res обеспечивает слежение за ресурсом.

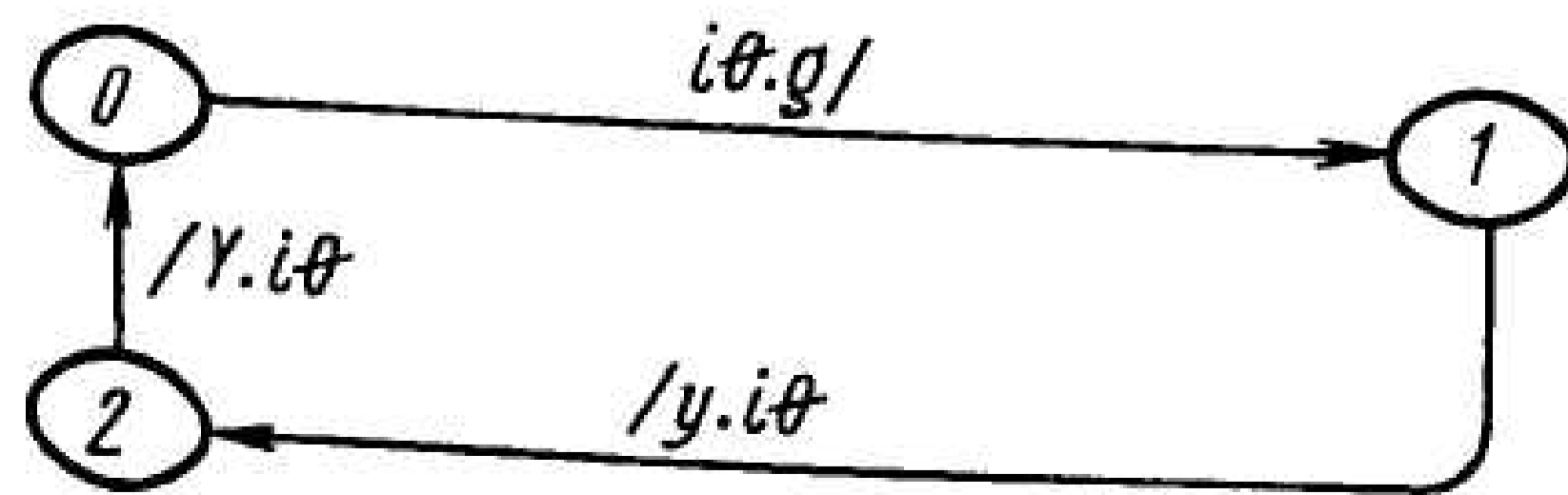


Рис. 9.28. Модель роботов Rb_i

На рис. 9.29 представлена топология управляющей структуры (а), а также диаграммы всех входящих в ее состав автоматов (б, в). Структура функционирует следующим образом. Регулятор каждого робота посылает запрос автомату-ресурсу на занятие опасной зоны. Если зона свободна, то этот запрос удовлетворяется, опасная зона переходит в состояние «занято» и регулятор посылает команду роботу начать транспортную операцию. После того, как робот выйдет из опасной зоны, он информирует об этом регулятор, который в свою очередь переводит опасную зону в состояние «свободно» и ждет окончания выполнения операции. Далее цикл повторяется. Управляющая структура функционирует полностью в соответствии с заданным технологическим процессом.

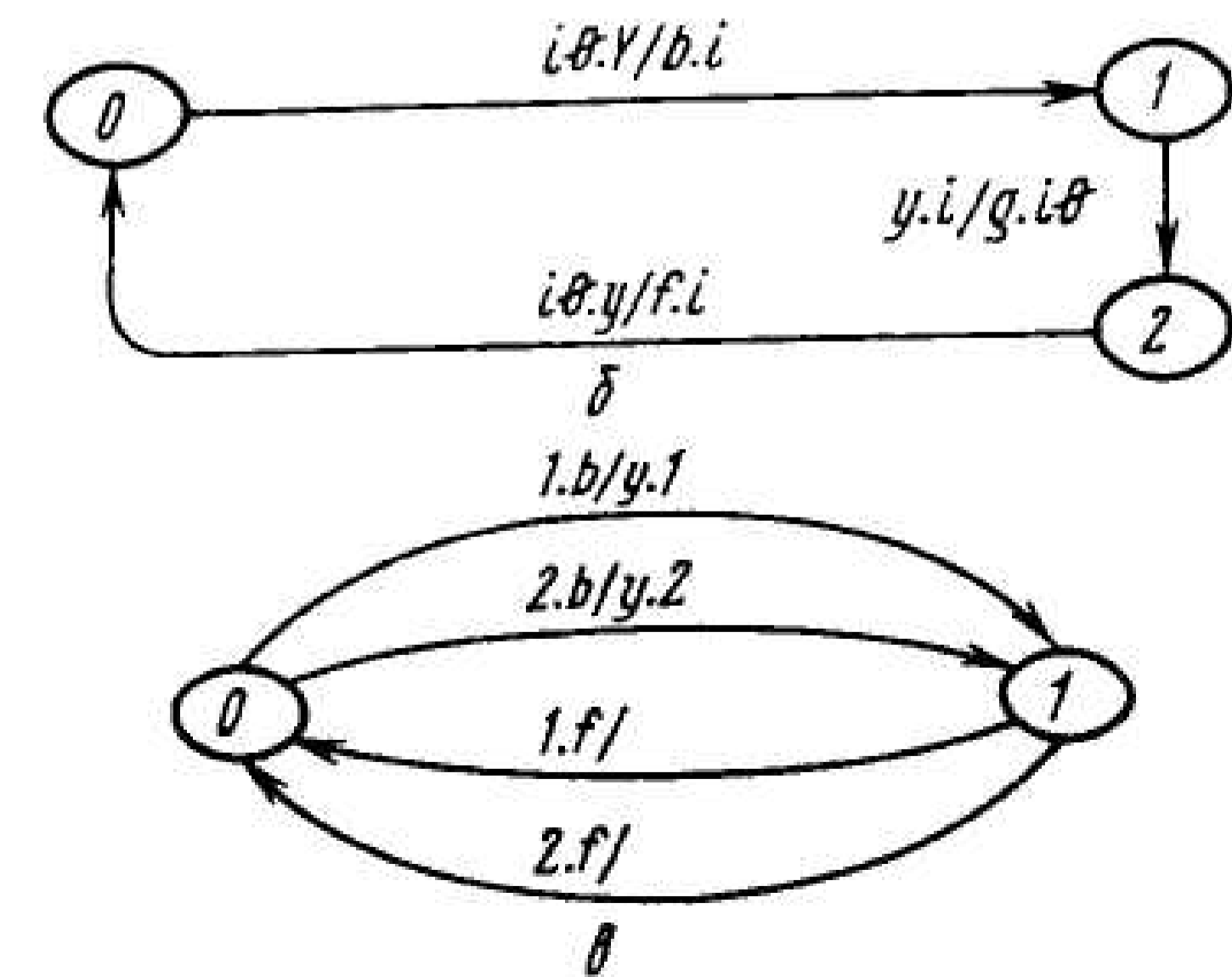
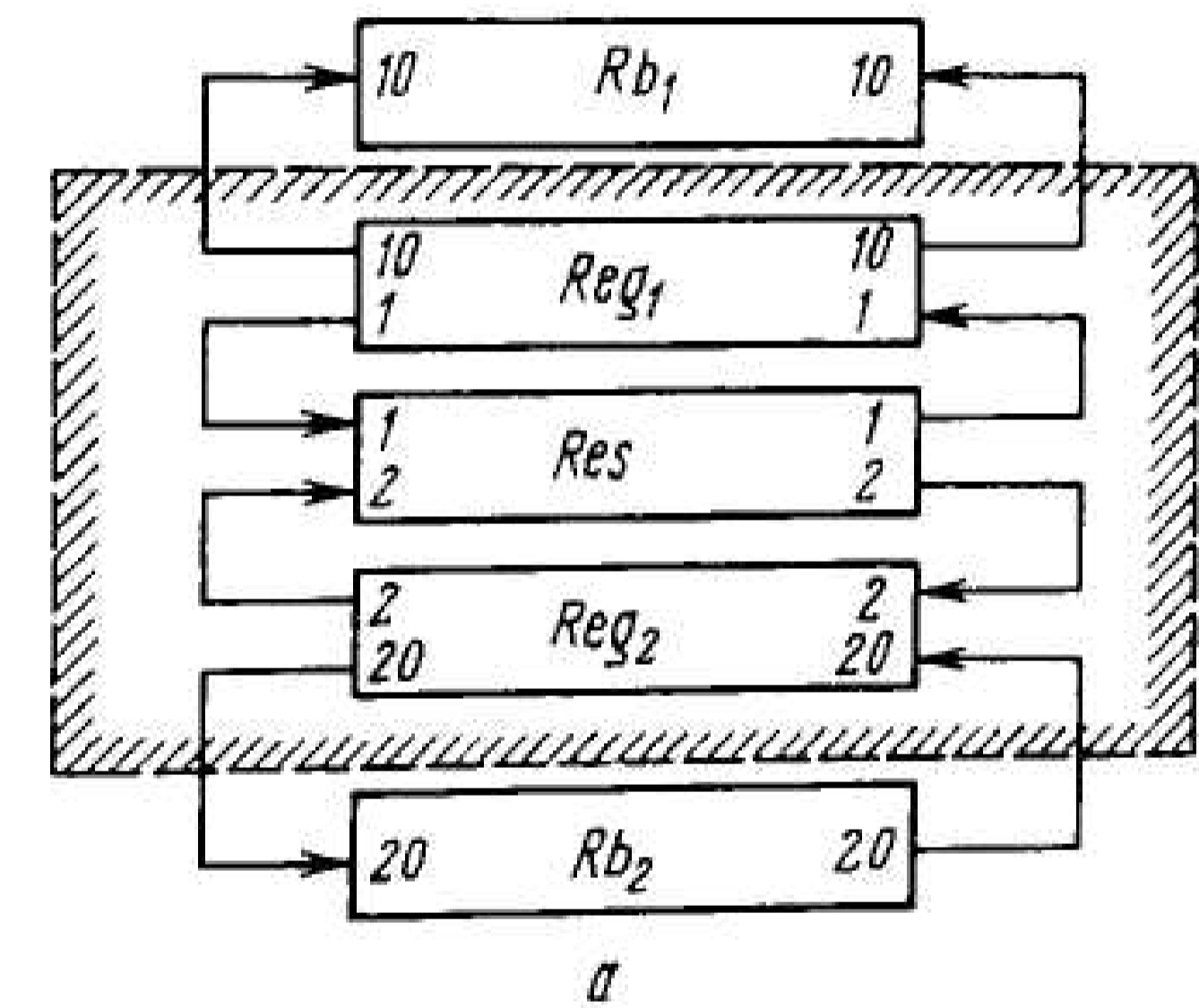


Рис. 9.29. Управляющая структура: а — топология; б — диаграмма регуляторов; в — диаграмма автомата, следящего за ресурсом

Построим автомат, эквивалентный управляющей структуре, используя описанный в п. 9.5.3 алгоритм. На рис. 9.30 показано включение результирующего автомата $Sup = Res + Rb_1 + Rb_2$ (а) и его диаграммы (б-д). Из рисунка ясно, что, диаграмма является несвязной. Это вызвано тем, что не все комбинации начальных состояний автоматов Reg_1 , Reg_2 и Res (см. рис. 9.29) являются допустимыми. Так, например, граф на рис. 9.30, в соответствует ситуации, когда опасная зона свободна, тем не менее в ней находится один из роботов. Приемлемой комбинацией состояний является 022 (зона свободна, оба робота выполнили задание). Соответствующая диаграмма приведена на рис. 9.30, б. Как видно, она очень проста и допускает прозрачную интерпретацию.

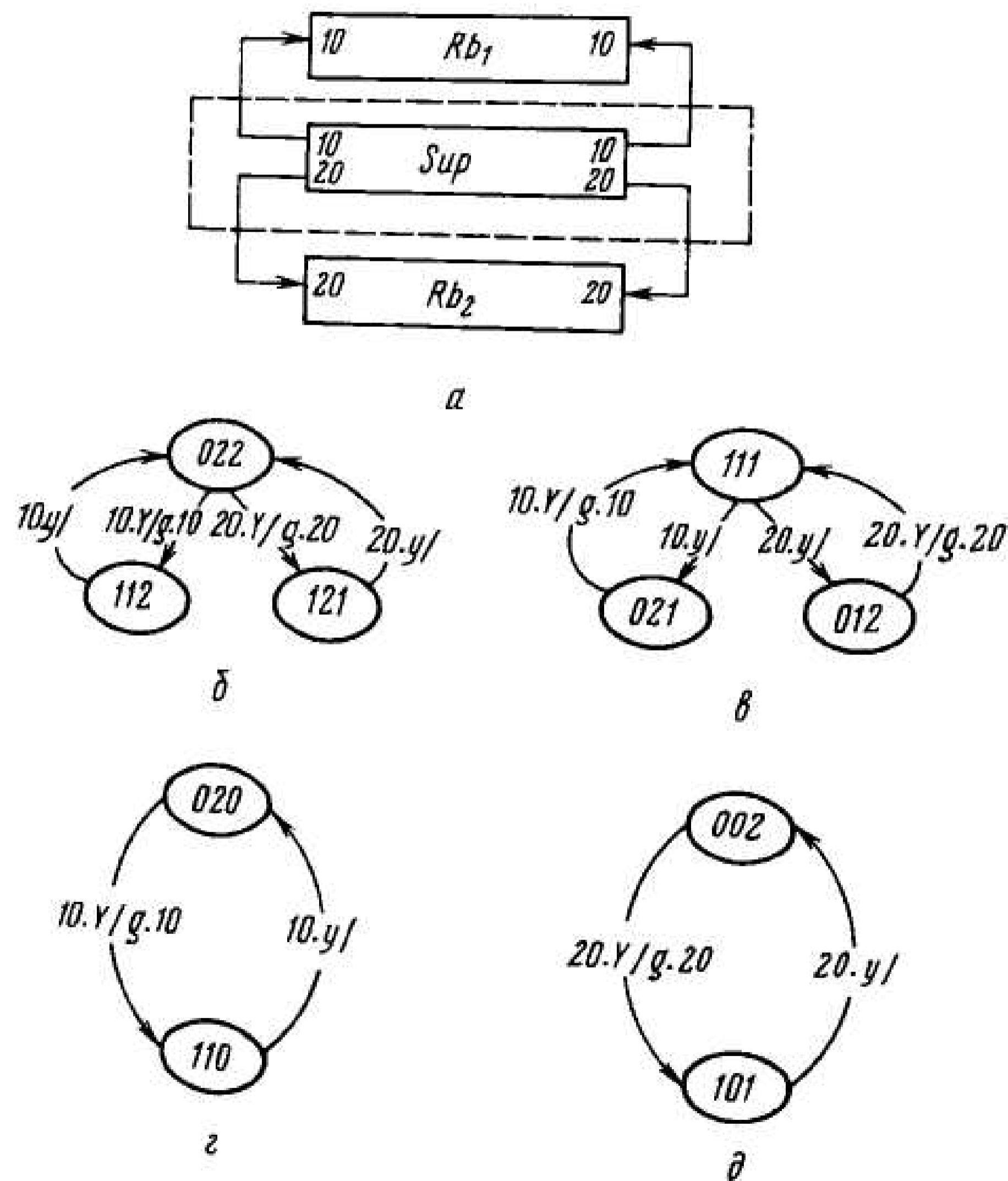


Рис. 9.30. Результирующий автомат: а — включение в сложную систему; б, в, г, д — диаграммы переходов

Пример 9.5. Построим управляющую сеть для сборочного модуля, показанного на рис. 9.3. На рис. 9.31 изображена модель сборочного процесса в виде сети Петри (язык сетей Петри используется только в целях описания задания). На рисунке принята следующая интерпретация позиций:

- p_1, p_3, p_7, p_{13} — робот получил сигнал, что конвейер переместился на один шаг;
- p_2, p_6, p_{10}, p_{14} — робот выполняет операцию;
- p_5, p_8, p_{12} — робот успешно завершил выполнение операции;
- p_4 — ошибка при исполнении;
- p_7, p_{11} — ошибка при исполнении либо пропуск;
- p_{15} — укладка в тару готовой продукции;
- p_{16} — укладка в тару брака.

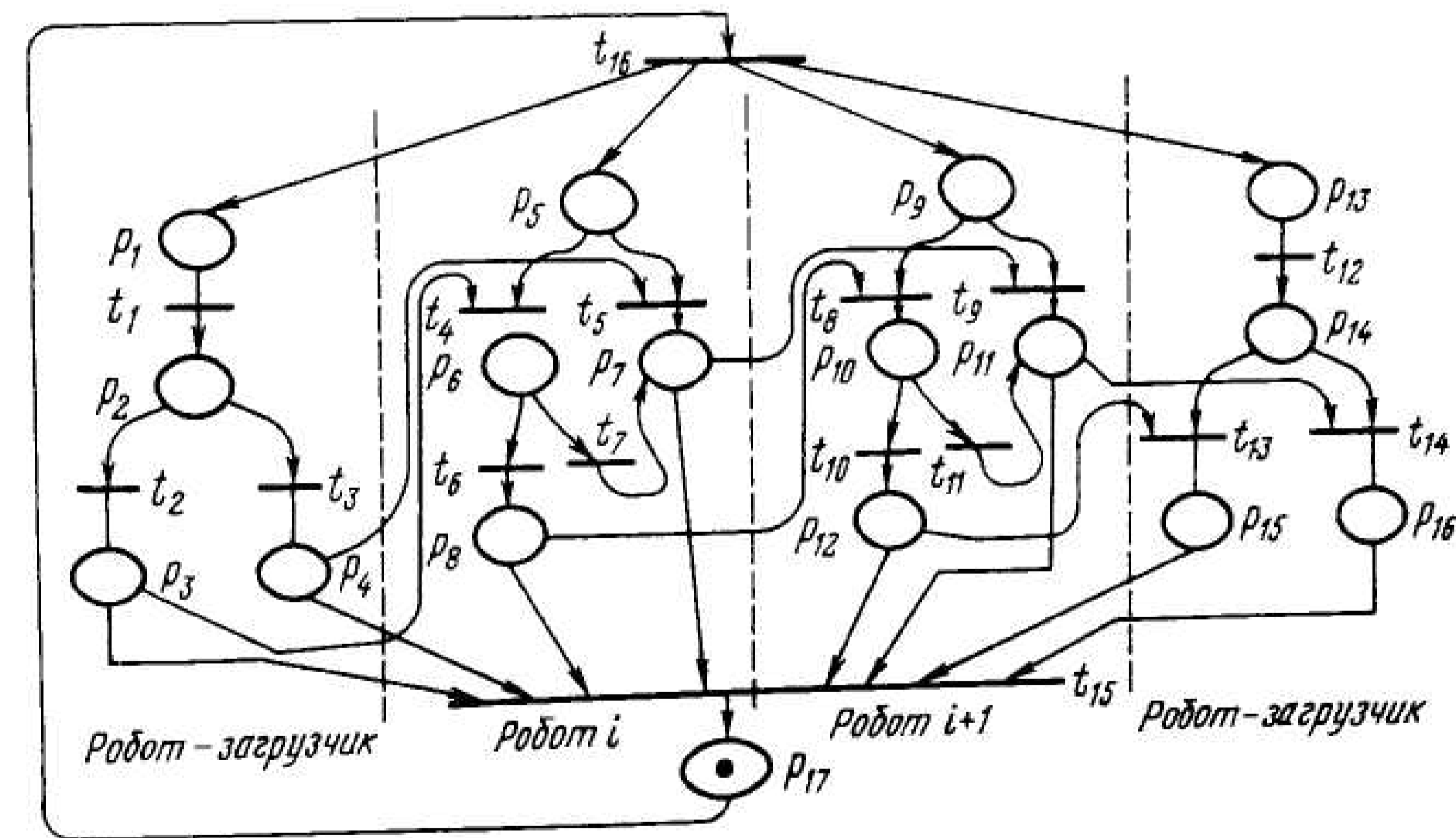


Рис. 9.31. Модель сборочного процесса (сеть Петри)

Топология управляющей структуры показана на рис. 9.32, а графы управляющих автоматов P_i — на рис. 9.33. Участвующие в описании P_i символы входного и выходного алфавитов имеют следующий смысл: t — робот завершил выполнение задания; r — робот готов к выполнению задания; S — конвейер завершил движение на один шаг;

Gr, Vr — сборочный процесс может быть продолжен или пропущен соответственно; Gr, Vr — успешное окончание сборки или ошибка соответственно; Rs — начало исполнения задания. Управляющая структура является многоуровневой: нижний уровень ($P_L, P_1, P_2, \dots, P_N, P_U$) обеспечивает логическое управление подсистемами, а верхний (Sup) — общую координацию подсистем.

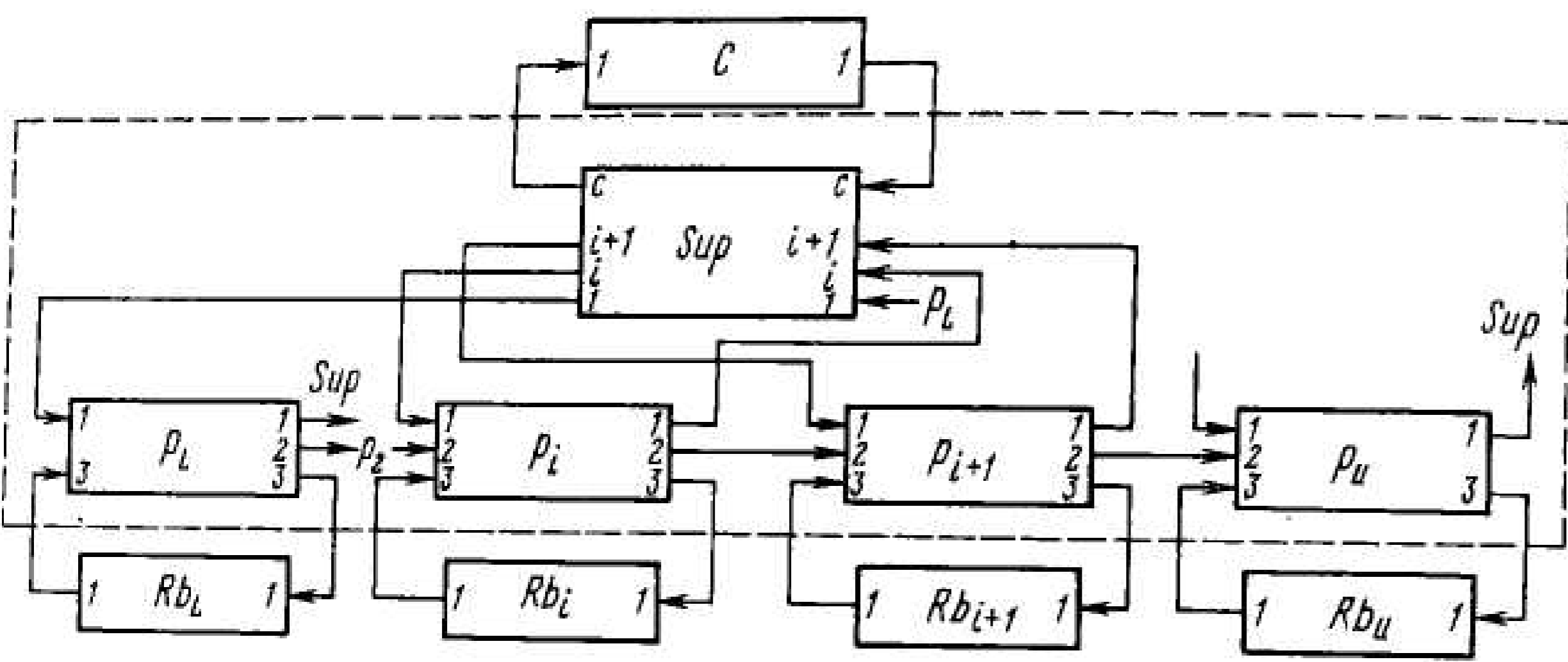


Рис. 9.32. Топология управляющей структуры

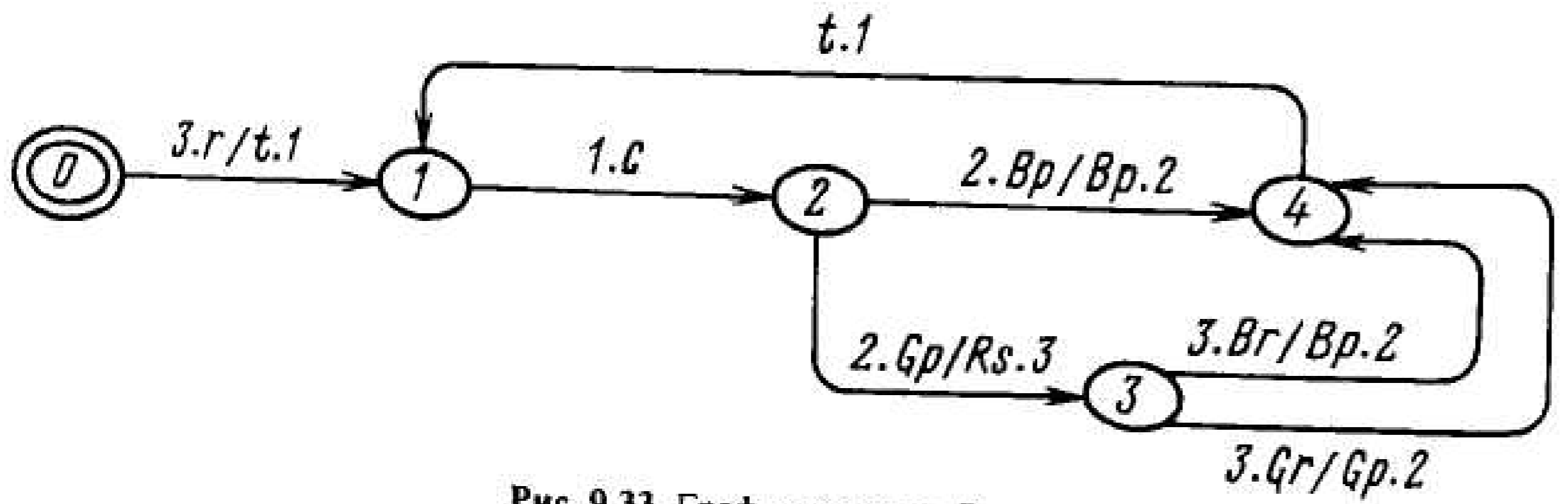


Рис. 9.33. Граф автоматов P_i

Контрольные вопросы и задания

1. Дайте определение сложной системы. Какие условия должны быть выполнены, чтобы многокомпонентную систему можно было назвать сложной? Что такое сложная РТС?
2. Что такое абстрактный конечный автомат? Что такое граф переходов — выходов?
3. Сформулируйте понятие сетевого автомата. Какова связь абстрактного автомата с N входами и K выходами и сетевого автомата?

4. Напишите программу, моделирующую сетевой автомат. Чем различаются программы, моделирующие разные сетевые автоматы? Если Вы знакомы с объектно-ориентированной технологией программирования, постройте класс АВТОМАТА и прокомментируйте функции конструктора и деструктора.

5. Сформулируйте понятие эквивалентности двух автоматов. Покажите, что процедура, приведенная в п. 9.5.1, обеспечивает построение эквивалентного автомата.

6. Сформулируйте последовательность шагов в процедуре свертки двух последовательно соединенных автоматов.

7. Что такое автоматный контур управления? Сравните этот способ управления автоматным объектом с фундаментальным принципом управления с обратной связью для дискретных систем.

8. Дайте определение понятия управляющей структуры.

9. Постройте модель поворотного стола с N позициями в виде конечного автомата.

10. Постройте управляющую структуру, обеспечивающую N -кратный обход схватом манипулятора последовательность точек P_1, P_2, \dots, P_N . Можно ли обеспечить более экономный способ управления (в смысле количества состояний управляющего автомата) за счет распараллеливания?

ПОСЛЕСЛОВИЕ

Итак, мы рассмотрели вопросы, составляющие в совокупности основу знаний инженера-робототехника в области управления роботами. Изучив эту книгу, читатель сможет самостоятельно решать задачи, связанные с определением положения и скорости манипуляционных механизмов, составлять алгоритмы кинематического управления манипуляторами. Он получает возможность провести анализ влияния динамических факторов на работу робототехнической системы и, при необходимости, составить такие алгоритмы управления, которые бы учитывали действие сил и моментов, возникающих в процессе выполнения рабочих операций.

Авторы надеются, что читатель воспринял идею многоуровневости управления роботами, предполагающую возможность осуществлять управление различного уровня одним и тем же роботом. Речь идет о кинематическом и динамическом управлении, а также об уровне логического управления, которое может быть отнесено как к отдельному роботу, так и к сложной робототехнической системе, включающей наряду с роботами и другие автоматические машины и устройства. При этом управление на каждом из уровней имеет смысл рассматривать только тогда, когда решены задачи управления на предыдущих, более низких уровнях. Так, логическое управление предполагает, что отдельные состояния, в которых может находиться робот, достижимы, т.е. решена задача управления на кинематическом уровне. При этом система устойчива, качество процессов управления достаточно высокое, т.е. рассмотрена и задача управления с учетом динамики движения. Таким образом, все описанные выше задачи оказываются взаимосвязанными и образуют единую основу, опираясь на которую читатель сможет решать проблемы управления роботами в своей области.

Роботика, т.е. научная база робототехники, — одна из наиболее быстро развивающихся областей знания. Поэтому, опираясь на ее основы, читатель должен следить за развитием новых направлений в этой области. Среди тех направлений, которые привлекают в настоя-

щее время особое внимание исследователей, назовем, прежде всего, теорию мультиагентных систем. Ее предметом, как и предметом последней главы нашей книги, являются сложные системы, однако в отличие от описанного в книге подхода элементами системы являются не конечные автоматы, а интеллектуальные агенты, обладающие собственной системой знаний и другими атрибутами искусственного интеллекта. Ясно, что такая теория представляет непосредственный интерес для создания сложных робототехнических систем и является развитием описанных нами подходов.

Интересное развитие методов искусственного интеллекта, в свою очередь, вносит значительные изменения как в методы обработки информации в робототехнических системах, так и в способы управления ими. Система управления приобретает возможность планировать не только движения, но и отдельные задачи, последовательность решения которых приведет к достижению цели. В этом случае меняется структура системы управления, которая снабжается собственной системой знаний о внешнем мире и технологии выполнения операций, а также о собственных возможностях. Робототехническая система приобретает способность самостоятельно работать в заранее недетерминированных условиях.

Мы лишь упомянули о проблеме взаимодействия человека и робота. В какой-то мере эта проблема исследована для ситуации, когда человек-оператор непосредственно управляет движениями робота или его манипуляторами. Однако при оснащении робота собственными «органами чувств» и системой знаний взаимоотношения между роботом и человеком приобретают совсем другой характер. Если в первом случае для этих отношений подходит английское выражение «master — slave», принятое для обозначения системы копирующего типа, когда робот просто повторяет все движения руки оператора, то во втором — отношения между человеком и роботом приближаются к партнерским и сопровождаются содержательным диалогом в процессе работы. При этом решающую роль играет организация интерфейса между человеком и роботом, включающая средства интерпретации сообщений и интеллектуальной поддержки решений оператора. Организация такого интерфейса требует знания объективных возможностей человека по управлению такой сложной технической системой, какой является манипуляционный робот.

Некоторые из перечисленных выше проблем авторы предполагают отразить в последующих учебниках серии «Роботика», над которыми они работают в настоящее время. В связи с этим они будут признательны своим читателям за их предложения по содержанию этой серии, а также за критические замечания, касающиеся данной книги.

Список литературы

1. Александров П. С. Лекции по аналитической геометрии. М.: Наука, 1968.
2. Андреев С. Н., Ворошилов М. С., Петров Б. Е. Проектирование приводов манипуляторов. Л.: Машиностроение, 1975.
3. Арбиб М. Алгебраическая теория автоматов, языков и полугрупп: Пер. с англ. М.: Статистика, 1975.
4. Брауэр Б. Введение в теорию конечных автоматов: Пер. с англ. М.: Радио и связь, 1987.
5. Верещагин А. Ф., Минаев Л. Н. Принципы построения специализированных вычислений для позиционного супервизорного управления манипуляционными роботами // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. 1978. № 4. С. 56–65.
6. Вертю Ш., Куафе Ф. Телеуправление роботами с помощью ЭВМ: Пер. с фр. под ред. А. С. Ющенко. М.: Мир, 1989.
7. Воробьев Е. И. и др. Механика роботов (в 3-х книгах) / Под ред. К. В. Фролова и Е. И. Воробьева. Учебн. пособие для вузов. М.: Высшая школа, 1988.
8. Вукобратович М., Стокич Д. Управление манипуляционными роботами: Пер. с англ. М.: Наука, 1985.
9. Вукобратович М., Стокич Д., Кирчнски Н. Неадаптивное и адаптивное управление манипуляционными роботами: Пер. с англ. под ред. Е. П. Попова и А. С. Ющенко. М.: Мир, 1989.
10. Гавриш А. П., Ямпольский Л. С. Гибкие робототехнические системы: Учеб. Киев: Выща шк., 1989.
11. Галиуллин А. С. Методы решения обратных задач динамики: М.: Наука, 1986. 224 с.
12. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. 4-е изд. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988.
13. Глушков В. М. Теория автоматов и вопросы проектирования структур цифровых машин // Кибернетика, 1965. № 1. С. 3–11.
14. Гориневский Д. М., Формальский А. М., Шнейдер А. Ю. Управление манипуляционными системами на основе информации об усилиях. М.: Изд. фирма «Физико-математическая литература», 1994.
15. Гориневский Д. М., Формальский А. М. Об устойчивости движений упругого манипулятора с обратной связью по силе // Механика твердого тела. 1985. № 3. С. 49–56.
16. Горнев В. Ф., Емельянов В. В., Овсянников М. В. Оперативное управление в ГПС. М.: Машиностроение, 1990.
17. Силовая обратная связь в системе управления манипулятором / В. С. Гурфинкель, Е. А. Девянин, А. В. Ленский и др. // Механика твердого тела. 1984. № 6. С. 56–63.
18. Дистанционно управляемые роботы / Под ред. В. С. Кулешова и Н. А. Лакоты. М.: Машиностроение, 1986.
19. Закревский А. Д. Языки логического управления. Минск, 1988.
20. Зенкевич С. Л., Дмитриев А. А. Логическое управление адаптивным робототехническим комплексом // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. 1986. № 3. С. 113–126.
21. Зенкевич С. Л., Назарова А. В. Программное обеспечение робототехнических систем: Учеб. пособие. М.: МВТУ, 1988.
22. Иванов В. А., Ющенко А. С. Теория дискретных систем автоматического управления: Учеб. пособие для вузов. М.: Наука, 1983.
23. Конечные автоматы: эквивалентность и поведение / Н. Н. Иванов, Г. И. Михайлов, В. В. Руднев, А. А. Таль. М.: Наука, 1984.
24. Казмиренко В. Ф., Лесков А. Г., Введенский В. А. Системы следящих приводов / Под ред. В. Ф. Казмиренко. М.: Энергоатомиздат, 1993.
25. Кудрявцев В. Б., Алешин С. В., Подколзин А. С. Введение в теорию автоматов. М.: Наука, 1985.
26. Кобринский А. А., Кобринский А. Е. Манипуляционные системы роботов. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988.
27. Козлов Ю. М. Адаптация и обучение в робототехнике: М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1990.
28. Козырев Ю. Г. Промышленные роботы: Справочник. М.: Машиностроение, 1988.
29. Программный комплекс для автоматизированного исследования и проектирования промышленных роботов / Е. А. Котов, А. И. Максимов, В. А. Польский, Л. М. Скворцов. М.: Машиностроение, 1991.
30. Кулешов В. С., Лакота Н. А. Динамика систем управления манипуляторами. М.: Энергия, 1971.
31. Лазарев В. Г., Пийль Е. И., Туруга Е. Н. Построение программируемых управляющих устройств. М.: Энергоатомиздат, 1984.
32. Лазарев В. Г., Пийль Е. И. Синтез управляющих автоматов. М.: Энергоатомиздат, 1989.
33. Лесков А. Г., Ющенко А. С. Моделирование и анализ робототехнических систем. М.: Машиностроение, 1992.
34. Манипуляционные системы роботов / Под ред. А. И. Корендяева. М.: Машиностроение, 1989.

35. *Медведев В. С., Лесков А. Г., Ющенко А. С.* Системы управления манипуляционных роботов. М.: Наука, 1978.
36. *Мухеллишвили Н. И.* Курс аналитической геометрии: Учеб. М.: Высш. шк., 1967.
37. *Накано Э.* Введение в робототехнику: Пер. с яп. под ред. А. М. Филатова. М.: Мир, 1988.
38. Основы проектирования следящих систем / Под ред. Н. А. Лакоты. М.: Машиностроение, 1978.
39. *Павлов В. А., Тимофеев А. В.* Расчет и стабилизация программного движения манипулятора подвижного робота // Техническая кибернетика. 1976. № 6. С. 91–101.
40. *Письменный Г. В., Солнцев В. И., Воротников С. А.* Системы силомоментного оучувствления роботов. М.: Машиностроение, 1990.
41. *Питерсон Дж. Л.* Теория сетей Петри и моделирования систем: Пер. с англ. М.: Мир, 1984.
42. *Пол Р.* Моделирование, планирование траекторий и управление движением робота-манипулятора: Пер. с англ. М.: Наука, 1976.
43. *Польский В. А.* Расчет электроприводов промышленных роботов: Учеб. пособие. М.: МВТУ, 1989.
44. *Польский В. А.* Расчет регуляторов следящего электропривода на ПЭВМ: Учеб. пособие. М.: Изд-во МГТУ, 1993.
45. *Попов Е. П., Верещагин А. Ф., Зенкевич С. Л.* Манипуляционные роботы. Динамика и алгоритмы: М.: Наука, 1978.
46. *Попов Е. П.* Робототехника и гибкие производственные системы. М.: Наука, 1987.
47. *Попов Е. П., Письменный Г. В.* Основы робототехники. Введение в специальность: Учеб. М.: Высш. шк., 1990.
48. Проектирование следящих систем двустороннего действия / Под ред. В. С. Кулешова. М.: Машиностроение, 1980.
49. Робототехника и гибкие автоматизированные производства: Учеб. пособие / Под ред. И. М. Макарова. М.: Машиностроение, 1986 (в девяти книгах).
50. Робототехника: новый этап развития / Под ред. Е. П. Попова и А. С. Ющенко. М.: Наука, 1993.
51. Конечный автомат как объект управления // Автоматика и телемеханика, 1978. № 9. С. 15–23.
52. Системы технического зрения / Под ред. И. М. Макарова, Д. Е. Охотимского и др. М.: Наука, 1981.
53. Системы оучувствления промышленных роботов и гибких производственных систем / Под ред. И. М. Макарова и Е. П. Попова. М.: Наука, 1989.
54. *Солодовников В. В., Плотников В. Н., Яковлев А. В.* Теория автоматического управления техническими системами: Учеб. пособие. М.: Изд-во МГТУ, 1993.

55. *Стечкин С. Б., Субботин Ю. Н.* Сплайны в вычислительной математике. М.: Наука, 1976.
56. *Тимофеев А. В.* Адаптивные робототехнические комплексы. Л.: Машиностроение, 1988.
57. *Тывес Л. И., Маркевич С. В.* Управление движением робота по собственной траектории. М.: ИМАШ АН СССР. Препринт, 1985.
58. *Тывес Л. И., Маркевич С. В.* Планирование движений роботов с учетом динамических свойств исполнительных устройств. М.: ИМАШ АН СССР. Препринт, 1985.
59. Управляющие системы промышленных роботов / Под ред. И. М. Макарова и В. А. Чиганова. М.: Машиностроение, 1984.
60. *Фу К., Гонсалес Р., Ли К.* Робототехника: Пер. с англ. под ред. В. Г. Градецкого. М.: Мир, 1989.
61. *Хори Б. К. П.* Зрение роботов: Пер. с англ. М.: Мир, 1989.
62. *Черноузько Ф. Л., Болотник Н. А., Градецкий В. Г.* Манипуляционные роботы. М.: Наука, 1989.
63. *Шахинтур М.* Курс робототехники: Пер. с англ. под ред. С. Л. Зенкевича. М.: Мир, 1990.
64. *Эйрис Р., Миллер С.* Перспективы развития робототехники: Пер. с англ. под ред. Е. П. Попова. М.: Мир, 1986.
65. *Юревич Е. И.* Основы робототехники: Учеб. Л.: Машиностроение, 1985.
66. *Asada H., Youcef-Toumi K.* Direct-Drive Robotics. Theory and Practice. Cambridge, Massachusetts. MIT Press, 1987.
67. *Denavit J, Hartenberg R. S.* Kinematic notation for Lower-Pair Mechanisms Based on Matrices // J. Appl. Mech. 77. P. 215–221, 1955.
68. *Hollerbach J. M.* Dynamic Scalling of Manipulator Trajectories: Trans. ASME // J. Dyn. Syst., Meas. and Con., 106. P. 102–106, 1984.
69. *Lee C. S., Ziegler M. A.* A Geometric Approach in Solving of Inverse Kinematics of PUMA Robots // IEEE Trans. Aero. and Electr. Systems, AES-20. No 6. P. 695–706.
70. *Lee T. M., Yang D. C. H.* On the Evaluation of Manipulator Workspace // Trans. ASME, J. Mech. Trans. Autom. Design, 105(5). P. 70–77, 1983.
71. *Luh J. V. S., Lin C. S.* Approximate Joint Trajectories for Control of Industrial Robots Along Cartesian Path // IEEE Trans. Sys. Man and Cyber. SMC-14. No 3. P. 444–450, 1984.
72. *Luh J. V. S., Walker M. W., Paul R. P.* Resolved Acceleration Control of Manipulators // IEEE Trans. Aut. Control, AC-25. No 3. P. 486–474, 1980.
73. *Paul R. P.* Robot Manipulators: Mathematics, Programming and Control. Cambridge, Mas. MIT Press, 1981.
74. *Paul R., Shimano B.* Kinematic Control Equation for Simple Manipulators // IEEE Proc. of Confer. on Decision and Control. N-Y, 1979. P. 1398–1406.

75. Pieper D. L. The Kinematics of Manipulator under Computer Control // Artificial Intelligence Project Memo. No 72. Stanford University, 1968.
76. Stokic D., Vukobratovic M. Robustness of decentralized robot controller to payload variation // Journal of Robot Systems. V. 5. No 5. P. 471-495, 1988.
77. Vukobratovic M., Stokic D. Applied Control of Manipulation Robots. Berlin. Springer Verlag, 1989.
78. Vucobratovic M., Kircansky N. Real-Time Dynamics of Manipulation Robots. Berlin. Springer Verlag, 1984.
79. Vukobratovic M., Potkonjak V. Dynamics of Manipulation Robot. Berlin. Springer Verlag, 1982.
80. Whitney D. E. The Mathematics of Coordinated Control of Prosthetic Arms and Manipulators // Trans. ASME, J. Dynamic Systems, Measur. and Control. 122. P. 303-309, 1972.
81. Yoshikawa T. Dynamic Manipulability of Robot Manipulators // Proc. 1985 IEEE Intern. Conf. on Robotics and Automation. St. Lois. P. 1033-1038.
82. Yuan S. Dynamic decoupling of a remote manipulator system // IEEE Trans. on Automatic Control. V. 23. No 4. P. 713-717, 1978.

Комментарий к списку литературы

Введение. Существует большое количество литературы, написанной для предварительного знакомства с робототехникой. Читателю этой книги как будущему специалисту в рассматриваемой области следует проявить осторожность при чтении такой литературы, так как многие книги уже устарели и не соответствуют современным представлениям о робототехнике. Одним из учебных пособий, которые по-прежнему можно рекомендовать как введение в робототехнику, является книга Е. П. Попова и Г. В. Письменного [47]. Кроме того, может быть использована и книга Е. И. Юревича [65], несмотря на то, что она издана уже довольно давно. Это первый отечественный учебник по робототехнике.

Среди зарубежных изданий, переведенных на русский язык, отметим книгу японского автора Э. Накано [37], вполне современную по изложенным в ней принципам создания робототехнических систем. Социальные и экономические перспективы использования роботов по состоянию на начало восьмидесятых годов описаны в книге Р. Эйрис и С. Миллер [64]. Здесь, прежде всего, интересна методика исследований, поскольку реальное развитие промышленности внесло существенные поправки в прогнозы авторов.

Читателю, который интересуется, в первую очередь, промышленными приложениями робототехники, можно порекомендовать небольшую книгу одного из основателей отечественной робототехники Е. П. Попова [46], написанную также как введение в специальность. Более углубленное рассмотрение этих вопросов можно найти в учебнике украинских авторов А. П. Гавриша и Л. С. Ямпольского [10] и в серии из девяти книг, изданных под общей редакцией И. М. Макарова [49].

Среди книг, посвященных вопросам управления роботами, отметим монографию А. В. Тимофеева [56] и книгу Ю. М. Козлова [27]. Несмотря на то, что эти книги написаны для специалистов, язык и стиль изложения делают их вполне доступными для предварительного знакомства с возникающими в этой области проблемами. Более углубленно вопросы организации систем управления промышленными роботами рассмотрены в книге, написанной под редакцией И. М. Макарова и В. А. Чиганова [59], чтение которой также

требует внесения довольно существенных корректив, обусловленных временем ее издания.

Проблемы создания адаптивных и интеллектуальных робототехнических систем, о которых читатель прочтет в [56; 27], требуют некоторого знакомства с системами осязания роботов, в первую очередь, с системами технического зрения и силомоментного осязания. Поскольку в этих книгах не рассматриваются проблемы управления при наличии технического зрения и лишь в небольшой степени затрагиваются вопросы силомоментного осязания, мы рекомендуем специальную литературу по этим вопросам. Последней монографией по вопросам силомоментного осязания, изданной в России, является книга Д. М. Гориневского, А. М. Формальского и А. Ю. Шнейдера [14]. В ней можно найти сведения как об устройстве многокомпонентных силомоментных датчиков, так и об организации систем силомоментного осязания при выполнении роботом конкретных задач. Большая часть этих работ была выполнена в Институте механики МГУ.

Среди обширной литературы по техническому зрению роботов выделим монографию Б. Хорна [61]. В число публикаций, наиболее адекватно отражающих современное состояние вопроса, входят также сборники статей [52] и [53]. Они имеют более высокий уровень формализации изложения и, следовательно, требуют больших усилий от читателя, интересующегося вопросами осязания роботов. В отличие от них сборник [50] ориентирован на широкий круг читателей и позволяет получить представление о многих аспектах современной робототехники, в том числе осязания роботов и управления ими. При этом от читателя не требуется специальной подготовки.

Одним из аспектов робототехники, интерес к которому, по-видимому, будет возрастать, является проблема взаимодействия робота и человека. К сожалению, публикаций в этой области не очень много и для знакомства с этими вопросами на сегодняшний день мы можем порекомендовать всего две книги — монографию коллектива авторов, изданную под редакцией В. С. Кулешова и Н. А. Лакоты [18] и переведенную на русский язык небольшую книгу известных французских ученых Ж. Вертю и Ф. Куафе [6].

Глава 1. Содержит основные сведения по теории линейных преобразований, которые далее используются для построения кинематической модели многозвенного механизма. Дополнительный материал по преобразованиям переноса и вращения можно найти в монографии [12]. Теория однородных векторов и преобразований подробно изложена в [1; 36]. Основополагающей работой, посвященной выбору систем координат для многозвенных механизмов, является публикация [67]. Предложенная в ней схема выбора таких систем (координаты Денавита — Хартенберга) принята в этой книге за основу.

Глава 2. Посвящена решению основных задач кинематики — прямой и обратной задачам о положении, а также некоторым геометрическим аспектам их применения для выяснения конфигурации рабочей зоны механизма.

Решение кинематических задач о положении подробно освещено в литературе. К их числу относится, прежде всего, проблема поиска решения обратной задачи для разнообразных кинематических схем манипуляционных роботов. В работе [74] для решения обратной задачи о положении используются алгебраические методы. В [69] приведено решение обратной задачи для манипулятора PUMA, основанное на геометрическом подходе.

Метод обратных преобразований для решения той же задачи представлен в работе Р. Пола [73], переведенной на русский язык [42]. Одной из первых работ, где использован итерационный метод решения нелинейной обратной задачи о положении является работа А. Ф. Верещагина и Л. Н. Минаева [5].

Конфигурация и свойства рабочего пространства манипуляционного робота рассмотрены в работе М. Шахинпура [63]. Одной из первых публикаций, в которой исследованы эти проблемы, является работа Т. Ли и Д. Янга [70].

Методы анализа свойств манипуляционных систем в рабочем пространстве нашли продолжение и значительное развитие в монографии А. А. Кобринского и А. Е. Кобринского [26].

В справочнике Ю. Г. Козырева [28] характеристики рабочего пространства используются в качестве технических показателей манипуляционных роботов.

Глава 3. Рассмотрены кинематические свойства манипулятора, связанные со скоростями и ускорениями. Этой проблеме, как и проблеме определения положений, также посвящена обширная литература. Одной из первых работ, содержащих постановку прямой и обратной задачи о скорости, является статья Д. Уитни [80]. Решение обратной задачи о скорости в аналитической форме для механизмов с тремя пересекающимися осями впервые было получено А. Ф. Верещагиным в [5]. Аналогичный подход был использован в [74] для решения обратной скоростной задачи для манипулятора PUMA.

Дифференциальные преобразования, играющие большую роль в разработке алгоритмов управления манипуляционными роботами, детально рассмотрены в уже упоминавшейся монографии М. Шахинпура [63] с большим количеством примеров.

Глава 4. Посвящена способам кинематического управления манипуляторами. Дополнительные сведения по проблемам сплайн-интерполяции, содержащимся в гл. 4, имеются в монографии С. Б. Стечкина и Ю. Н. Субботина [55]. В том числе здесь рассмотрены *B*-сплайны и многомерная интерполяция сплайн-функциями, используемая для моделирования мобильных роботов.

Различные методы планирования траектории движения манипуляторов и роботов описаны в монографии Е. П. Попова, А. Ф. Верещагина и С. Л. Зенкевича [45]. Там же приведен способ планирования в пространстве обобщенных координат с использованием метода динамического программирования. В работе Д. Холлербаха [68] исследуется задача реализуемости спланирован-

ной траектории в условиях ограничения на моменты, развиваемые приводами, а также кинематические ограничения манипулятора. Задача ограничения моментов при планировании траектории решается в [71]. В работе [72] рассмотрен метод управления по ускорению.

Различные методы управления манипуляционными роботами изложены в книгах [45; 63].

Глава 5. Содержит анализ статик манипуляционных механизмов, т.е. уравнений равновесия приложенных к ним сил и моментов. Составление таких уравнений с использованием аппарата блочных матриц было изложено в монографии В. С. Медведева, А. Г. Лескова и А. С. Ющенко [35]. Блочные матрицы позволяют в весьма сжатой форме записать как условия равновесия, так и рекуррентную процедуру расчета сил и моментов, приложенных к звеньям манипулятора. Аналогичные рекуррентные процедуры рассмотрены в книге М. Шахинпура [63].

Содержащийся в гл. 5 анализ сил, развиваемых манипуляторами в статике, представляет наибольший интерес для перспективных систем с безредукторным (моментным) электродвигателем, который позволяет непосредственно управлять развиваемыми силами и моментами. Единственная книга, где эти вопросы рассмотрены достаточно подробно, была опубликована сотрудниками Массачусетского Технологического Института [66]. Здесь были рассмотрены эллипсоиды развиваемых сил и проведен их анализ в рабочем пространстве манипулятора. Поскольку эта книга не была переведена на русский язык, в гл. 5 приведены два интересных примера из нее.

Процедура составления уравнений манипулятора как уравнений кинетостатики с использованием аппарата блочных матриц, являясь сжатой формой записи уравнений динамики, тем не менее, малоэффективна как аппарат численного анализа. Ее недостатком является сложность блочных матриц, входящих в уравнения кинетостатики, а также их разреженность (многие компоненты этих матриц равны нулю), что приводит к неэффективному использованию памяти ЭВМ. Поэтому в практике решения аналогичных задач предпочтение было отдано рекуррентным способам составления уравнений динамики. Наиболее подробно этот вопрос рассмотрен в [63], где уравнения кинетостатики составляются с помощью итеративной процедуры. Получаемые при этом уравнения динамики называются уравнениями Ньютона — Эйлера. Процедура составления таких уравнений приведена и в монографии К. Фу, Р. Гонсалеса и К. Ли [60]. Аналогичный подход принят и в данной книге, причем использование блочных матриц позволяет провести описание процедуры составления уравнений движения в значительно более компактной форме. В сжатом изложении процедура получения уравнений кинетостатики с помощью блочных матриц представлена в [33]. Она описана также в монографии югославских авторов М. Вукобратовича и Д. Стокича [8].

Показатели динамических свойств манипулятора приведены в ряде работ, опубликованных в виде научных статей. Среди них отметим работы японского ученого Т. Йошикава [81], в которых введено понятие динамической манипулятивности, рассмотренное в гл. 5. Следует иметь в виду, что эта работа, как и [66], посвящена, в первую очередь, рассмотрению высокомоментных приводов, допускающих прямое управление моментом. Введенные показатели могут быть использованы для оценки динамических свойств манипуляторов и в других случаях.

Глава 6. Содержит краткое изложение методов Лагранжа и Гаусса для составления и анализа моделей динамики манипулятора. В одной из первых книг, посвященных динамике манипуляторов, написанной Р. Полом [42], за основу были взяты уравнения динамики системы твердых тел в форме Лагранжа. В [35] было показано, что такой подход имеет определенные преимущества при описании манипуляторов с дополнительными кинематическими связями. При этом, однако, следует иметь в виду и ограничения — связи при использовании этого подхода могут быть только голономными. В [60] и [63] описан итеративный подход к составлению уравнений Лагранжа (метод Лагранжа — Эйлера), который весьма эффективен при организации численных процедур формирования уравнений динамики и их решения. При этом в [60] для манипуляционного механизма получены уравнения Даламбера в форме Лагранжа (обобщенные уравнения Даламбера). Весьма подробно и с большим количеством интересных примеров метод Лагранжа описан в серии из трех книг «Механика роботов» Е. И. Воробьева и др. [7].

Другой подход, основанный на принципе наименьшего принуждения Гаусса, был разработан А. Ф. Верещагиным [45]. На основе этого подхода, обеспечивающего значительную общность описываемой модели и весьма эффективного в вычислительном отношении, в МГТУ им. Н. Э. Баумана был разработан пакет программ, позволяющих автоматически составлять уравнения движения манипуляционных роботов и исследовать их [29]. Этот программный пакет представляет только один из возможных подходов к автоматизации моделирования уравнений динамики манипуляторов. Другой подход, в котором для аналитического вывода уравнений динамики (на ЭВМ) используются особенности структуры этих уравнений, был разработан М. Вукобратовичем и Н. Кирчанским [78]. Метод обеспечивает значительное быстроедействие при вычислении составляющих уравнений динамики и в ряде случаев может быть использован при управлении в реальном времени. Общие принципы этого подхода кратко изложены в изданной на русском языке монографии [9].

Глава 7. Знакомит читателя с теорией систем автоматического управления. Для читателя, не являющегося специалистом в этой области, можно порекомендовать последний из учебников, изданных в МГТУ им. Н. Э. Баумана [54]. Вопросы проектирования следящих систем более детально изложены в

[38]. Рассмотренные здесь математические модели, методы исследования и управления в полной мере применимы и для исполнительных систем манипуляционных роботов. Отметим, что первой монографией, посвященной собственно приводам манипуляторов была книга [2], а первой книгой, в которой были рассмотрены вопросы динамики исполнительной системы манипуляторов — монография В. С. Кулешова и Н. А. Лакоты [30]. Несмотря на давность издания, многие из рекомендаций, содержащихся в этих книгах, вполне приемлемы и сегодня. Отметим, что в последней из этих книг впервые были исследованы манипуляционные системы двустороннего действия. Подробнее динамика систем двустороннего действия описана в монографии [48].

Рассмотренные в гл. 7 методы автоматизированного энергетического расчета приводов манипулятора нашли отражение в учебных пособиях [43; 44], изданных в МГТУ.

Методика анализа линеаризованных исполнительных систем с помощью логарифмических частотных характеристик, включая исследование взаимовлияния каналов управления и анализ устойчивости, была разработана А. Г. Лесковым; она подробно изложена автором в [33] и в [35]. На основе этой методики были разработаны пакеты программ, облегчающие работу пользователя, в том числе ПАЛС (программа автоматического линейного синтеза), ПСП-3 (ГосФАП рег. № 008061), ПАМ (ГосФАП рег. № 008062).

Вопросы анализа и синтеза многомерных систем следящих приводов, к числу которых относятся и исполнительные манипуляционные системы, подробно изложены в монографии В. Ф. Казмиренко, А. Г. Лескова и В. А. Введенского [24].

Отметим, что исполнительные системы современных манипуляторов, в основном, имеют микрокомпьютерное управление. Особенности расчета дискретных автоматических систем достаточно подробно освещены в учебнике [22], хотя примеров расчета собственно манипуляционных систем в ней нет.

Подробно и с большим количеством примеров методика анализа и синтеза робототехнических систем описана в книге М. Вукобратовича и Д. Стокича [77], изданной на английском языке. Это учебник, отражающий современный подход к решению указанных задач. Здесь приводится и программное обеспечение для автоматизированного синтеза систем управления роботами. К сожалению, книга не переведена на русский язык. Однако основные теоретические положения, использованные авторами, можно найти в книге М. Вукобратовича, Д. Стокича и Н. Кирчански [9], изданной на русском языке, а также в ранее изданной книге [8].

Рассмотрев в гл. 7 вопросы управления по вектору скорости, мы оставили за рамками книги вопросы полуавтоматического управления, т.е. организации систем управления роботом с участием оператора. Читатель может самостоятельно познакомиться с этими вопросами по книгам [6] и [18]. В

первой из этих книг изложены, преимущественно, вопросы организации таких систем и эргономические аспекты управления. В [18] содержатся методика расчета исполнительных систем дистанционно управляемых роботов и вопросы организации систем двустороннего действия.

Глава 8. Рассмотрены методы управления, основанные на решении обратной задачи динамики, т.е. на определении сил, вызывающих заданное движение, в общем виде систематизированы А. С. Галиуллиным [11]. Применительно к управлению манипуляционными роботами эта задача подробно рассматривалась М. Вукобратовичем и его сотрудниками в уже упоминавшихся работах [8], [9], [78]. Однако эти вопросы рассматривались и многими другими исследователями. Так, подход к компенсации динамики манипулятора, рассмотренный в гл. 8, был впервые предложен В. А. Павловым и А. В. Тимофеевым [39]. Он описан также в монографии А. В. Тимофеева [56].

Вопросы компенсации динамики программного движения, при условии, что можно пренебречь перекрестными связями, обусловленными динамикой механизма, рассматривались в упомянутых выше работах М. Вукобратовича и его соавторов, к которым можно добавить монографию [79]. Этими же авторами была развита концепция декомпозиции системы управления манипулятором, при которой по отдельности формируются сигналы локального управления подсистемами и сигналы динамической коррекции. В гл. 8 также описан подход к динамической декомпозиции каналов управления, предложенный С. Юанем [82].

Вопросы организации силовой обратной связи в робототехнических системах отражены в монографии Д. М. Гориневского, А. М. Формальского и А. Ю. Шнейдера [14], а также в небольшой книге Г. В. Письменного, В. И. Солнцева и С. А. Воротникова [40].

Вопрос о независимости динамической коррекции с помощью силовой обратной связи от неточности задания динамической модели исполнительного механизма (это свойство иногда называют «робастностью» системы управления) рассматривается в работе Д. Стокича и М. Вукобратовича [76].

Задача анализа устойчивости манипулятора при наличии силовой обратной связи представляет интерес, прежде всего, при его взаимодействии с внешними объектами. Эти вопросы нашли отражение в уже упоминавшихся книгах [8; 9; 14; 18]. Однако их сложность не позволяет решить задачу в общем случае. Поэтому целесообразно рассмотрение задачи при некоторых упрощениях, что и сделано в работах [15] и [17]; пример из работы Д. М. Гориневского и А. М. Формальского мы привели в гл. 8. Особенность рассматриваемого подхода состоит в том, что учитывается упругость датчика сил, существенно усложняющая динамику процессов управления. В более общей постановке вопросы исследования динамики манипуляторов с учетом упругости их звеньев рассмотрены в монографии Ф. Л. Черноусько, Н. А. Болотника и В. Г. Градецкого [62].

Проблема планирования движения манипулятора по собственной траектории, т.е. под действием сил инерции, исследовалась в Институте машиноведения РАН. Краткие сведения, сообщаемые по этому вопросу в гл. 8, целиком основаны на результатах этих исследований [57; 58].

Глава 9. Дополнительные сведения о теории автоматов и сетей Петри можно найти в [13; 3: 4; 25]. Хорошее изложение теории сетей Петри, снабженное большим количеством примеров, содержится в [41]. В книге [23] исследуется поведение автоматов.

Вопросам управления техническими системами с использованием автоматов посвящено много работ. В работе [41] исследуется простой автоматный контур управления, включающий в себя объект управления, который описан как конечный автомат, а также регулятор. Автор приводит графический алгоритм синтеза регулятора. Вопросам синтеза управляющих автоматов и языкам логического управления посвящены работы [31; 32; 19]. В работе [20] описан подход, используемый для логического управления сборочным робототехническим модулем. Разработка программного обеспечения робототехнических систем является чрезвычайно сложной задачей, рассмотрение которой выходит за рамки настоящей книги. В изданном в МГТУ им. Н. Э. Баумана учебном пособии [21] рассматриваются некоторые аспекты разработки программного обеспечения системы управления роботами, в том числе ее логического уровня. Отличные от автоматных подходы к управлению сложными техническими системами описаны в [16].

Предметный указатель

- | | |
|--|--|
| Автомат | Кинематическая пара 17, 37 |
| — абстрактный конечный 353 | Кинематическая схема манипулятора (манипуляционного механизма) |
| — инициальный 353 | — — антропоморфная 21 |
| — Мили 353 | — — замкнутая 18 |
| — многомерный 355 | — — параллелограммная 206 |
| — Мура 353, 355 | — — прямоугольная 19 |
| — сетевой 361 | — — разомкнутая (незамкнутая) 18, 195 |
| <i>B</i> -сплайны 391 | — — с ветвлением 22 |
| Вращение | — — с замкнутыми контурами 240 |
| — сложное 44, 122 | — — с перекрестной связью 208 |
| — элементарное 43 | — — с избыточностью 19 |
| Граф | — — сферическая 21 |
| — автомата 354 | — — цилиндрическая 21 |
| — задания 349 | Кинетический момент 211 |
| Датчики сил и моментов 28 | Кинетический потенциал (функция Лагранжа) 233 |
| — — — в соединениях манипулятора 320 | Класс кинематической пары 17, 37 |
| — — — на схвате 318, 324 | Компенсация динамики манипулятора 305, 307 |
| Жесткость датчиков (сил и моментов) 330 | Комплекс отдельно взятых приводов 267 |
| Звено кинематической цепи 35 | Координаты |
| Зона обслуживания 84 | — обобщенные 37 |
| Исполнительная система манипуляционного робота 256 | — однородные 49 |
| Кинематическая задача (для манипуляционного механизма) | Коэффициент сервиса 84 |
| — — обратная позиционная 91 | Критерий устойчивости |
| — — — о скорости 131, 140 | — — Гурвица 275, 299 |
| — — прямая позиционная 67 | — — Найквиста 276, 300 |
| — — — о скорости 131 | Маневренность (манипулятора) 76 |
| | Манипулятор 16, 35 |
| | Манипулятивность 84 |
| | — в направлении 84 |
| | — динамическая 221 |
| | — относительная 164 |

- Матрица
— блочная 110
— дифференциального преобразования 129
— однородного преобразования 51
— ортогонального преобразования 41
— поворота 40
— псевдообратная 152
— Якоби 100
- Метод
— Ньютона 98
— прогонки 179
— обратных преобразований 92
- Механизм 17
- Мобильность манипулятора 163
- Мощность силовых агрегатов 203, 339
- Некорректные задачи 311
- Объем рабочего пространства 78
- Однородный вектор 50
- Передаточная матрица
— — замкнутой исполнительной системы 265
— — перекрестных связей (взаимовлияния каналов управления) 268
— — по возмущению 323
— — разомкнутой исполнительной системы 265
- Планирование траектории движения (схвата манипулятора)
— — — динамическое 335
— — — кинематическое 170
— — — по собственной траектории 341
- Податливость датчиков (сил и моментов) 328, 330
- Позиционная задача
— — прямая 67
— — обратная 91
- Показатель качества исполнительной системы 270
- Преобразование
— дифференциальное 121, 128
— однородное 51
— ортогональное 40
— Эйлера 45
- Предел досягаемости 79
- Привод степени подвижности манипулятора 23
- Приемистость манипулятора 166
— динамическая 222
- Принуждение по Гауссу 248
— — для манипуляционного механизма 249
- Принцип
— виртуальных перемещений 191, 238
— Гаусса 248
— Даламбера 209
— подчиненного регулирования 24, 286
- Рабочее пространство (манипулятора) 73
- Регулятор
— моментный обобщенный 311
— ПИД (пропорционально-интегро-дифференциальный) 258, 284
— с последовательной и параллельной коррекцией 259
- Робототехнический комплекс 30
- Связи
— голономные 231
— идеальные 196, 238
— неголономные 235, 248
- Сервис (манипулятора) 85
- Сеть автоматов 365, 371, 374
- Силовая обратная связь 318, 320, 324
- Силы и моменты
— — инерции 210, 212
— — обобщенные 231, 242
— — развиваемые рабочим инструментом 201
— — реакции связей 200, 236
- Система
— силомоментного очувствления 28, 319
— сложная 348, 350
— — робототехническая 348, 350, 373
— — технического зрения 27, 359
- Система координат
— — Денавита — Хартенберга 60
— — неподвижная абсолютная 58
— — связанная со звеном манипулятора 58
- Сплайн-функции
— кубические 176, 335
— параболические 180
- Степени подвижности (манипуляторов)
— — вращательные (шарниры) 38
— — ориентирующие 22
— — переносные 22
— — поступательные (телескопические) 38
- Схват (захват) манипулятора 16, 219
- Тензор инерции 211
- Управление манипуляторами
— — — адаптивное 27
— — — динамическое 29
— — — с декомпозицией 315
— — — кинематическое 169
— — — контурное 25
— — — по вектору силы 190
— — — по вектору скорости 188, 290
— — — по вектору ускорения 188
— — — программное 26, 184
— — — по положению (позиционное) 25, 183, 186, 296
— — — цикловое 25, 356
- Управляющая структура 361
- Уравнения
— — динамики
— — — в форме Даламбера 215, 305
— — — Даламбера — Лагранжа 238
— — — Лагранжа первого рода 239
— — — Лагранжа второго рода 231
— — — Лагранжа — Эйлера 235
— — — Ньютона 213
— — кинестатики 213, 214
— — статики 198
- Устойчивость исполнительной системы 275, 299
— — — при наличии силовой обратной связи 328
- Частотные характеристики 266
— — — логарифмические 273, 279, 295
- Электродвигатели
— — постоянного тока 257
— — прямого управления (безредукторные, моментные) 203, 205
- Эллипсоид допустимых сил 204
— — — ускорений 220
- Энергия
— — кинетическая 231
— — потенциальная 233
- Эргатические манипуляционные системы 32

Учебное издание

**Зенкевич Станислав Леонидович
Ющенко Аркадий Семенович**

УПРАВЛЕНИЕ РОБОТАМИ

ОСНОВЫ УПРАВЛЕНИЯ

МАНИПУЛЯЦИОННЫМИ РОБОТАМИ

*Редактор Г. А. Нилова
Художник С. С. Водчиц
Корректор О. В. Калашникова
Компьютерная верстка А. Д. Холодов*

Оригинал-макет подготовлен в Издательстве МГТУ им. Н. Э. Баумана

ЛР № 020523 от 25.04.97
Подписано в печать 01.12.99. Формат 70×100/16. Печать офсетная.
Бумага офсетная. Печ. л. 25. Усл. печ. л. 32,25. Уч.-изд. л. 32,08.
Тираж 1000 экз. Заказ № 1488 .

Издательство МГТУ им. Н. Э. Баумана.
107005, Москва, 2-я Бауманская, 5.

Отпечатано с оригинал-макета в ППП «Типография «Наука»
121099, Москва, Шубинский пер., 6